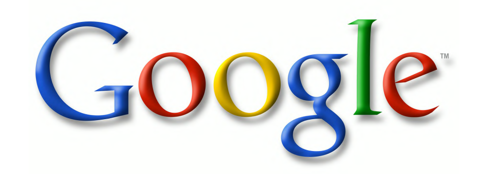
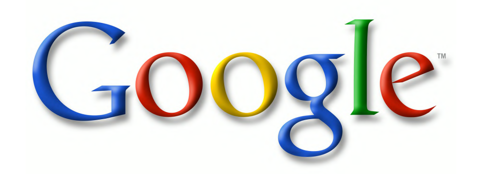
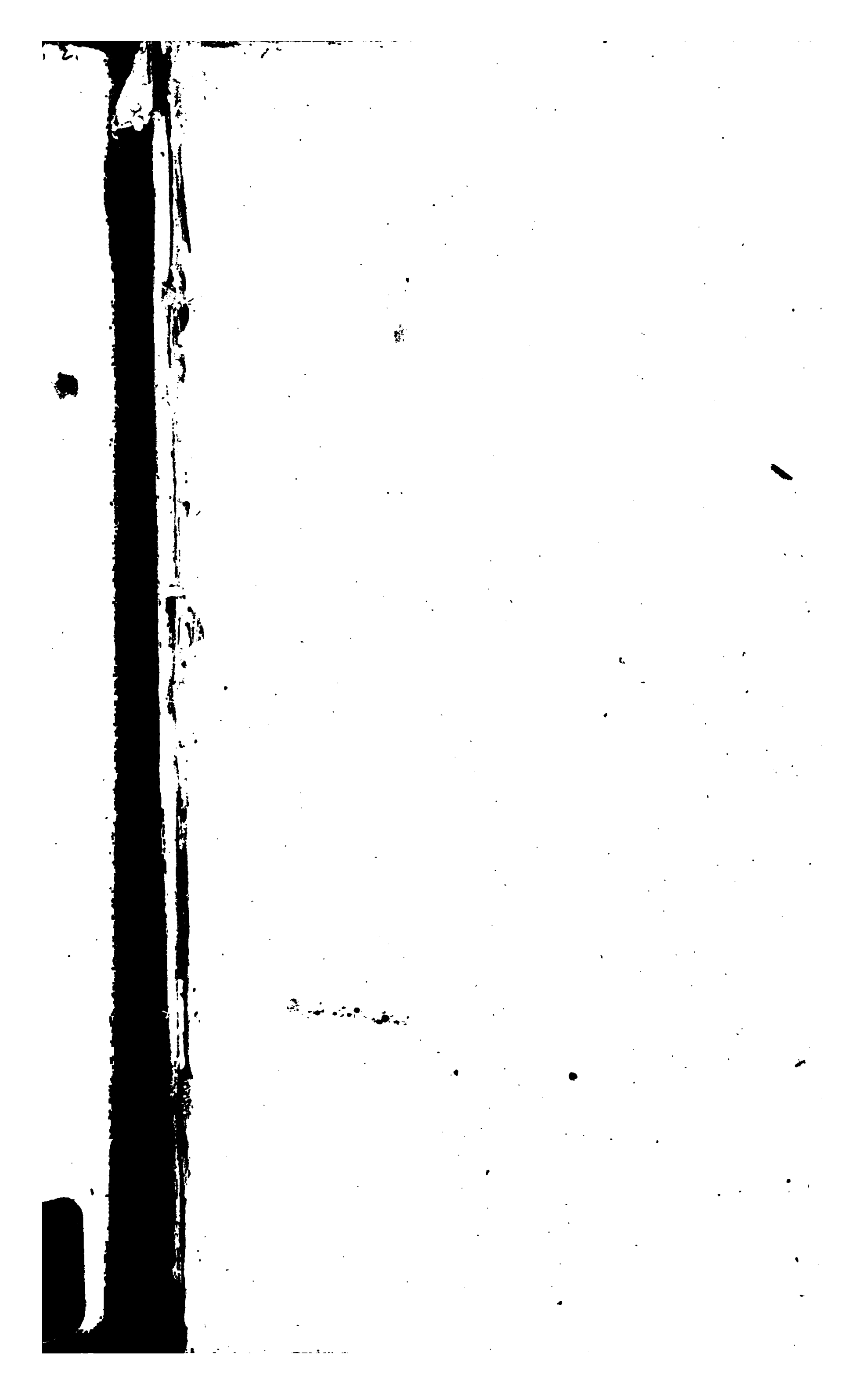
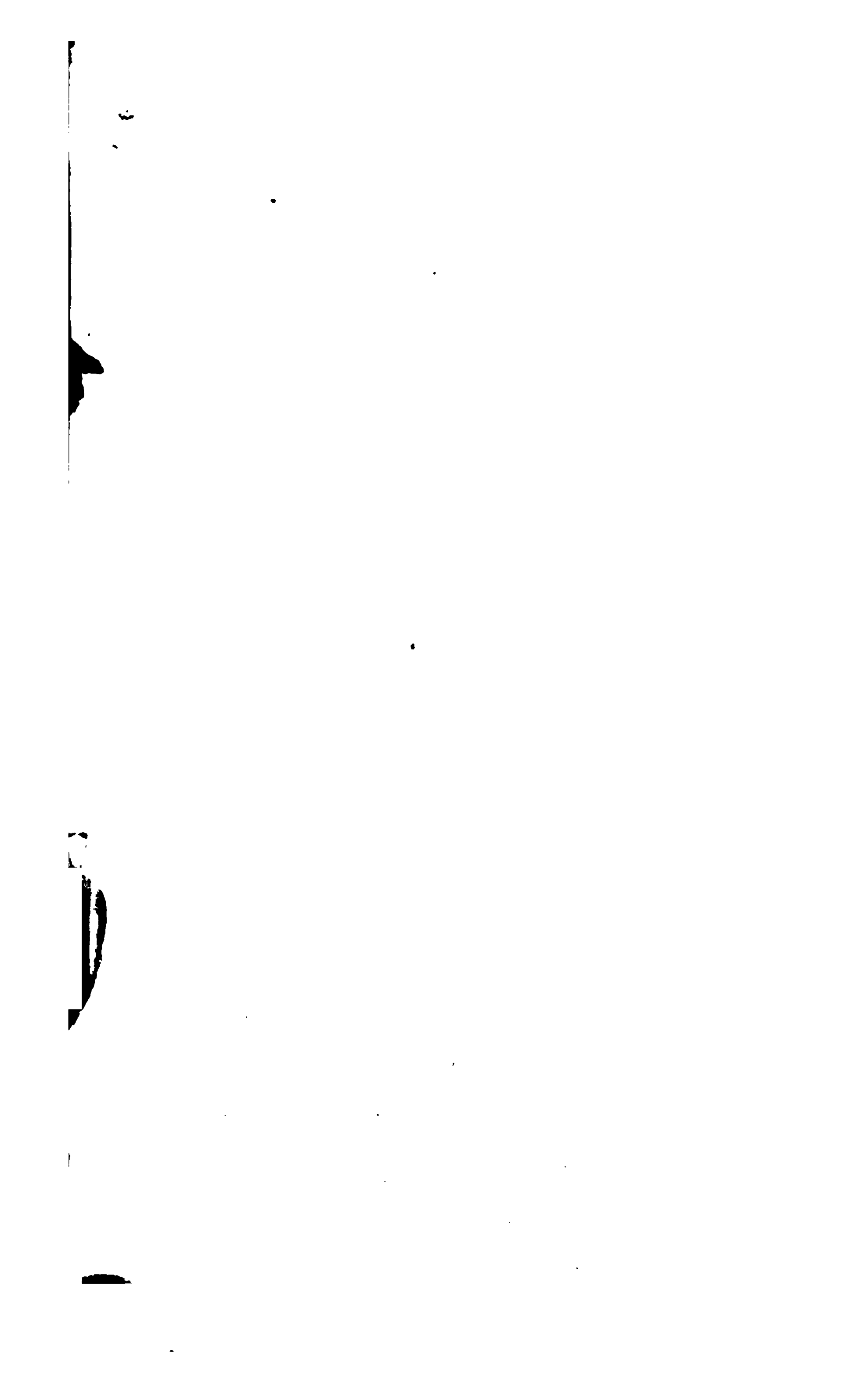
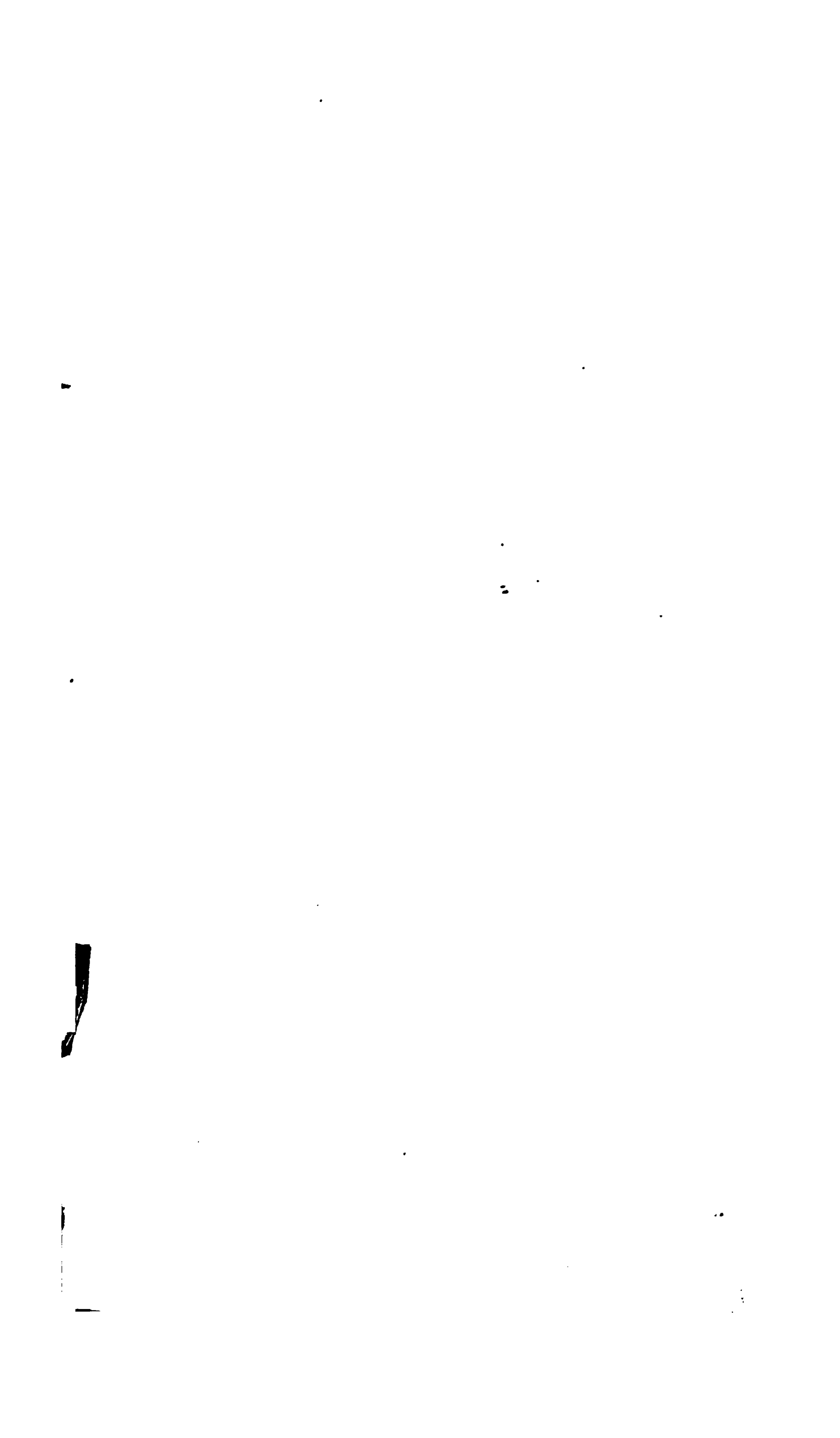












Lehrbuch

der

gesammten höhern Mathematik

in zwei Bänden.

Zum Gebrauche für die oberen Klassen der Gymnasien und anderen höheren Lehr-Anstalten, so wie zum Selbstunterrichte

bearbeitet

und mit vielen Uebungs-Beispielen versehen

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

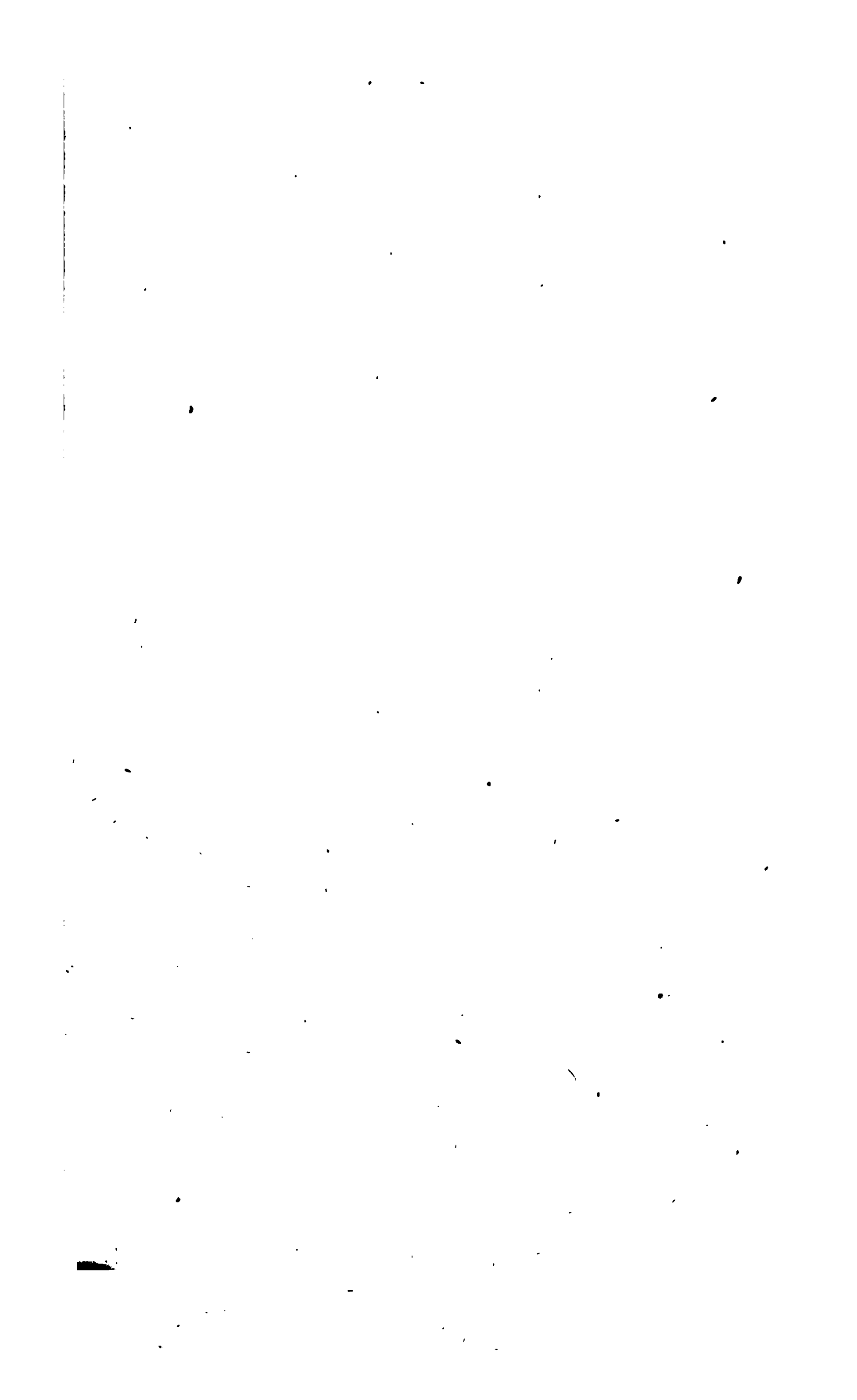
an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie auch an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften correspond. Mitglied.

Erster Band,

Analysis des Endlichen oder höhere Algebra, die Elemente der höhern Geometrie, und die Differential-Rechnung nebst deren Anwendung enthaltend.

Leipzig 1839.

Bei Friedrich Volckmar.



Vorrede.

Der große und seltene Beifall, dessen sich das „Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht" Leipzig 1836 (2te Aufl. 1837) erfreut, läßt den Verfasser hoffen, daß das gegenwärtige, in demselben Sinn und Geist abgefaßte Werk ebenfalls dazu beitragen werde, das Studium der Mathematik zu erleichtern, zu beleben und allgemeiner zu machen. Es ist hier versucht worden, das „System der Mathematik" Berlin 1826—33 auf ohngefähr ein Sechstel des Raumes zusammen zu drängen; dagegen ist die gegenwärtige Arbeit selbständig durchgeführt und ein „Auszug" aus dem „System" um so weniger zu nennen, als von letzterem Werke erst 7 Theile erschienen sind, und der Verfasser bis jetzt vergebens nach Muße gestrebt hat, um auch die letztern 5 Theile dem

Drucke übergeben zu können. In gegenwärtiger Schrift mußte namentlich das Princip festgehalten werden, den Anfänger in die einzelnen Lehren gehörig ausführlich und gründlich einzuführen, also auch ausführlicher in den Entwickelungen und Beweisen zu seyn, dann aber das Weitere in großen, möglichst deutlichen und übersichtlichen Umrissen, und zuletzt nur die Resultate zu geben. So schmeichelt sich der Verfasser daß, während das Buch den Schülern höherer Klassen eben so wohl zur Wiederholung des Vortrags dient, als auch zum eigenen Arbeiten Veranlassung giebt, solches noch mit besonderem Nutzen zum Selbst-Studium gebraucht werden könne, von jedem, welcher nicht Gelegenheit hat, mündlichem Unterrichte beizuwohnen. Ueberdieß sind an allen Stellen, wo solches hat geschehen können, die Kapitel des „Systems" citirt, wo man über denselben Gegenstand nähere Aufschlüsse und weitere Untersuchungen finden kann.

Der Verfasser glaubt übrigens die „Anfangs-Gründe" der Differential- und Integral-Rechnung noch mit zu den „Elementen der Mathematik" zählen zu müssen; denn sie sind jetzt sehr leicht zu erlernen und am meisten geeignet, den Anfänger in den Regeln der gemeinen Buchstaben-Rechenkunst sicherer zu ma-

chen. Der Verfasser betrachtet daher diese Rechnungen gleichsam nur als eine Beispiel-Sammlung für den gemeinen Buchstaben-Rechner, und er möchte sie aus diesem Gesichtspunkte zunächst an allen Schulen getrieben sehen. Wird späterhin der Geist dieser Rechnungen herausgehoben, so sieht sich der Schüler zugleich auch für die wichtigen Anwendungen dieser Rechnungen befähigt; er kann nun auch „analytische Mechanik" treiben, ohne welche jetzt keine gründliche Physik, keine gründliche Astronomie mehr möglich ist *).

Möge aber der Lehrer nicht zuviel unterrichten; möge er nur jede neue Reihe von Untersuchungen hinsichtlich ihres Zweckes und der dazu vorhandenen Mittel mit wenigen kurzen Worten im Wesentlichen einleiten und übersichtlich machen, dann aber die Selbstthätigkeit der Schüler in möglichst hohem Grade in Anspruch nehmen, hie und da nur leise nachhelfend. Der Unterricht erscheint dann äußerlich allerdings meist nur als ein fortlaufendes Examinatorium, verbunden mit applikatorischen Uebungen; es ist dies aber viel-

*) Zum Studium der Mechanik (Statik und Dynamik) glaubt der Verfasser sein „Lehrbuch der Mechanik" in 3 Bänden. Berlin, Enslin 1836—38. empfehlen zu dürfen.

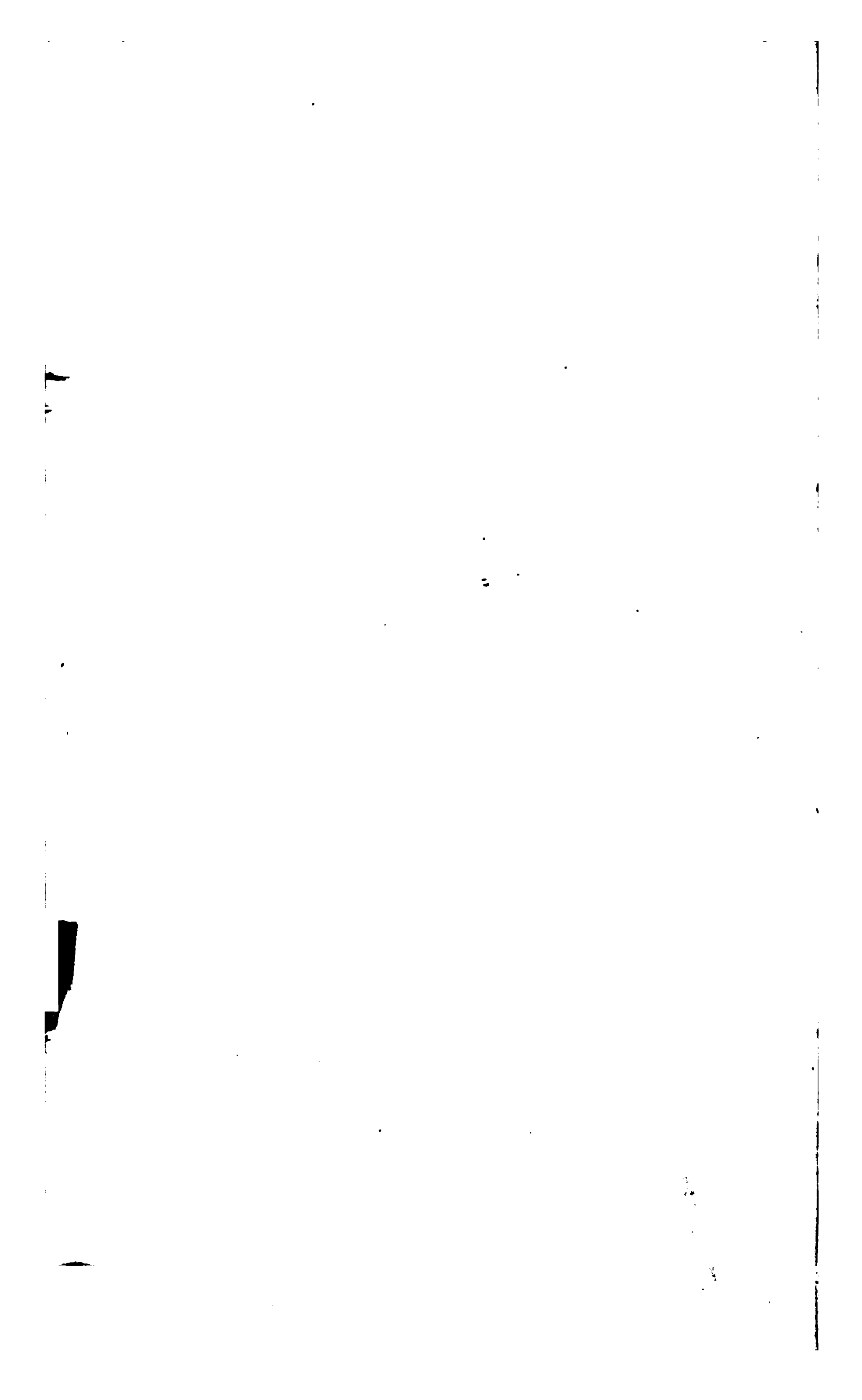
leicht der wahre mathematische Unterricht, wie er vorzugsweise vor jedem anderen selbst auf Universitäten gegeben werden kann, wenn auch an letzteren Anstalten gehörig modificirt.

Berlin, Ostern 1839.

M. Ohm.

Inhalt des ersten Bandes.

I. Algebra und Analysis des Endlichen.



Lehrbuch

der

gesammten höhern Mathematik

in zwei Bänden.

Zum Gebrauche für die oberen Klassen der Gymnasien und anderen höheren Lehr-Anstalten, so wie zum Selbstunterrichte

bearbeitet

und mit vielen Uebungs-Beispielen versehen

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie auch an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften correspond. Mitglied.

Erster Band,

Analysis des Endlichen oder höhere Algebra, die Elemente der höhern Geometrie, und die Differential-Rechnung nebst deren Anwendung enthaltend.

Leipzig 1839.

Bei Friedrich Volckmar.



Vorrede.

Der große und seltene Beifall, dessen sich das „Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht" Leipzig 1836 (2te Aufl. 1837) erfreut, läßt den Verfasser hoffen, daß das gegenwärtige, in demselben Sinn und Geist abgefaßte Werk ebenfalls dazu beitragen werde, das Studium der Mathematik zu erleichtern, zu beleben und allgemeiner zu machen. Es ist hier versucht worden, das „System der Mathematik" Berlin 1826—33 auf ohngefähr ein Sechstel des Raumes zusammen zu drängen; dagegen ist die gegenwärtige Arbeit selbständig durchgeführt und ein „Auszug" aus dem „System" um so weniger zu nennen, als von letzterem Werke erst 7 Theile erschienen sind, und der Verfasser bis jetzt vergebens nach Muße gestrebt hat, um auch die letztern 5 Theile dem

Drucke übergeben zu können. In gegenwärtiger Schrift mußte namentlich das Princip festgehalten werden, den Anfänger in die einzelnen Lehren gehörig ausführlich und gründlich einzuführen, also auch ausführlicher in den Entwickelungen und Beweisen zu seyn, dann aber das Weitere in großen, möglichst deutlichen und übersichtlichen Umrissen, und zuletzt nur die Resultate zu geben. So schmeichelt sich der Verfasser daß, während das Buch den Schülern höherer Klassen eben so wohl zur Wiederholung des Vortrags dient, als auch zum eigenen Arbeiten Veranlassung giebt, solches noch mit besonderem Nutzen zum Selbst-Studium gebraucht werden könne, von jedem, welcher nicht Gelegenheit hat, mündlichem Unterrichte beizuwohnen. Ueberdieß sind an allen Stellen, wo solches hat geschehen können, die Kapitel des „Systems" citirt, wo man über denselben Gegenstand nähere Aufschlüsse und weitere Untersuchungen finden kann.

Der Verfasser glaubt übrigens die „Anfangs-Gründe" der Differential- und Integral-Rechnung noch mit zu den „Elementen der Mathematik" zählen zu müssen; denn sie sind jetzt sehr leicht zu erlernen und am meisten geeignet, den Anfänger in den Regeln der gemeinen Buchstaben-Rechenkunst sicherer zu ma-

chen. Der Verfasser betrachtet daher diese Rechnungen gleichsam nur als eine Beispiel-Sammlung für den gemeinen Buchstaben-Rechner, und er möchte sie aus diesem Gesichtspunkte zunächst an allen Schulen getrieben sehen. Wird späterhin der Geist dieser Rechnungen herausgehoben, so sieht sich der Schüler zugleich auch für die wichtigen Anwendungen dieser Rechnungen befähigt; er kann nun auch „analytische Mechanik" treiben, ohne welche jetzt keine gründliche Physik, keine gründliche Astronomie mehr möglich ist *).

Möge aber der Lehrer nicht zuviel unterrichten; möge er nur jede neue Reihe von Untersuchungen hinsichtlich ihres Zweckes und der dazu vorhandenen Mittel mit wenigen kurzen Worten im Wesentlichen einleiten und übersichtlich machen, dann aber die Selbstthätigkeit der Schüler in möglichst hohem Grade in Anspruch nehmen, hie und da nur leise nachhelfend. Der Unterricht erscheint dann äußerlich allerdings meist nur als ein fortlaufendes Examinatorium, verbunden mit applikatorischen Uebungen; es ist dies aber viel-

*) Zum Studium der Mechanik (Statik und Dynamik) glaubt der Verfasser sein „Lehrbuch der Mechanik" in 3 Bänden. Berlin, Enslin 1836—38. empfehlen zu dürfen.

leicht der wahre mathematische Unterricht, wie er vorzugsweise vor jedem anderen selbst auf Universitäten gegeben werden kann, wenn auch an letzteren Anstalten gehörig modificirt.

Berlin, Ostern 1839.

M. Ohm.

Inhalt des ersten Bandes.

I. Algebra und Analysis des Endlichen.

Seite.

II. Die Elemente der analytischen Geometrie.

I.

Algebra und Analysis des Endlichen.

Erstes Kapitel.

Was hier aus der Elementar-Arithmetik vorausgesetzt wird.

§. 1.

Begrenzte Zeiten, begrenzte Räume und begrenzte Kräfte nennen wir Größen (quanta). — Die Stetigkeit der Zeit, des Raumes und der Kraft ist Ursache, daß wir diese Größen als benannte (ganze) Zahlen (quantitates) ausdrücken können; darum heißen letztere ebenfalls Größen; und darum erweitert man den Begriff „Größe" auf jede benannte Zahl.

Von der benannten Zahl abstrahiren wir die unbenannte (ganze) Zahl, (als das einfachere und allgemeinere) und ihre (abstrakte, absolute) Einheit. Die unbenannten (ganzen) Zahlen führen uns zu den Zahlen-Verbindungen (Operationen), durch welche (im Verstande) zwei Zahlen a und b zu einer dritten c verbunden gedacht werden. — Man betrachtet drei direkte Zahlen-Verbindungen, nämlich die Addition (angezeigt durch $a+b$), die Multiplikation (angezeigt durch $a \cdot b$ oder $a \times b$ oder ab) und das Potenziren (angezeigt durch a^b). — Jede dieser direkten Zahlen-Verbindungen hat dann zwei indirekte in ihrem Gefolge, je nachdem man von der dritten Zahl c und der ersten a zur zweiten Zahl b, oder von der dritten c und der zweiten b zur ersten Zahl a zurückkehrt. Die beiden der Addition entgegengesetzten Verbindungen fallen jedoch (wegen $a+b=b+a$) in eine einzige, die Subtraktion (angezeigt durch $c-b$ oder $c-a$) zusammen. — Eben so fallen die beiden, der Multiplikation entgegengesetzten Zahlen-Verbindungen in

eine einzige zusammen (wegen $a \cdot b = b \cdot a$), die wir Division nennen (angezeigt durch $\frac{c}{b}$ oder $c:b$, oder $\frac{c}{a}$ oder $c:a$). — Dagegen bleiben die beiden, dem Potenziren entgegengesetzten Zahlen-Verbindungen, die Radikation (angezeigt durch $\sqrt[b]{c}$) und die Logarithmation (angezeigt durch $\overset{a}{log}\, c$) wesentlich von einander getrennt und verschieden (und zwar deshalb, weil $a^b = b^a$ nicht ist) *). — Das angezeigte Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren und Logarithmiren ist der (in die äußern Sinne fallende) Repräsentant des gedachten, d. h. des wirklichen Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens, Potenzirens, Radicirens und Logarithmirens. — Die Worte: Summe $(a+b)$, Differenz $(a-b)$, Produkt $(a \cdot b)$, Quotient $\left(\frac{a}{b}\right)$, Potenz (a^b), Wurzel $(\sqrt[b]{a})$ und Logarithme $(\overset{b}{log}\, a)$, beziehen sich, soll nicht Verwirrung der Begriffe entstehen, bloß auf diese angezeigten Verbindungen, und nicht auf die Ausdrücke, in welche die ersteren noch umgeformt werden können **).

§. 2.

Rechnen kann man weder mit Größen, noch mit Zahlen, sondern nur mit Ausdrücken, d. h. nur mit angezeigten Zahlen-Verbindungen; denn: „Rechnen," im durchgrei-

*) Das gemeine Ziffern-Rechnen, so wie die sogenannte Buchstaben-Rechenkunst gehen später erst als Anwendungen der hier zu entwickelnden Begriffe und theoretischen Sätze hervor. Dort sieht man, daß das gemeine Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, u. s. w. mit Ziffern-Ausdrücken diese Namen mit Recht gar nicht verdienen, weil sie alle zusammen bloß ein Umformen sind der (im Gedanken) vorhandenen Ausdrücke.

**) So ist z. B. $5+3 = 4 \cdot 2 = 8$. Der Ausdruck $5+3$ ist nun eine Summe; der Ausdruck $4 \cdot 2$ ein Produkt und die Zahl 8, welche beiden gleich ist, darf weder Summe noch Produkt genannt werden, wenn nicht (bei dem Anfänger) eine Verwirrung der Begriffe entstehen soll.

fendsten Sinne des Wortes, ist nie etwas anderes, als ein Umformen gedachter, d. h. angezeigter, also wirklicher Ausdrücke *). — Diese Wahrheit kann der Anfänger im Kalkul, nicht fest genug sich einprägen, weil sie allein überall einen sichern Halt und sichere Richtung gewährt. Das folgende wird dies noch näher beleuchten.

§. 3.

Es stehen nämlich die 7 Zahlen-Verbindungen mit einander im bestimmten Zusammenhange, während die erstere, nämlich die Addition auf die Haupt-Eigenschaft sich stützt, daß in ihr die Elemente vertauscht werden können. Die Multiplikation hängt mit der Addition durch die Haupt-Eigenschaft zusammen, daß das Produkt $(a+b)c$ mit der Summe $ac+bc$ sich vertauschen lasse, während das Produkt ab selbst statt des andern ba gesetzt werden kann. Die Potenz hängt endlich mit der Summe und dem Produkte mittelst der Haupt-Eigenschaften zusammen, daß die Potenz a^{m+n} mit dem Produkte $a^m \cdot a^n$, und die Potenz $(ab)^m$ mit dem Produkte $a^m \cdot b^m$, endlich die Potenz $(a^m)^n$ mit der Potenz a^{mn} vertauscht werden darf. — Die vier indirekten Operationen dagegen stehen im reinen Gegensatze mit ihren direkten, und solcher ist ausgesprochen wörtlich in ihren Definitionen, und schematisch in den nachstehenden Formen:

$$(a-b)+b = a; \quad \frac{a}{b} \cdot b = a; \quad (\sqrt[b]{a})^b = a \text{ und } b^{(\overset{b}{\log} a)} = a,$$

wo das = Zeichen nichts weiter andeutet, als daß man mit

---

*) Sollen z. B. im gemeinen Rechnen die zwei Zahlen 647 und 928 zu einander addirt werden, so ist das Geschäft des Verbindens schon beendigt, so wie man an diese dritte Zahl denkt, die so viele Einheiten haben soll, als beide gegebenen Zahlen zusammen. Schreibt man nun 647+928, so hat man den Ausdruck durch welchen diese dritte Zahl völlig bestimmt ausgedrückt ist. Das Addiren ist nun auch für die äußern Sinne beendigt. — Jetzt kann man den Ausdruck nur noch umformen, und ihn in jede mögliche und gewünschte Form bringen, unter andern auch auf die Form 1575, d. h. nach Potenzen von 10 geordnet.

den Gesetzen der Operationen im Einklange handelt, wenn man die beiden links und rechts desselben stehenden Ausdrücke in der Rechnung nach Belieben mit einander vertauscht.

Sind aber diese Grund-Bedingungen des Zusammenhanges und der Gegensätze der Operationen unter sich, hingestellt, so lassen sich solche leicht mit einander combiniren, und dadurch sprechen sich dieselben immer in anderen und anderen Modifikationen, oder vielmehr in immer anderen Formen aus, namentlich auch in den für den Zweck der Anwendung ausreichenden Formen, nämlich:

I. Für die Addition und Subtraktion.

$\odot\ldots\quad a+b=b+a;\qquad (a-b)+b=a;$

1) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c);$

2) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)=a-(c-b);$

3) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c).$

II. Für die Multiplikation und Division.

$\odot\ldots\quad a.b=b\cdot a;\qquad (a:b)\cdot b=a;$

1) $(ab)c=(ac)b=a(bc);$

2) $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\cdot b=a\cdot\frac{b}{c}=a:\frac{c}{b};$

3) $\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{bc};$

4) $(a\pm b)c=ac\pm bc;\quad \frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c};$

5) $a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c}.$

III. Für das Potenziren, Radiciren und Logarithmiren mögen die Gesetze (Formeln) erst später hier stehen.

Diese Gleichungen oder Formeln bilden nun die Grundlage alles Rechnens. Das = Zeichen in ihnen hat keine andere Bedeutung, als daß man mit dem Wesen, d. h. mit dem Zusammenhange und den Gegensätzen der (Verstandes-) Operationen d. h. der Zahlen-Verbindungen, in Uebereinstimmung handelt, wenn man die beiden, links und rechts desselben (=) Zei-

chens stehenden Ausdrücke in der Rechnung nach Belieben mit einander vertauscht. Diese Gleichungen lehren also, welche neue Form statt der gegebenen oder vorhandenen gesetzt werden kann, wenn man fortwährend mit dem Wesen der Zahlen-Verbindungen im Einklange bleiben will; und dieses fortwährende Setzen neuer Formen statt der gegebenen ist nun das Umformen der Ausdrücke, welches einzig und allein das Rechnen (und zwar alles und jedes Rechnen, das gemeine Ziffern-Rechnen, das Buchstaben-Rechnen wie alles Rechnen, welches zur höhern Mathematik gezählt wird) ausmacht.

§. 4.

Soll das Rechnen alle Vortheile gewähren, welche die Anwendungen desselben nothwendig machen, so muß solches mit völlig unbekannten, einstweilen bloß durch einen einzigen Buchstaben oder sonst wie bezeichneten Ausdrücken eben so sicher von Statten gehen können, wie mit bekannten. Daher muß ein Rechnen (d. h. ein Umformen der Ausdrücke) statt finden können, ohne daß man sich um das Wesen (oder die Bedeutung) der einzelnen Theile der Ausdrücke weiter zu bekümmern braucht; und der Vortrag der Elemente hat daher die Aufgabe: „die Möglichkeit und die Sicherheit eines solchen Rechnens nachzuweisen." Wenn demnach die Zahlen-Verbindungen anfänglich bei den (ganzen) Zahlen wahrgenommen und von diesen abstrahirt worden sind, so müssen sie doch nachgehends selbstständig als Repräsentanten von allgemeinen Eigenschaften aufgefaßt werden. So entsteht zunächst die allgemeine Summe $a+b$, oder $a+b+c$, etc., etc., welcher die Eigenschaft postulirt wird, daß in ihr alle Elemente beliebig mit einander vertauscht werden können, — dann die allgemeine Differenz, deren Grund-Eigenschaft in der Gleichung $(a-b)+b=a$ ausgesprochen ist. Die Worte „addiren" und „subtrahiren" sind sogleich in der entsprechenden allgemeinern Bedeutung aufgefaßt, sobald man darunter wie Anfangs, das bloße Bilden (Hinschreiben) der

Summe $a+b$, oder der Differenz $a-b$ (d. h. der Zeichen oder Ausdrücke) versteht. — Aus diesen Elementen §. 3. I. ⊙ und N. 1.) setzen sich dann aber wiederum die übrigen Formeln der Addition und Subtraktion (ebendaselbst) zusammen, so daß ein „Rechnen" mit allgemeinen Summen und Differenzen völlig fest und sicher nachgewiesen und begründet ist.

§. 5.

So wie aber mit solchen allgemeinen Summen und Differenzen gerechnet wird, ohne daß man sich um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben oder sonstigen Ausdrücke zu bekümmern braucht, so entstehen in den Anwendungen, [in denen von (ganzen, unbenannten) Zahlen ausgegangen wird] besondere Fälle der Summen und Differenzen, namentlich Differenzen und Summen von der Form

$$p-p; \quad (p-p)-a \text{ und } (p-p)+a.$$

Da man findet, daß $p-p$ mit $z-z$ vertauscht werden kann, was auch z sey*) (und daß man dabei immer den Gesetzen der Operationen gemäß handelt), so bezeichnet man alle solche Differenzen $p-p$, $z-z$, etc., etc. durch ein und dasselbe Zeichen 0, welches Null ausgesprochen wird. Die beiden andern der obigen Ausdrücke werden dann einfacher so geschrieben, nämlich $0-a$ und $0+a$ und noch gewöhnlicher bloß so: $-a$ und $+a$, indem man die Null nicht schreibt, sondern sich bloß dazu denkt.

Die Zeichen 0 (d. h. die Null), und $-a$ und $+a$ sind also bloß kürzere Zeichen, welche statt angezeigter, d. h. vorhandener, also wirklicher Differenzen und Summen eingeführt werden, und mit denen man nach denselben (im §. 3.

---

*) Es ist nämlich nach dem Gesetze N. 2. des §. 3. I.)

$$(p-p)+z=(p+z)-p$$

also auch

$$=(z+p)-p=z;$$

also ist auch

$$p-p=z-z.$$

I. hingestellten) Gesetzen (Gleichungen, Formeln) rechnen kann *).

Die Ausdrücke —a und +a sind also nicht negative oder positive Größen, sondern nichts anders als angezeigte d. h. gedachte, mithin wirkliche Subtraktionen und Additionen, in welchen der Minuend oder der Summand 0 (Null) nicht geschrieben worden ist, aber gedacht werden muß, weil keine Differenz ohne Minuenden und keine Summe ohne mindestens zwei Summanden gedacht werden kann.

Solche Ausdrücke wie +a und —a sind daher allgemeine Ausdrücke, und werden additive und subtraktive genannt.

§. 6.

Wendet man die Gesetze des Rechnens im §. 3. I.) auf die Formen $a+(-b)$ und $a-(-b)$ an, so erhält man sogleich
1) $a+(-b)=a-b$ und 2) $a-(-b)=a+b$.

Das Resultat 1) benützt man nun, um jeden beliebigen, nach und nach durch fortgesetztes Addiren und Subtrahiren zusammengesetzten Ausdruck, z. B.

3)... $a-b-c+d+e-f-g$,

auf die Form einer gemeinen Summe

4)... $(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(+e)+(-f)+(-g)$

zu bringen, in welcher aber die Summanden lauter solche additive oder subtraktive Ausdrücke sind. — Dies ist ein sehr wichtiger Satz, denn er giebt sogleich die wichtigsten Regeln für das praktische Rechnen mit algebraischen Summen (zusammengesetzten Ausdrücken, wie die Ausdrücke von der Form 3) oder 4) gewöhnlich genannt werden).

---

*) Einige Resultate dieser Rechnung z. B. daß $0+a=a$, und $a-0=a$ ist, konnten bei materiellern Ansichten vom Addiren und Subtrahiren zu dem Wahne verleiten, daß die Null nichts sey. — Die Null ist aber wohl etwas. Wäre die Null nichts, oder wären die Ausdrücke +a oder —a „Größen", so könnte man nicht damit rechnen, weil man, der Definition des Rechnens zu Folge (§. 2.), nie mit Größen rechnen kann.

§. 7.

Vermöge der eben gedachten Sätze lassen sich nun alle und jede durch Addition und Subtraktion beliebig zusammengesetzten Ausdrücke, die aber ursprünglich den (ganzen) Zahlen ihr Daseyn verdanken, allemal auf die Form $\alpha - \beta$ bringen, wo α und β (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen, während α größer, gleich oder kleiner als β seyn kann. — Ist $\alpha > \beta$, so heißt die Form $+(\alpha - \beta)$, auf welche $\alpha - \beta$ gebracht werden kann, eine positive (ganze) Zahl; ist aber $\alpha < \beta$, so heißt die Form $-(\beta - \alpha)$, in welche dieselbe Differenz $\alpha - \beta$ ebenfalls umgeformt werden kann, eine negative (ganze) Zahl; während die (ganze) Zahl selbst auch eine abstrakte oder absolute (ganze) Zahl genannt wird, um sie von den so eben erwähnten Operationsformen (angezeigten Operationen) zu unterscheiden.

§. 8.

Geht man daher nun zu der Lehre der Multiplikation und Division über, so hat man darauf zu sehen, 1) daß das Produkt eine Bedeutung erhalte, während beide Faktoren solche Differenzen $\alpha - \beta$ zweier (ganzen) Zahlen sind, d. h. entweder positiv (ganz) oder negativ (ganz) oder Null; 2) daß die Grund-Eigenschaften der Produkte, nämlich $ab = ba$; $(ab)c = (ac)b = a(bc)$; ferner $(a+b)c = ac + bc$ statt finden, wenn a, b, c, beliebige solche positive oder negative (ganze) Zahlen oder Null sind. Dann erst kann man nämlich diese Grund-Eigenschaften der Produkte in abstrakto postuliren, und so die Produkte ganz allgemein auffassen, sobald man nicht mehr zu fürchten braucht, daß diese Postulate in irgend einem vorhandenen besonderen Falle einen Widerspruch enthalten. — Der Quotient $a:b$ wird allgemein genug aufgefaßt, wenn man seine Definition in der Formel $(a:b) \cdot b = a$ ausspricht, sobald man nur nachweist, daß er in jedem Falle nur eindeutig ist. — Dies ist er aber nicht, wenn der Divisor (b) der Null gleich ist. Folglich gehen hier die Regeln hervor: 1) „Nie durch Null zu dividiren", und:

2) „Wenn man durch irgend einen Ausdruck dividirt, allemal „den Fall auszunehmen, in welchem er der Null gleich werden „sollte". —

Die Begriffe des „Multiplicirens" und des „Dividirens" sind zuletzt eben so ganz allgemein aufgefaßt, sobald man unter diesen Worten jedesmal nichts weiter versteht, als das Bilden (das Hinschreiben) des Produkts oder des Quotienten (d. h. der angezeigten Verbindungen, der Formen), ganz so wie solches (im §. 4.) für die Worte „addiren" und „subtrahiren" bemerkt wurde.

§. 9.

Auf diese Weise ist ein „Rechnen" mit ganz allgemeinen Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten möglich und sicher, sobald man nur keinen der Divisoren der Null gleich seyn läßt, und die Fälle der Anwendung, in welchen einer derselben der Null gleich wird, besonders betrachtet, und nicht voraussetzt, daß auch diese Ausnahmsfälle in der allgemeinen Untersuchung mit enthalten seyn müssen.

Und in allen diesen Gesetzen, Formeln, Gleichungen, und wie sie noch genannt werden mögen, bedeutet das = Zeichen durchaus nichts anderes, als: daß man mit dem Grundwesen der Zahlen-Verbindungen in Uebereinstimmung handelt, wenn man die links und rechts desselben (=) Zeichens stehenden beiden Ausdrücke, welche in der Regel der Form nach von einander verschieden sind, unbedingt (in den Rechnungen) mit einander vertauscht. „Gleiche Ausdrücke", oder wie man auch sagt „Ausdrücke, welche einerlei Bedeutung haben", sind daher solche der Form nach verschiedene Ausdrücke (angezeigte Operationen), welche in Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Operationen für einander unbedingt gesetzt werden können. — So entsteht der Begriff von „Bedeutung eines Ausdruckes, d. h. „einer bloß angezeigten Operation."

§. 10.

I. Alle Endresultate der Rechnung mit den vier erstern Operationen, wenn man ursprünglich von (ganzen) Zahlen ausgegangen ist, lassen sich auf die Form $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ bringen, wo α, β, γ, δ wirkliche (ganze) Zahlen vorstellen, während $\gamma >$ oder $< \delta$, und $\alpha >$, $=$ oder $< \beta$ seyn kann. Dies giebt 5 besondere Formen, nämlich $+\mu$, $-\mu$, $+\frac{\mu}{\nu}$, $-\frac{\mu}{\nu}$ und 0 (Null), wo μ und ν wirkliche (ganze) Zahlen vorstellen, während $\frac{\mu}{\nu}$ keine (ganze) Zahl seyn soll, sondern eine bloße Form [d. h. eine angezeigte Division zweier (ganzen) Zahlen]. — Wir belegen diese 5 besonderen (Zahl-) Formen mit dem Namen der reellen Zahlen, und nennen jede einzeln namentlich „positive, negative „ganze Zahl, — positive, negative gebrochene Zahl, und „Null", während die bloße Form $\frac{\mu}{\nu}$ (also nicht $+\frac{\mu}{\nu}$, auch nicht $-\frac{\mu}{\nu}$) eine abstrakte oder absolute gebrochene Zahl heißt.

Ein Bruch, oder eine gebrochene (unbenannte) Zahl $\frac{\mu}{\nu}$, wie solche so eben eingeführt worden ist, ist daher nichts anders als eine angezeigte (d. h. eine gedachte, mithin eine wirkliche) Division zweier ganzen Zahlen μ und ν, unter der Voraussetzung, daß statt $\frac{\mu}{\nu}$ nicht selbst eine ganze Zahl gesetzt werden kann*). Mit diesen Brüchen oder gebrochenen Zahlen kann man aber gerade nur deshalb, weil sie nichts anders sind, auf eine ganz bestimmte Weise und zwar nach den Gesetzen des

*) Die gebrochene benannte Zahl erscheint später, und zwar als ein Theil der Benennung oder Einheit. Mit solchen benannten Zahlen wird aber nie „gerechnet", weil kein anderes „Rechnen" möglich ist, als mit bloß angezeigten Operationen (d. h. mit Formen).

§. 3. II.) „rechnen". — Eine besondere „Lehre der Brüche" ist dagegen ganz überflüssig, ja unmöglich.

II. Da die reellen Zahlen in der That weder Größen noch Zahlen sind, sondern bloße Rechnungs-Formen, so kann man auch nicht von ihrem Größer- oder Kleiner-Seyn (im eigenen Sinne der Worte) sprechen. — Sind aber zwei reelle Zahlen a und b gegeben, so läßt sich ihre Differenz $a-b$, wenn sie nicht Null ist (in welchem Falle $a=b$ wäre), entweder in eine positive oder in eine negative (ganze oder gebrochene) Zahl umformen. Im erstern Falle sagt man „a sey „größer als b"; im andern Falle heißt „a kleiner als b".

Andere Begriffe vom Größern und Kleinern können „in der Rechnung" nie vorkommen.

Nach diesen Begriffen kann man ächte und unächte Brüche von einander unterscheiden, auch Sätze von diesem sogenannten „Größern und Kleinern" feststellen und gelegentlich anwenden; namentlich: „Ist $a>b$, so ist $ac>bc$ und $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ nur wenn c positiv ist; dagegen ist gleichzeitig mit $a>b$ allemal $ac<bc$ und $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, so wie c negativ gedacht wird."

§. 11.

Während in der Elementar-Arithmetik die Begriffe der vier erstern Operationen in ihrer größten Allgemeinheit, und die Möglichkeit eines Rechnens mit denselben dergestalt hingestellt wird, daß man überzeugt ist, allemal richtige d. h. mit nichts im Widerspruch stehende Resultate zu erhalten, auch wenn man sich um die Bedeutung der einzelnen Elemente der Ausdrücke gar nicht bekümmert, so daß man mit noch unbekannten Ausdrücken mit derselben Leichtigkeit und Sicherheit rechnen kann, wie mit den bekannten, — ist es der Zweck der Analysis des Endlichen, genau dasselbe für die drei letztern Operationen zu leisten, d. h. ein allgemeines und doch sicheres „Rechnen" mit allen sieben Operationen möglich zu machen, oder die Möglich-

keit eines solchen Rechnens durch die Wirklichkeit desselben außer Zweifel zu stellen. — Es müssen zu dem Ende Potenzen a^b, Wurzeln $\sqrt[b]{a}$ und Logarithmen $\overset{b}{log}\, a$ festgestellt werden, welche für alle **reellen** Werthe von a und b (die reellen Zahlen enthalten nämlich alle speciellen **Zahl-Formen**, welche durch die völlig allgemeine Betrachtung der vier erstern Operationen entstanden sind) — eine völlig bestimmte Bedeutung haben, und für welche, diesen reellen Zahl-Formen gemeinschaftliche Grund-Eigenschaften dieser Potenzen, Wurzeln und Logarithmen nachgewiesen werden können. — Hernach kann man diese Grund-Eigenschaften (eben weil sie nun mit keiner speciellen Erscheinung in Widerspruch gerathen können) als **allgemeine** Eigenschaften der Potenzen, Wurzeln und Logarithmen für letztere drei, wenn sie ganz allgemein aufgefaßt werden sollen, postuliren, und so gelangt man zuletzt zu **ganz allgemeinen** Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, bei denen man sich um die Bedeutung ihrer einzelnen Elemente nicht mehr zu bekümmern braucht, während man doch sicher und nach bestimmten Gesetzen mit ihnen „rechnet", so daß das Rechnen gleiche Nothwendigkeit der Resultate mit sich führt, es mögen die Elemente der Rechnung lauter bekannte oder völlig unbekannte Ausdrücke enthalten. — Auf diese Weise haben wir den Zweck der in diesem Bande folgenden „Analysis des Endlichen" völlig bestimmt und entschieden festgestellt.

§. 12.

In den **Elementen** begnügt man sich aber einstweilen mit folgenden **Vorbereitungen**:

A. Man stellt den Begriff der **ganzen Potenz** a^b fest, wenn b positiv ganz ist, und versteht darunter ein **Produkt gleicher Faktoren**.

B. Man erweitert den Begriff von a^b für den Fall, daß b eine Differenz $\alpha-\beta$ zweier ganzen Zahlen ist, wo $\alpha >, =$ oder $< \beta$ seyn kann. Man nennt sie dann eine **Differenz-Potenz**

und versteht darunter einen Quotienten aus zweien solchen Produkten gleicher Faktoren.

C. Man stellt für diese Differenz-Potenzen, wie für die ganzen Potenzen die Formeln hin:

$$1)\ a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \qquad 3)\ (ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$2)\ a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}; \qquad 4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

$$5)\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

D. Man erweitert den Begriff der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ für den Fall, daß b positiv ganz, a dagegen positiv (oder absolut) ganz oder gebrochen ist. — Hier stößt man auf die sogenannte irrationale Zahl, d. h. auf eine gebrochene Zahl, die immer zwischen bestimmten Grenzen liegt, die aber deshalb nie herstellbar (d. h. ausdrückbar) ist, weil ihr Zähler und Nenner unendlich groß werden. Für diese absoluten (und immer eindeutig gedachten) Wurzeln stellt man nun die Gesetze hin:

$$1)\ \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}; \qquad 2)\ \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$

$$3)\ \sqrt[m]{(a^n)} = a^{\frac{n}{m}}; \qquad 4)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$5)\ a \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a^m \cdot b)}; \qquad 6)\ \frac{\sqrt[m]{b}}{a} = \sqrt[m]{\frac{b}{a^m}}.$$

E. Hernach stellt man den Begriff der Potenz a^b fest für den besondern Fall, daß b beliebig reell, a dagegen positiv (oder absolut) ganz oder gebrochen ist. Sie wird reelle Potenz genannt, weil jedesmal eine reelle und noch überdies positive (rationale oder irrationale) Zahl existirt, welche ihr gleich ist, d. h. welche „in der Rechnung" statt ihrer gesetzt werden kann. — Es ist nämlich nach diesen Definitionen

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(a^\mu)}; \quad \text{und} \quad a^{-\frac{\mu}{\nu}} = 1 : a^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Für diese Potenzen, (welche $a^0 = 1$ in sich schließen) wird die Gültigkeit der Formeln C. 1.—5.) auf's Neue nachgewiesen. — Auch diese reellen Potenzen sind immer nur eindeutig.

F. An diese reelle Potenz schließt sich dann der reelle Logarithme $\overset{b}{\log}\,a$ an, bei welchem a und b beide positiv vorausgesetzt werden, und welche die reelle (positive oder negative, ganze oder gebrochene) Zahl z (oder die Null) vorstellen, der die Eigenschaft zukommt, daß $b^z = a$ wird, während b^z die reelle Potenz (in E.) ist. — Für diese ebenfalls immer eindeutigen Logarithmen stellt man dann die Gesetze

1) $$\overset{c}{\log}(ab) = \overset{c}{\log}\,a + \overset{c}{\log}\,b;$$

2) $$\overset{c}{\log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{c}{\log}\,a - \overset{c}{\log}\,b;$$

3) $$\overset{c}{\log}(a^b) = b \cdot \overset{c}{\log}\,a;$$

4) $$\overset{c}{\log}(\sqrt[b]{a}) = \frac{\overset{c}{\log}\,a}{b};$$

5) $$\overset{b}{\log}\,a \cdot \overset{c}{\log}\,b = \overset{c}{\log}\,a \text{ oder } \overset{b}{\log}\,a = \frac{\overset{c}{\log}\,a}{\overset{c}{\log}\,b}.$$

hin. — Wenn in $\overset{b}{\log}\,a$, die Basis $b = 10$ ist, so nennt man den Logarithmen einen Brigg'schen, auch einen gemeinen. —

§. 13.

Solchergestalt hat man die Grundlage des „gemeinen Ziffern- und des gemeinen Buchstaben-Rechnens". Unter dem letztern versteht man eine beliebige erweiterte Anwendung der Gesetze der vier erstern Operationen zur beliebigen, oder einem gegebenen Zwecke entsprechenden, Umformung beliebig gegebener Ausdrücke, weshalb hier nichts weiter darüber zu sagen ist. Um die erstere hier näher zu bezeichnen bemerken wir:

Jede bestimmte ganze Zahl läßt sich durch eine Summe ausdrücken, welche nach Potenzen von zehn geordnet ist, sobald man

man nur eine Kenntniß der ersten neun Zahlworte und der neun Ziffern voraussetzt. Dadurch wird jede bestimmte Zahl, in so fern sie durch eine Reihe angezeigter (d. h. gedachter, mithin wirklicher) Verbindungen (d. h. Operationen) ausgedrückt wird (nach §. 3.) rechnungsfähig; d. h. mit dem sie repräsentirenden Ausdrucke kann man „rechnen", was mit ihr selbst nicht möglich ist. — Das Herstellen dieses Ausdrucks nennt man zählen. Will man im Schreiben dieses Ausdruckes die Erleichterung sich verschaffen, daß man die Potenzen von zehn als Faktoren und die Additions-Zeichen wegläßt, so kann man und muß man die 0 (Null) des §. 5.) zu Hülfe nehmen; und die 0 (Null) erscheint dann hier als Stellvertreter eines Gliedes, welches im wirklichen Ausdrucke ganz fehlt.

Man zeigt nun z. B. wie die Summe $87624+89$, die Differenz $87624-89$; das Produkt 87624×89, endlich der Quotient $\frac{87624}{89}$ in Summen umgeformt werden (vermöge der in den §§. 3. und 6. ausgesprochenen Gesetze), welche wiederum nach Potenzen von zehn geordnet sind. Dies sind dann die sogenannten vier Species der gemeinen Rechenkunst mit unbenannten Zahlen.

§. 14.

Ein Decimalbruch ist ein gewöhnlicher Bruch (§. 10.), dessen Nenner aber eine Potenz von 10 ist. Man rechnet mit ihm, wie mit gewöhnlichen Brüchen (nach §. 3. II.), nur daß man darauf sieht, daß die Endresultate immer wieder auf die Form eines Decimalbruches gebracht werden. — Daß man ihn kürzer schreibt, indem man den Nenner im Schreiben wegläßt und solchen sich bloß dazu denkt, vermehrt die Bequemlichkeit.

§. 15.

Das Wurzel-Ausziehen aus einer positiven ganzen oder gebrochenen Zahl findet dann keine Schwierigkeit, so wenig als die Berechnung eines reellen Logarithmen, nur daß namentlich

letztere einen ungeheuren Aufwand an Zeit und Mühe kostet, wenn man nicht, später erst bekannt werdende Eigenschaften der Logarithmen benützt, um diese Rechnungen selbst möglichst zu erleichtern. — Gewöhnlich setzt man berechnete Logarithmen-Tafeln voraus.

§. 16.

Die **Algebra** ist diejenige **Aufgabe der Arithmetik**, in welcher der durch x bezeichnete **Ausdruck** gesucht wird, der in einer gegebenen Gleichung unter x gedacht, oder statt x gesetzt werden muß, damit letztere selbst wirklich eine richtige (**identisch** genannte) Gleichung sey.

Allgemeiner aufgefaßt ist die **Algebra** diejenige **Aufgabe der Arithmetik**, in welcher n Ausdrücke gesucht werden, die man sich unter n Buchstaben x, y, z, etc., etc. vorgestellt denken, oder die man statt dieser letztern n Buchstaben setzen muß, damit n gegebene Gleichungen wirklich richtige, der Definition der Gleichung (im §. 9.) entsprechende (und jetzt **identisch** genannte) Gleichungen seyen. — Solche Gleichungen aber, in denen x allein, oder x und y (u. s. w. f.) nicht mehr jeden beliebigen, sondern nur ganz bestimmte Ausdrücke (**Werthe** genannt) vorstellen (welche letztere in der Regel aus den Gleichungen selbst bestimmt werden) heißen zum Unterschied der bisherigen eigentlichen, einzigen und **identisch** genannten Gleichungen, von denen sie nur dadurch abweichen, daß in ihnen nicht jeder einzelne Theil der (gleichen) Ausdrücke offen vorliegt, — **Bestimmungs-Gleichungen**, und diese werden in **algebraische** und **nicht algebraische** (letztere werden auch **transcendente** genannt) eingetheilt. — **Algebraisch** nennt man die Gleichungen, wenn sie in Bezug auf ihren Unbekannten x die Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc. etc.} = 0$$

annehmen können, während die Anzahl dieser Glieder beliebig, aber nicht unendlich groß seyn darf. — Eine Bestimmungs-

Gleichung auf diese Form bringen, heißt: „sie nach dem „Unbekannten x ordnen."

Diese geordneten algebraischen Gleichungen werden eingetheilt in einfache $a+bx=0$, oder höhere Gleichungen (quadratische, kubische, biquadratische, und Gleichungen vom n^{ten} Grade).

Die einfache algebraische Gleichung $a+bx=0$ heißt aufgelöst, wenn man aus ihr eine andere Gleichung $x=-\frac{a}{b}$ abgeleitet hat, in welcher x ganz isolirt steht. — Es fällt nämlich dann in die Augen, daß diese Gleichung in die richtige (identische) $-\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$ übergeht, so oft man statt x das setzt, was auf der andern Seite des = Zeichens schon steht. Also wird auch $a+bx=0$ eine richtige (identische) Gleichung, so oft man statt x denselben Ausdruck setzt.

§. 17.

Um eine quadratische Gleichung

$$A+Bx+Cx^2=0$$

allgemein auflösen zu können, muß man erst einen allgemeinern Begriff der Quadrat-Wurzel d. h. von $\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt{a}$ haben.

Wir verstehen aber unter der allgemeinen Quadrat-Wurzel $\sqrt{a}$ jeden Ausdruck z, welcher die Eigenschaft hat, daß $z^2=a$ oder $z^2-a=0$ wird. — Ist aber α ein solcher Ausdruck, also so, daß $\alpha^2=a$ wird, so geht die Gleichung $z^2-a=0$ sogleich in $z^2-\alpha^2=0$ d. h. in $(z-\alpha)(z+\alpha)=0$ über; und letztere läßt nun sehen, daß wenn $z=-\alpha$ gesetzt wird, dann der Gleichung $z^2=a$ auch noch genügt ist, daß es aber (außer $+\alpha$ und $-\alpha$) keine dritte Form mehr giebt, welche statt x gesetzt, dasselbe leisten könnte.

Für die allgemeine Quadrat-Wurzel $\sqrt{a}$, wie solche so eben eingeführt worden ist, existiren also immer zwei verschiedene und einander nicht gleiche Formen $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$,

welche die durch $\sqrt{a}$ im Allgemeinen ausgesprochene Eigenschaft mit einander gemein haben. Die allgemeine Quadrat-Wurzel $\sqrt{a}$ ist daher allemal zweideutig (besser gesagt: zweiförmig). — Ist a positiv, so sind $+\alpha$ und $-\alpha$ die beiden Werthe von $\sqrt{a}$, wenn α die im §. 12. D.) definirte absolute Wurzel $\sqrt{a}$ vorstellt. — Ist $a=0$, so sind beide Werthe von $\sqrt{a}$, nämlich $+0$ und -0 einander gleich und beide $=0$. — Ist endlich a negativ, so bleibt $\sqrt{a}$ doch eine angezeigte (d. h. eine gedachte, mithin eine wirkliche) Wurzel, welche ebenfalls in der doppelten Form $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ ausgedrückt werden kann, und welche gewöhnlich, obgleich unpassend, eine imaginäre Wurzel genannt wird.

Dabei ist wohl zu merken, daß allemal

$$\sqrt{-b}=\sqrt{b(-1)}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$$

ist, während, weil b positiv ist, $\sqrt{b}=\pm\beta$ gefunden werden kann, so daß allemal

$$\sqrt{-b}=\pm\beta\cdot\sqrt{-1}$$

gefunden wird. Dabei ist β eine absolute (ganze oder gebrochene, und im letztern Falle rationale oder irrationale) Zahl.

Die allgemeine quadratische Gleichung

$$a+bx+cx^2=0 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2=0$$

giebt nun, aufgelöst, ebenfalls für x zwei Werthe, von denen jeder die verlangte Eigenschaft hat, ohne daß solche (im Allgemeinen) einander gleich sind. Man findet nämlich *)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c},$$

*) Man setzt nämlich $x=y+z$, ordnet die aus $a+bx+cx^2=0$ dadurch hervorgehende Gleichung nach z, disponirt über y so, daß in der neuen, nach z geordneten Gleichung, der Koefficient von z^1 d. h. von z selbst, der Null gleich wird, und findet dann aus derselben Gleichung, welche jetzt die Form $4c^2\cdot z^2=b^2-4ac$ annimmt, zu dem so angenommenen Werth $y=-\frac{b}{2c}$ den Werth von z so dazu, daß $y+z=x$ wird.

und diese beiden Werthe von x sind beide reell und ungleich, wenn $b^2 > 4ac$; sie sind beide reell und gleich, wenn $b^2 = 4ac$; sie sind endlich beide imaginär, so oft $b^2 < 4ac$ ist, und wenn man imaginär jeden Ausdruck nennt, der nicht in eine reelle Zahl umgeformt werden kann. Im letztern Falle kann man die Werthe von x auch so schreiben, nämlich

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1},$$

wo $\sqrt{4ac - b^2}$ ihren absoluten Werth (§. 12. D.) vorstellt. — Diese imaginären Werthe von x nehmen also alle beide allemal die Form

$$p + q \cdot \sqrt{-1}$$

an, wo p und q reelle Zahlen sind.

Daß aber zwei Werthe von x existiren und nicht mehr als zwei, welche der quadratischen Gleichung $a + bx + cx^2 = 0$ genügen, konnte man auch daraus abnehmen, daß sich $a + bx + cx^2$, während x ganz allgemein und beliebig gedacht ist, allemal in zwei Faktoren, nämlich in $c(\alpha + x)(\beta + x)$ zerlegen läßt, von denen jeder nur x selbst enthält, während das Produkt, also der ihm gleiche Ausdruck $a + bx + cx^2$ nun offenbar allemal der Null gleich wird, es mag der Werth von x den einen Faktor $\alpha + x$, oder den andern Faktor $\beta + x$ zu Null machen.

§. 18.

Wir bezeichnen eine der Formen von $\sqrt{-1}$ ein für allemal durch i, so daß i immer als eine und dieselbe Form vorstellend angesehen wird. Dann hat man

$$i^2 = -1,\; i^3 = -i,\; i^4 = +1,\; i^5 = +i;\; i^6 = -1,$$
$$i^7 = -i,\; i^8 = +1,$$

und allgemein

$$i^{4n} = +1,\; i^{4n+1} = i,\; i^{4n+2} = -1,\; i^{4n+3} = -i.$$

Denkt man sich nun in dem Ausdrucke

$$p + q \cdot i$$

p und q beliebig reell, so stellt derselbe alle reellen Ausdrücke

vor, wenn $q = o$ gedacht wird, außerdem aber alle imaginären Ausdrücke, welche als Werthe des Unbekannten einer quadratischen Gleichung mit reellen Koefficienten, sich ergeben. — Addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt man aber zwei solche allgemein-numerische Ausdrücke $p+q\cdot i$ und $\alpha+\beta\cdot i$ zu, von, mit und durch einander, so kann man die Resultate immer wieder auf dieselbe Form bringen. Eben so nimmt die Quadrat-Wurzel aus $p+q\cdot i$ immer wieder dieselbe Form an. —

Um dies alles nachweisen zu können geht man von dem Satze aus, daß wenn

$$A+B\cdot i = P+Q\cdot i$$

unter der Voraussetzung gegeben ist, daß A, B, P und Q reelle Ausdrücke sind, dann allemal einzeln

$$A = P \quad \text{und} \quad B = Q$$

seyn müsse $\left(\text{weil sonst } i = \frac{P-A}{B-Q} \text{ d. h. reell werden würde}\right)$. — Für die angeführten Resultate erhält man dann:

1) $(p+q\cdot i)+(\alpha+\beta\cdot i) = (p+\alpha)+(q+\beta)\cdot i$;

2) $(p+q\cdot i)-(\alpha+\beta\cdot i) = (p-\alpha)+(q-\beta)\cdot i$;

3) $(p+q\cdot i)\cdot(\alpha+\beta\cdot i) = (p\alpha-q\beta)+(q\alpha+p\beta)\cdot i$;

4) $\dfrac{p+q\cdot i}{\alpha+\beta\cdot i} = \dfrac{p\alpha+q\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{q\alpha-p\beta}{\alpha^2+\beta^2}\cdot i$;

5) $\sqrt{p+q\cdot i} = x + z\cdot i$ *),

---

*) Das Resultat 4.) erhält man, entweder wenn man Zähler und Nenner mit $\alpha-\beta\cdot i$ multiplicirt, oder wenn man $\frac{p+q\cdot i}{\alpha+\beta\cdot i} = x+z\cdot i$ setzt, daraus
$p+q\cdot i = (\alpha x-\beta z)+(\beta x+\alpha z)\cdot i$, also $p = \alpha x-\beta z$ und $q = \beta x+\alpha z$ ableitet, und aus letzteren Gleichungen x und z berechnet.

Das Resultat 5.) erhält man dagegen aus der Gleichung $p+q\cdot i = (x+z\cdot i)^2 = (x^2-z^2)+2xz\cdot i$, welche in die beiden Gleichungen

$$p = x^2-z^2 \quad \text{und} \quad q = 2xz$$

zerfällt, aus denen z eliminirt und x gefunden wird. Man erhält für x vier Werthe, darunter zwei imaginare; die reellen nur behält man. Zu jedem Werth von x erhält man dann aus $z = \frac{q}{2x}$ einen Werth von z,

wo x und z aus den nachstehenden Gleichungen

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}} \text{ und } z = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}$$

berechnet werden, in welchen letzteren statt der innern Quadrat-Wurzel ihr positiver Werth, statt der äußern Quadrat-Wurzel aber beide positiven oder beide negativen Werthe genommen werden müssen, wenn q positiv ist; wo dagegen statt x der positive und statt z der negative, oder statt x der negative und statt z der positive Werth genommen werden muß, wenn q negativ seyn sollte *).

Daraus folgt zugleich, daß wenn in der quadratischen Gleichung $a + bx + cx^2 = 0$ die Koefficienten a, b, c beliebig reell oder imaginär, aber von der Form $p + q \cdot i$ seyn sollten, dann die Werthe des Unbekannten x ebenfalls von derselben Form $P + Q \cdot i$ werden, wo jedoch Q auch Null seyn kann.

Jeder aus wirklichen Zahlen bis jetzt direkt oder indirekt erhaltene Ausdruck läßt sich daher allemal auf die Form $P + Q \cdot i$ bringen, wo P und Q reell sind.

§. 19.

Eine allgemeine Auflösung der kubischen Gleichung

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0$$

ist nicht möglich, wenn man nicht vorher einen allgemeinern Begriff der Kubik-Wurzel, d. h. der dritten Wurzel $\sqrt[3]{a}$ hat.

Wir verstehen aber unter der allgemeinen Kubik-Wurzel $\sqrt[3]{a}$ jeden Ausdruck z, welcher die Eigenschaft hat, daß $z^3 = a$ oder $z^3 - a = 0$ wird. — Ist aber α ein solcher Ausdruck,

---

und zwar zu jedem reellen Werth von x auch einen reellen Werth von z. So erhält man für $\sqrt{p + q \cdot i}$ zwei Werthe von derselben Form.

*) Diese letztere Aufgabe und ihre Auflösung lassen zu gleicher Zeit sehen, wie die beiden Werthe (d. h. die beiden Formen) der allgemeinen Quadrat-Wurzel $\sqrt{a}$ aussehen, in dem Falle wo a imaginär aber von der Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ seyn sollte.

so daß $\alpha^3 = a$ wird, so geht die Gleichung $z^3 - a = 0$, in $z^3 - \alpha^3 = 0$, d. h. in

$$(z - \alpha)(z^2 + \alpha z + \alpha^2) = 0$$

über, so daß nicht bloß $z = \alpha$ ihr genügt, sondern auch die beiden Werthe von z ihr genügen, welche den andern Faktor zu Null machen, d. h. welche aus der Auflösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 + \alpha z + \alpha^2 = 0$$

hervorgehen, und welche so sind:

$$z = \alpha(-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) = \alpha(-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}),$$

wo $\sqrt{3}$ ihren absoluten Werth vorstellt.

Für die allgemeine Kubik-Wurzel $\sqrt[3]{a}$ existiren also immer drei (aber auch nicht mehr als drei) von einander verschiedene d. h. einander nicht gleiche Formen, welche durch die Produkte

$$1 \cdot \sqrt[3]{a}; \quad (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \cdot \sqrt[3]{a} \quad \text{und} \quad (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \cdot \sqrt[3]{a},$$

in welchen der Faktor $\sqrt[3]{a}$ als eine und dieselbe Form gedacht wird, vorgestellt sind, und welche die durch $\sqrt[3]{a}$ ausgesprochene Eigenschaft mit einander gemein haben. Dabei sind die ersten Faktoren dieser drei Formen der $\sqrt[3]{a}$, nämlich

$$1; \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

zu gleicher Zeit die drei Werthe der $\sqrt[3]{1}$. — Die allgemeine Kubik-Wurzel ist daher immer drei-deutig (oder besser drei-förmig).

Ist a positiv, so kann man die absolute Kubik-Wurzel, welche ebenfalls positiv ist, und durch α bezeichnet seyn mag, statt des einen Werthes von $\sqrt[3]{a}$ setzen (§. 12. D.). Dann sind also alle drei Werthe von $\sqrt[3]{a}$ bezüglich

$$\alpha; \quad -\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1},$$

so daß der erstere reell und positiv ist, die beiden andern aber

imaginär, jedoch von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ sind, wo p und q reelle Werthe vorstellen. —

Ist a negativ und $=-b$, und wird die absolute Kubik-Wurzel $\sqrt[3]{b}=\beta$ gefunden (nach §. 12. D.), so daß β eine positive Zahl ist, so sind die drei Werthe von $\sqrt[3]{a}$ dasmal bezüglich

$$-\beta;\quad \tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}\quad \text{und}\quad \tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1},$$

wo $\sqrt{3}$ jedesmal ihren absoluten Werth vorstellt, so daß der eine dieser drei Werthe reell und negativ, die beiden andern aber imaginär und von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ sind. — Ist $a=0$, so sind die drei Werthe von $\sqrt[3]{a}$, der Null gleich.

Die allgemeine Auflösung der reducirten kubischen Gleichung

$$z^3+pz+q=0$$

giebt für z:

$$z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}\ ^{*)},$$

wo jede dieser Kubik-Wurzeln drei Werthe hat, wo aber diejenigen Werthe beider Kubik-Wurzeln zusammen gehören, deren Produkt $=-\frac{1}{3}p$ ist. Man erhält also für z hieraus drei Werthe. — Diese Auflösung wird gewöhnlich die Cardan'sche Formel genannt. — So oft $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ positiv oder Null ist, so oft läßt sie sich ohne Weiteres in gewöhnliche Ziffern-Ausdrücke

*) Man findet diese, wenn man $z=u+v$ setzt, dadurch die neue Gleichung

$$u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$$

erhält, dann aber über den einen der beiden Unbekannten u und v so disponirt, daß

$$1)\quad 3uv+p=0$$

wird, und den andern dann aus der übrig bleibenden Gleichung

$$2)\quad u^3+v^3+q=0$$

dazu findet. Die beiden Gleichungen 1.) und 2.) geben nun u und v so, daß $u+v=z$ wird. Eliminirt man nämlich $v=-\frac{1}{3}\frac{p}{u}$, so erhält man

$$(u^3)^2+q(u^3)-\tfrac{1}{27}p^3=0,$$

woraus u^3 und u.

umformen und man erhält für z einen reellen und zwei imaginäre Werthe. — So oft aber $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negativ wird, so oft kann die Umformung in gewöhnliche d. h. allgemein-numerische Ziffern-Ausdrücke nur von demjenigen ausgeführt werden, welcher gelernt hat, die Wurzel $\sqrt[3]{p + q \cdot \sqrt{-1}}$ in einen Ausdruck von derselben Form $\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}$ umzuformen. — Letzteres zeigt gewöhnlich die Analysis des Endlichen. Diesen Fall nennt man übrigens den irreduciblen Fall der Cardan'schen Formel und er tritt nur dann, aber dann allemal ein, so oft alle drei Werthe des Unbekannten reell werden *).

Soll aber die allgemeine kubische Gleichung

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{d} + \frac{b}{d}x + \frac{c}{d}x^2 + x^3 = 0$$

aufgelößt werden, so setzt man $x = z - \frac{1}{3}\frac{c}{d}$ und die Gleichung reducirt sich sogleich auf die vorstehende

$$z^3 + pz + q = 0 \text{ **}).$$

Hat man aber aus der letzteren Gleichung drei Werthe für z gefunden, so giebt die Gleichung $x = -\frac{1}{3}\frac{c}{d} + z$ drei Werthe von x dazu.

Daß endlich für die kubische Gleichung im Allgemeinen drei Werthe und nicht mehr als drei Werthe des Unbekannten gefunden werden, konnte man schon daraus abnehmen, daß der Ausdruck $a + bx + cx^2 + dx^3$ sich auf die Form

$$d(\alpha + x)(\beta + x)(\gamma + x)$$

bringen läßt, und daher der Null gleich wird, so oft einer der

*) Dieses letztere wird gewöhnlich erst in der Analysis des Endlichen erwiesen, findet sich aber auch in dem nächsten Paragraphen außer Zweifel gesetzt.

**) Eigentlich muß man $x = z + u$ setzen, die neue Gleichung nach z ordnen, dann aber über u dergestalt disponiren, daß der Koefficient von z^2 der Null gleich wird. Dann findet man eben $u = -\frac{1}{3}\frac{c}{d}$.

drei Faktoren der Null gleich ist, also für $x = -\alpha$, $x = -\beta$ und auch für $x = -\gamma$.

§ 20.

Folgende Untersuchungen über die kubischen Gleichungen sind noch, der dabei angewandten Methoden und der Resultate wegen von großer Wichtigkeit.

I. Jede kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit reellen Koefficienten, giebt immer wenigsten einen reellen Werth für den unbekannten x.

Denn man kann x positiv und so groß nehmen, daß $x^3 + ax^2 + bx + c$ für diesen Werth $x = +w$ ganz gewiß positiv wird. Dann kann man aber auch x negativ, übrigens absolut so groß nehmen, daß $x^3 + ax^2 + bx + c$ für diesen Werth $x = -v$ ganz gewiß negativ wird. Da nun, wenn man die Werthe von x unmerklich ändert auch die Werthe des kubischen Ausdruckes $x^3 + ax^2 + bx + c$ ebenfalls nur unmerklich sich ändern, so muß zwischen $+w$ und $-v$ ein (positiver oder negativer, also reeller) Werth von x liegen, welcher denselben Ausdruck $x^3 + ax^2 + bx + c$ der Null gleich macht, weil der letztere vom Positiven zum Negativen nur in unmerklichen Aenderungen, also nur durch Null hindurch, gelangen kann.

II. Ist α der reelle Werth von x, welcher $x^3 + ax^2 + bx + c$ zu Null macht, d. h. ist (identisch)

$$(\male) \ldots \qquad \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$

so dividire man mit $x - \alpha$ in $x^3 + ax^2 + bx + c$ auf nachstehende Weise:

Divisor	Dividend	Quotient
$x - \alpha$	$x^3 + ax^2 + bx + c$	$x^2 + (a + \alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2)$

$$\begin{array}{l}
x^3 + ax^2 + bx + c \\
\underline{x^3 - \alpha x^2} \\
(a + \alpha)x^2 + bx + c \\
\underline{(a + \alpha)x^2 - (a\alpha + \alpha^2)x} \\
(b + a\alpha + \alpha^2)x + c \\
\underline{(b + a\alpha + \alpha^2)x - (b\alpha + a\alpha^2 + \alpha^3)} \\
\text{Rest} \ldots \quad c + b\alpha + a\alpha^2 + \alpha^3
\end{array}$$

Nun ist aber dieser letzte Rest vermöge der Gleichung ($\male$) der Null gleich; also ist $x^3 + ax^2 + bx + c$ durch $x - \alpha$ ohne Rest

theilbar und der Quotient wird $= x^2 + (a+\alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2)$. — Ist aber der Ausdruck $x^3 + ax^2 + bx + c$ in die beiden Faktoren

$$(x-\alpha)\cdot[x^2 + (a+\alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2)]\ ^{*)}$$

zerlegt, so wird solcher auch noch durch die beiden Werthe von x der Null gleich, welche den zweiten Faktor zu Null machen, d. h. welche aus der Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (a+\alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2) = 0,$$

die ebenfalls reelle Koefficienten hat, hervorgehen. — Die drei Werthe des unbekannten x in der kubischen Gleichung mit reellen Koefficienten, sind daher entweder alle drei reell, oder es ist nur einer derselben reell und die beiden andern sind imaginär, aber von der Form $P + Q\cdot i$. —

III. Sind p und q reell, so kann jeder der drei Werthe von $\sqrt[3]{p + q\cdot i}$ allemal auf dieselbe Form $x + z\cdot i$ gebracht werden, wo x und z reell sind.

Denn setzt man

$$\sqrt[3]{p + q\cdot i} = x + z\cdot i; \quad \text{also} \quad p + qi = (x + z\cdot i)^3$$

d. h. $\quad p + q\cdot i = (x^3 - 3xz^2) + (3x^2z - z^3)\cdot i$

also $\quad$ 1) $x^3 - 3xz^2 = p$

$\quad\quad$ 2) $3x^2z - z^3 = q$;

und eliminirt man zuletzt aus diesen beiden Gleichungen den Unbekannten z, so erhält man **)

---

*) Gewöhnlich bewirkt man diese Zerlegung noch einfacher. Da nämlich
$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$ der Null gleich
ist, so ändert der Ausdruck $x^3 + ax^2 + bx + c$ bloß seine Form, wenn man $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$ davon subtrahirt. Seine neue Form ist nun diese
$$(x^3 - \alpha^3) + a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha)$$
Da man nun jeden der drei Theile dieser jetzigen Form durch $x - \alpha$ bequem dividiren kann, so erhält man sogleich die obige Zerlegung.

**) Die Elimination bewirkt sich so: Aus der Gleichung 1.) findet man $z^2 = \frac{x^3 - p}{3x}$; dann schreibt man die Gleichung 2.) so: $(3x^2 - z^2)z = q$, und substituirt hier herein statt z^2 den vorher gefundenen Werth. Dies giebt
$$\frac{8x^3 + p}{3x}\cdot z = q \quad \text{oder} \quad z = \frac{3qx}{8x^3 + p}.$$

$$3)\quad (x^3)^3 + \tfrac{3}{4}p(x^3)^2 - (\tfrac{15}{64}p^2 + \tfrac{27}{64}q^2)\cdot x^3 - \tfrac{1}{64}p^3 = 0;$$

und diese Gleichung, da sie kubisch mit reellen Koefficienten ist, giebt für x^3 mindestens einen reellen Werth α, während aus $x^3 = \alpha$ auch noch für x ein reeller Werth hervorgeht. Zu diesem reellen Werthe von x geben aber die Gleichungen 1.) und 2.) einen reellen Werth von z dazu, so daß man nun

$$\sqrt[3]{p + q\cdot i} = x + z\cdot i$$

so gefunden hat, daß x und z reell sind.

Hat man aber einen Werth $x + z\cdot i$ der Kubik-Wurzel $\sqrt[3]{p+q\cdot i}$ gefunden, so erhält man die beiden andern, wenn man den so eben gefundenen mit den beiden andern Werthen der $\sqrt[3]{1}$, nämlich mit $-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i$ multiplicirt. Folglich nehmen diese beiden andern Werthe von $\sqrt[3]{p+q\cdot i}$ ebenfalls dieselbe Form $P + Q\cdot i$ an.

IV. Hat man gelernt die oben stehende Gleichung 2.), wenn p und q in Ziffern gegeben sind, auf irgend einem Näherungswege aufzulösen, und wollte man die etwas sehr mühsame Ziffern-Rechnung nicht scheuen, so könnte man nun die kardanische Formel, nämlich die Auflösung

$$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$, auch in dem Falle in die gewöhnlichen Ziffern-Ausdrücke umformen, in welchem $\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3$ negativ wird, und welchen man früher den irreduciblen Fall ge-

---

Dieser Werth von z wird nun in die Gleichung 1.) statt z substituirt, und man erhält die obige Gleichung 3.). — Und weil $z = \frac{3qx}{8x^3+p}$ seyn muß, so folgt auch noch, daß zu jedem reellen Werth von x allemal auch ein reeller Werth von z sich ergiebt. — Man kann aber auch aus der erstern Gleichung 1.) z finden und den Werth in die 2.) substituiren. Dann muß aber die entstehende Gleichung noch quadrirt werden, damit die Quadrat-Wurzel herausfällt. — Man kann endlich die Gleichung 2.) sogleich quadriren, so daß sie die nachstehende wird: $(3x^2 - z^2)^2\cdot z^2 = q^2$, und hier herein statt z^2 seinen Werth $\frac{x^3-p}{3x}$ substituiren. Dies ist dann das allerkürzeste.

nannt hat. — Man würde nämlich zuerst die absolute Wurzel $\sqrt{-(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=\beta$ berechnen (d. h. in die gewöhnliche Ziffern-Rechnungsform bringen), so daß man

$$z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\beta\cdot i}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\beta\cdot i}$$

hätte; hernach würde man (nach III.) jede der beiden Kubikwurzeln auf die Form $u+v\cdot i$ bringen, und dann die beiden Resultate addiren, um z in derselben Form $P+Q\cdot i$ zu haben.

Und da diese beiden Kubikwurzeln sich durch nichts unterscheiden, als dadurch, daß in der andern $-i$ steht, wo in der erstern i, so wird, wenn $u+v\cdot i$ ein Werth der einen Kubikwurzel ist, nothwendig $u-v\cdot i$ (während u und v dieselben Werthe behalten) ein Werth der andern Kubikwurzel seyn, und diese beiden Werthe sind auch allemal die zusammengehörigen Werthe dieser Kubikwurzeln, weil beide mit einander multiplicirt (nach §. 19.) den reellen Werth $-\frac{1}{3}p$ geben müssen. Also hat man $z=2u$, und u hat drei reelle Werthe. Folglich sind auch dasmal alle drei Werthe von z reell, während wir oben gesehen haben, daß wenn $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ positiv oder 0 ist, dann allemal nur ein reeller und zwei imaginäre Werthe von z existiren.

V. Man kann aber nun, wenn man dieselben mühsamen Ziffern-Rechnungen nicht scheuen wollte, die Umformung der Auflösung der reducirten kubischen Gleichung

$$z^3+pz+q=0$$

in die gewöhnlichen Ziffernformen auch in dem Falle bewirken, wo p und q imaginär oder reell aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind. Man würde nämlich $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ in derselben Form $P+Q\cdot i$ finden, dann $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{P+Q\cdot i}$ (nach §. 18. N. 5.) auf dieselbe Form bringen, und so die Ausdrücke unter den beiden Kubikwurzel-Zeichen in der Cardan'schen Formel ebenfalls in die Form $\alpha+\beta i$ und $\alpha'+\beta'\cdot i$ gießen, zuletzt aber $\sqrt[3]{\alpha+\beta\cdot i}=\gamma+\delta\cdot i$ und $\sqrt[3]{\alpha'+\beta'\cdot i}=\gamma'+\delta'\cdot i$ (nach III.)

finden, wo γ und δ, desgleichen γ' und δ' drei Werthe haben; und dann würde man, wenn $\gamma'+\delta'\cdot i$ den zu $\gamma+\delta\cdot i$ gehörigen Werth vorstellt (d. h. wenn $(\gamma+\delta\cdot i)(\gamma'+\delta'\cdot i)=-\frac{1}{3}p$ wird, wo aber p selbst imaginär gegeben seyn kann)

$$z=(\gamma+\gamma')+(\delta+\delta')\cdot i$$

gefunden haben.

VI. Daraus folgt aber, daß in jeder reducirten und daher auch in jeder allgemeinen kubischen Gleichung, deren Koefficienten reell oder imaginär aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind, die drei Werthe des Unbekannten allemal nothwendig auch auf dieselbe Form $P'+Q'\cdot i$ gebracht werden können.

Alle Ausdrücke, welche bis jetzt aus wirklichen Zahlen zusammengesetzt gegeben sind, und zwar beliebig direkt, oder indirekt durch quadratische oder kubische Gleichungen, lassen sich daher nothwendig allemal auf die Form $P+Q\cdot i$ bringen, so daß sie reell sind, (wenn $Q=0$ gefunden wird) oder doch diese einfache imaginäre Form haben (wenn Q nicht Null ist).

VII. Die Rechnung in III.), von welcher alle nachfolgenden Rechnungen abhängen, führt sich aber viel bequemer aus, wenn man Lehren der Analysis des Endlichen zu Hülfe nimmt. Mittelst der letztern findet man nämlich eben so bequem als einfach, wenn m irgend eine absolute (positive) ganze Zahl ist, m einander nicht gleiche Ausdrücke von der Form $\alpha+\beta\cdot i$, wo jeder die Eigenschaft hat, daß er, mit m potenzirt, genau eine und dieselbe gegebene (reelle oder imaginäre) Zahl $p+q\cdot i$ hervorbringt. Dann hat man also allgemein m Werthe der m^{ten} Wurzel $\sqrt[m]{p+q\cdot i}$ gefunden, wenn letztere so allgemein aufgefaßt wird, während aus andern Betrachtungen noch hervorgeht, daß es nicht mehr als gerade m Ausdrücke geben kann, welchen dieselbe Eigenschaft zukommt. Folglich hat man dann zu gleicher Zeit alle Werthe von $\sqrt[m]{p+q\cdot i}$ (vgl. Kap. VIII.).

§. 21.

Eine allgemeine Auflösung der biquadratischen Gleichung
$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$$

ist nicht möglich, wenn nicht vorher der Begriff der $\sqrt[4]{a}$ erweitert und verallgemeinert wird.

Wir verstehen aber unter der allgemeinen vierten Wurzel aus a, d. h. unter $\sqrt[4]{a}$, jeden Ausdruck z, der die Eigenschaft hat, daß $z^4=a$ oder $z^4-a=0$ wird. — Ist daher α ein solcher Ausdruck, so daß man $\alpha^4=a$ hat, so geht die Gleichung $z^4-a=0$ in $z^4-\alpha^4=0$ d. h. in $(z^2-\alpha^2)(z^2+\alpha^2)=0$ oder in $(z-\alpha)(z+\alpha)(z-\alpha\cdot\sqrt{-1})(z+\alpha\cdot\sqrt{-1})=0$ über und läßt nun sehen, daß vier und nicht mehr als vier einander nicht gleiche Ausdrücke existiren, welche mit dem erstern α dieselbe Eigenschaft gemein haben; nämlich die vier Ausdrücke

$$\alpha\cdot(+1);\quad \alpha\cdot(-1);\quad \alpha\cdot(+\sqrt{-1}) \text{ und } \alpha\cdot(-\sqrt{-1})$$

während $+1$; -1; $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ die vier Werthe von $\sqrt[4]{1}$ sind. — Es ist also die $\sqrt[4]{a}$ allemal vierdeutig oder besser vierförmig; und diese vier Formen sind im Allgemeinen ausgedrückt durch

$$+\sqrt[4]{a},\quad -\sqrt[4]{a},\quad +\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1} \text{ und } -\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1},$$

wenn in den letztern vier Ausdrücken der Faktor $\sqrt[4]{a}$ als eindeutig genommen wird, d. h. als einen und denselben seiner Werthe vorstellend.

Ist a positiv, so kann man statt $\sqrt[4]{a}$ die absolute Wurzel (§. 12. D.) nehmen; dann sind also zwei Werthe der allgemeinen $\sqrt[4]{a}$ reell (der eine positiv, der andere negativ), die beiden andern dagegen imaginär und von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, wobei aber dasmal $p=0$ und q positiv oder negativ ist. — Ist a negativ, und $=-b$, so kann man statt der $\sqrt[4]{a}$ d. h. statt

statt der $\sqrt[4]{(-b)}$ setzen $\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[4]{-1}$. — Findet man nun (nach §. 12. D.) die absolute $\sqrt[4]{b}=\beta$, wo β positiv ist, so hat man $\beta\cdot\sqrt[4]{-1}$ für einen der Werthe von $\sqrt[4]{a}$. Den Ausdruck $\sqrt[4]{-1}$ kann man aber wieder auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ bringen. Setzt man nämlich

$$\sqrt[4]{-1}=w, \text{ so hat man } w^4=-1 \text{ oder } w^4=i^2$$

d. h. $\quad w^4-i^2=0, \quad$ oder $\quad (w^2-i)(w^2+i)=0$

so daß $\quad w=+\sqrt{i}$

wird, wenn man nur einen Werth von w haben will. Die Formel §. 18. N. 5.) giebt aber nun, wenn daselbst $p=0$ und $q=1$ gesetzt wird,

$$\sqrt{i}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i.$$

Ist also a negativ und $=-b$, und wird $\sqrt[4]{b}=\beta$ berechnet, wo β positiv ist, so finden sich die vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ jetzt so:

$$\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i; \quad -\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i;$$
$$-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i; \quad +\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i;$$

mithin alle vier imaginär aber von der Form $P+Q\cdot i$. —

Ist $a=0$, so sind alle vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$, $=0$. Ist a reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$, so hat $\sqrt{a}$ allemal zwei Werthe, welche beide reell, oder beide imaginär, aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind. Weil man aber der Gleichung $z^4=a$, die Form $z^4=(\sqrt{a})^2$, oder $z^4-(\sqrt{a})^2=0$ oder $(z^2-\sqrt{a})(z^2+\sqrt{a})=0$ geben kann, so folgt, daß man alle vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ auch findet, wenn man von jedem der beiden Werthe der $\sqrt{a}$ nochmals die allgemeine Quadrat-Wurzel nimmt. — Daraus folgt noch, daß die vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ allemal reell oder imaginär, aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind, so oft a selbst reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$ ist.

Will man nun die reducirte biquadratische Gleichung

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

allgemein auflösen, so zerlegt man den Ausdruck $z^4 + pz^2 + qz + r$ zuerst in die beiden Faktoren $(z^2 + \alpha z + \beta)(z^2 - \alpha z + \gamma)$. — Multiplicirt man nämlich letztere beiden, so erhält man

$$z^4 + (\beta + \gamma - \alpha^2)z^2 + \alpha(\gamma - \beta)z + \beta\gamma;$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit dem gegebenen, so hat man

$$\beta + \gamma - \alpha^2 = p, \quad \alpha(\gamma - \beta) = q \quad \text{und} \quad \beta\gamma = r.$$

Findet man nun aus den beiden erstern dieser drei Gleichungen

$$2\beta = \alpha^2 + p - \frac{q}{\alpha} \quad \text{und} \quad 2\gamma = \alpha^2 + p + \frac{q}{\alpha},$$

und substituirt man diese Werthe von β und γ in die dritte Gleichung $4\beta\gamma = 4r$, so erhält man zur Bestimmung von α die Gleichung

$$(\alpha^2 + p)^2 - \frac{q^2}{\alpha^2} = 4r \text{ od. } (\alpha^2)^3 + 2p(\alpha^2)^2 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist, wenn man α^2 als den Unbekannten ansieht, eine kubische; sie giebt für α^2 drei, also für α selbst 6 Werthe, während zu jedem Werth von α ein Werth von β und ein Werth von γ sich ergiebt. Dabei sind diese Werthe von α, β, γ allemal reell oder imaginär, aber von der Form $p + q \cdot i$ (den früheren Paragraphen zu Folge). — Nimmt man nun für α einen seiner Werthe und für β und γ die zugehörigen, so findet man die Werthe von z, welche der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ angehören, wenn man die Werthe von z sucht, welche jeden der beiden Faktoren dieses Ausdruckes zu Null machen, d. h. welche aus der Auflösung der Gleichungen

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \quad \text{und} \quad z^2 - \alpha z + \gamma = 0$$

für z hervorgehen. Man erhält demnach vier Werthe von z, welche jedoch alle vier nothwendig von der Form $p + q \cdot i$ werden, wo p und q reell sind, wo auch q der Null gleich werden

kann, so daß diese Werthe von z zum Theil oder alle auch reell seyn können *).

Soll aber die allgemeine Gleichung vom vierten Grade
$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$$
aufgelöst werden, so setzt man
$$x=-\tfrac{1}{4}\frac{d}{e}+z,$$
substituirt diese Form statt x in die gegebene Gleichung, ordnet die neue Gleichung nach z und erhält eine reducirte Gleichung vom vierten Grade, deren Auflösung so eben gezeigt worden ist. **) — Es finden sich also vier Werthe für z, und dann, wenn zu jedem derselben $-\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{e}$ addirt wird, auch vier Werthe von x, welche letztere der gegebenen allgemeinen biquadratischen Gleichung genügen.

Auch diese letztern vier Werthe sind alle reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$, sobald nur a, b, c, d, e reell oder imaginär, aber von derselben Form sind.

§. 22.

Eine allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen vom fünften und höhern Grade in geschlossener endlicher Form

---

*) Der Grund, warum sechs Werthe von α, β, γ sich ergeben, kann nur darin gesucht werden, daß
$$z^4+pz^2+qz+r$$
in vier einfache Faktoren von der Form
$$(z+a)(z+b)(z+c)(z+d)$$
sich zerlegt. Je zwei derselben mit einander multiplicirt, geben einen doppelten Faktor von der Form $z^2+\alpha z+\beta$. Also kann $z^2+\alpha z+\beta$ jedes der sechs Produkte $(z+a)(z+b)$, $(z+a)(z+c)$, $(z+a)(z+d)$, $(z+b)(z+c)$, $(z+b)(z+d)$, $(z+c)(z+d)$ vorstellen, und deshalb hat auch α die sechs verschiedenen Werthe $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ und $c+d$. Irgend einer der Werthe genügt aber.

**) Eigentlich muß man $x=u+z$ setzen, die neue Gleichung nach z ordnen, dann aber über u dergestalt disponiren, daß der Koefficient von z^3, nämlich $4eu+d$, der Null gleich wird. Dies giebt dann $u=-\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{e}$.

ist bis jetzt noch nicht nachgewiesen worden. Sind aber die Koefficienten in Ziffern gegeben, so nennt man die Gleichungen nicht mehr allgemeine sondern numerische, und solche löst man, wie wir in einem der folgenden Kapitel zeigen werden, von allen Graden Versuchs- und Näherungs-Weise auf.

Uebrigens ist es wichtig festzuhalten, daß alle direkten Ausdrücke, wie alle indirekten (welche man nämlich für die Unbekannten in einer quadratischen, kubischen oder biquadratischen Gleichung erhalten kann), also alle bis jetzt möglicher Weise hervorgehenden Ausdrücke, sobald sie ihre ursprüngliche Entstehung den wirklichen Zahlen verdanken, allemal und nothwendig von der Form $p + q \cdot i$ sind, wo p und q reelle Werthe vorstellen, und wo p sowohl als namentlich q auch der Null gleich seyn können.

§. 23.

Für das praktische Rechnen mit allgemeinen Quadrat-, Kubik- und vierten Wurzeln gilt aber, wie überhaupt für das Rechnen mit allen mehrdeutigen Ausdrücken, die wichtige Regel: „ein „und dasselbe Zeichen z. B. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, nicht eher für einen „und denselben Ausdruck zu nehmen, als bis man sich überzeugt „hat, daß es auch wirklich jedesmal einen und denselben seiner „Werthe vorstelle." — Die theilweise Vernachlässigung dieser Regel von Seiten unserer größten Analysten ist vorzüglich Ursache gewesen der Irrthümer und allgemein ungültigen Resultate, welchen wir hie und da in ihren Schriften begegnen (Vergl. Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik. Berlin 1823.).

§. 24.

Um dieses Gemälde der hier vorausgesetzten Elemente zu beschließen, betrachten wir noch die Möglichkeit der Anwendung dieser Lehren der Elementar-Arithmetik und Elementar-Algebra (also auch des höhern Kalkuls) — zur Vergleichung der Größen, wenn die Arithmetik oder Analysis selbst es auch nie

mit Größen, sondern immer nur mit angezeigten Operationen (mit Ausdrücken, d. h. mit bloßen Rechnungs-Formen) zu thun hat.

Alle benannten Zahlen (Größen, quantitates) sind ursprünglich ganze benannte Zahlen, können aber (durch Multiplikation der unbenannten Zahl) auf niedrigere und (durch Division der unbenannten Zahl) auf höhere Einheiten gebracht werden. Wenn man nun dieses letztere Verfahren allgemein und auch dann noch statt finden läßt, wenn die Division keine ganze Zahl mehr giebt, sondern bloß angezeigt werden kann, so daß eine gebrochene (unbenannte) Zahl entsteht (im Sinne des §. 10.), so ist dies die Veranlassung, die gebrochene benannte Zahl $\frac{a}{b}E$, wo E die Benennung oder Einheit ist, einzuführen und die Größe darunter zu verstehen, welche b mal genommen die benannte Zahl aE giebt. — Danach hat die gebrochene benannte Zahl $\frac{a}{b}E$ auch die Bedeutung des afachen von dem b^{ten} Theile der Einheit E, in allen den Fällen, wo die Einheit E stetig, oder doch sonst durch b theilbar ist.

Uebrigens lassen sich Größen (zwei oder mehrere) in eine einzige zusammenfassen, oder man kann auch eine Größe von der andern wegnehmen. Soll dann in jedem dieser beiden Fälle die neue Größe wiederum als benannte Zahl ausgedrückt werden, so wird man die gegebenen Größen auf einerlei Benennung bringen, dann aber die unbenannten Zahlen zu einander addiren oder von einander subtrahiren, die Benennung dagegen beibehalten.

Eine Größe läßt sich vervielfältigen, auch theilen. Soll dann in jedem der beiden Fälle die neu entstandene Größe als benannte Zahl ausgedrückt werden, so wird man die unbenannte Zahl multipliciren oder dividiren, die Benennung dagegen beibehalten.

Zwei Größen (Quanta) sind einander gleich, wenn sie

theilbar und der Quotient wird $= x^2 + (a + \alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2)$. — Ist aber der Ausdruck $x^3 + ax^2 + bx + c$ in die beiden Faktoren

$$(x - \alpha) \cdot [x^2 + (a + \alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2)]\ ^{*})$$

zerlegt, so wird solcher auch noch durch die beiden Werthe von x der Null gleich, welche den zweiten Faktor zu Null machen, d. h. welche aus der Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (a + \alpha)x + (b + a\alpha + \alpha^2) = 0,$$

die ebenfalls reelle Koefficienten hat, hervorgehen. — Die drei Werthe des unbekannten x in der kubischen Gleichung mit reellen Koefficienten, sind daher entweder alle drei reell, oder es ist nur einer derselben reell und die beiden andern sind imaginär, aber von der Form $P + Q \cdot i$. —

III. Sind p und q reell, so kann jeder der drei Werthe von $\sqrt[3]{p + q \cdot i}$ allemal auf dieselbe Form $x + z \cdot i$ gebracht werden, wo x und z reell sind.

Denn setzt man

$$\sqrt[3]{p + q \cdot i} = x + z \cdot i; \quad \text{also} \quad p + qi = (x + z \cdot i)^3$$

d. h. $\quad p + q \cdot i = (x^3 - 3xz^2) + (3x^2z - z^3) \cdot i$

also $\quad$ 1) $x^3 - 3xz^2 = p$

$\quad$ 2) $3x^2z - z^3 = q$;

und eliminirt man zuletzt aus diesen beiden Gleichungen den Unbekannten z, so erhält man **)

---

*) Gewöhnlich bewirkt man diese Zerlegung noch einfacher. Da nämlich

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c \text{ der Null gleich}$$

ist, so ändert der Ausdruck $x^3 + ax^2 + bx + c$ bloß seine Form, wenn man $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$ davon subtrahirt. Seine neue Form ist nun diese

$$(x^3 - \alpha^3) + a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha)$$

Da man nun jeden der drei Theile dieser jetzigen Form durch $x - \alpha$ bequem dividiren kann, so erhält man sogleich die obige Zerlegung.

**) Die Elimination bewirkt sich so: Aus der Gleichung 1.) findet man $z^2 = \frac{x^3 - p}{3x}$; dann schreibt man die Gleichung 2.) so: $(3x^2 - z^2)z = q$, und substituirt hier herein statt z^2 den vorher gefundenen Werth. Dies giebt

$$\frac{8x^3 + p}{3x} \cdot z = q \quad \text{oder} \quad z = \frac{3qx}{8x^3 + p}.$$

$$3)\quad (x^3)^3 + \tfrac{3}{4}p(x^3)^2 - (\tfrac{15}{64}p^2 + \tfrac{27}{64}q^2)\cdot x^3 - \tfrac{1}{64}p^3 = 0;$$

und diese Gleichung, da sie kubisch mit reellen Koefficienten ist, giebt für x^3 mindestens einen reellen Werth α, während aus $x^3 = \alpha$ auch noch für x ein reeller Werth hervorgeht. Zu diesem reellen Werthe von x geben aber die Gleichungen 1.) und 2.) einen reellen Werth von z dazu, so daß man nun

$$\sqrt[3]{p + q\cdot i} = x + z\cdot i$$

so gefunden hat, daß x und z reell sind.

Hat man aber *einen* Werth $x + z\cdot i$ der Kubik-Wurzel $\sqrt[3]{p+q\cdot i}$ gefunden, so erhält man die beiden andern, wenn man den so eben gefundenen mit den beiden andern Werthen der $\sqrt[3]{1}$, nämlich mit $-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i$ multiplicirt. Folglich nehmen diese beiden andern Werthe von $\sqrt[3]{p+q\cdot i}$ ebenfalls dieselbe Form $P + Q\cdot i$ an.

IV. Hat man gelernt die oben stehende Gleichung 2.), wenn p und q in Ziffern gegeben sind, auf irgend einem Näherungswege aufzulösen, und wollte man die etwas sehr mühsame Ziffern-Rechnung nicht scheuen, so könnte man nun die kardanische Formel, nämlich die Auflösung

$$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$, auch in dem Falle in die gewöhnlichen Ziffern-Ausdrücke umformen, in welchem $\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3$ negativ wird, und welchen man früher den irreduciblen Fall ge-

---

Dieser Werth von z wird nun in die Gleichung 1.) statt z substituirt, und man erhält die obige Gleichung 3.). — Und weil $z = \dfrac{3qx}{8x^3 + p}$ seyn muß, so folgt auch noch, daß zu jedem *reellen* Werth von x allemal auch ein *reeller* Werth von z sich ergiebt. — Man kann aber auch aus der erstern Gleichung 1.) z finden und den Werth in die 2.) substituiren. Dann muß aber die entstehende Gleichung noch quadrirt werden, damit die Quadrat-Wurzel herausfällt. — Man kann endlich die Gleichung 2.) sogleich quadriren, so daß sie die nachstehende wird: $(3x^2 - z^2)^2\cdot z^2 = q^2$, und hier herein statt z^2 seinen Werth $\dfrac{x^3 - p}{3x}$ substituiren. Dies ist dann das allerkürzeste.

nannt hat. — Man würde nämlich zuerst die absolute Wurzel $\sqrt{-(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=\beta$ berechnen (d. h. in die gewöhnliche Ziffern-Rechnungsform bringen), so daß man

$$z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\beta\cdot i}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\beta\cdot i}$$

hätte; hernach würde man (nach III.) jede der beiden Kubikwurzeln auf die Form $u+v\cdot i$ bringen, und dann die beiden Resultate addiren, um z in derselben Form $P+Q\cdot i$ zu haben.

Und da diese beiden Kubikwurzeln sich durch nichts unterscheiden, als dadurch, daß in der andern $-i$ steht, wo in der erstern i, so wird, wenn $u+v\cdot i$ ein Werth der einen Kubikwurzel ist, nothwendig $u-v\cdot i$ (während u und v dieselben Werthe behalten) ein Werth der andern Kubikwurzel seyn, und diese beiden Werthe sind auch allemal die zusammengehörigen Werthe dieser Kubikwurzeln, weil beide mit einander multiplicirt (nach §. 19.) den reellen Werth $-\frac{1}{3}p$ geben müssen. Also hat man $z=2u$, und u hat drei reelle Werthe. Folglich sind auch dasmal alle drei Werthe von z reell, während wir oben gesehen haben, daß wenn $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ positiv oder 0 ist, dann allemal nur ein reeller und zwei imaginäre Werthe von z existiren.

V. Man kann aber nun, wenn man dieselben mühsamen Ziffern-Rechnungen nicht scheuen wollte, die Umformung der Auflösung der reducirten kubischen Gleichung

$$z^3+pz+q=0$$

in die gewöhnlichen Ziffernformen auch in dem Falle bewirken, wo p und q imaginär oder reell aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind. Man würde nämlich $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ in derselben Form $P+Q\cdot i$ finden, dann $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{P+Q\cdot i}$ (nach §. 18. N. 5.) auf dieselbe Form bringen, und so die Ausdrücke unter den beiden Kubikwurzel-Zeichen in der Cardan'schen Formel ebenfalls in die Form $\alpha+\beta i$ und $\alpha'+\beta'\cdot i$ gießen, zuletzt aber $\sqrt[3]{\alpha+\beta\cdot i}=\gamma+\delta\cdot i$ und $\sqrt[3]{\alpha'+\beta'\cdot i}=\gamma'+\delta'\cdot i$ (nach III.)

finden, wo γ und δ, desgleichen γ' und δ' drei Werthe haben; und dann würde man, wenn $\gamma'+\delta'\cdot i$ den zu $\gamma+\delta\cdot i$ gehörigen Werth vorstellt (d. h. wenn $(\gamma+\delta\cdot i)(\gamma'+\delta'\cdot i)=-\frac{1}{3}p$ wird, wo aber p selbst imaginär gegeben seyn kann)

$$z=(\gamma+\gamma')+(\delta+\delta')\cdot i$$

gefunden haben.

VI. Daraus folgt aber, daß in jeder reducirten und daher auch in jeder allgemeinen kubischen Gleichung, deren Koefficienten reell oder imaginär aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind, die drei Werthe des Unbekannten allemal nothwendig auch auf dieselbe Form $P'+Q'\cdot i$ gebracht werden können.

Alle Ausdrücke, welche bis jetzt aus wirklichen Zahlen zusammengesetzt gegeben sind, und zwar beliebig direkt, oder indirekt durch quadratische oder kubische Gleichungen, lassen sich daher nothwendig allemal auf die Form $P+Q\cdot i$ bringen, so daß sie reell sind, (wenn $Q=0$ gefunden wird) oder doch diese einfache imaginäre Form haben (wenn Q nicht Null ist).

VII. Die Rechnung in III.), von welcher alle nachfolgenden Rechnungen abhängen, führt sich aber viel bequemer aus, wenn man Lehren der Analysis des Endlichen zu Hülfe nimmt. Mittelst der letztern findet man nämlich eben so bequem als einfach, wenn m irgend eine absolute (positive) ganze Zahl ist, m einander nicht gleiche Ausdrücke von der Form $\alpha+\beta\cdot i$, wo jeder die Eigenschaft hat, daß er, mit m potenzirt, genau eine und dieselbe gegebene (reelle oder imaginäre) Zahl $p+q\cdot i$ hervorbringt. Dann hat man also allgemein m Werthe der m^{ten} Wurzel $\sqrt[m]{p+q\cdot i}$ gefunden, wenn letztere so allgemein aufgefaßt wird, während aus andern Betrachtungen noch hervorgeht, daß es nicht mehr als gerade m Ausdrücke geben kann, welchen dieselbe Eigenschaft zukommt. Folglich hat man dann zu gleicher Zeit alle Werthe von $\sqrt[m]{p+q\cdot i}$ (vgl. Kap. VIII.).

§. 21.

Eine allgemeine Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$$

ist nicht möglich, wenn nicht vorher der Begriff der $\sqrt[4]{a}$ erweitert und verallgemeinert wird.

Wir verstehen aber unter der allgemeinen vierten Wurzel aus a, d. h. unter $\sqrt[4]{a}$, jeden Ausdruck z, der die Eigenschaft hat, daß $z^4=a$ oder $z^4-a=0$ wird. — Ist daher α ein solcher Ausdruck, so daß man $\alpha^4=a$ hat, so geht die Gleichung $z^4-a=0$ in $z^4-\alpha^4=0$ d. h. in $(z^2-\alpha^2)(z^2+\alpha^2)=0$ oder in $(z-\alpha)(z+\alpha)(z-\alpha\cdot\sqrt{-1})(z+\alpha\cdot\sqrt{-1})=0$ über und läßt nun sehen, daß vier und nicht mehr als vier einander nicht gleiche Ausdrücke existiren, welche mit dem erstern α dieselbe Eigenschaft gemein haben; nämlich die vier Ausdrücke

$$\alpha\cdot(+1);\ \alpha\cdot(-1);\ \alpha\cdot(+\sqrt{-1})\ \text{und}\ \alpha\cdot(-\sqrt{-1})$$

während $+1$; -1; $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ die vier Werthe von $\sqrt[4]{1}$ sind. — Es ist also die $\sqrt[4]{a}$ allemal vierdeutig oder besser vierförmig; und diese vier Formen sind im Allgemeinen ausgedrückt durch

$$+\sqrt[4]{a},\quad -\sqrt[4]{a},\quad +\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1}\quad \text{und}\quad -\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1},$$

wenn in den letztern vier Ausdrücken der Faktor $\sqrt[4]{a}$ als eindeutig genommen wird, d. h. als einen und denselben seiner Werthe vorstellend.

Ist a positiv, so kann man statt $\sqrt[4]{a}$ die absolute Wurzel (§. 12. D.) nehmen; dann sind also zwei Werthe der allgemeinen $\sqrt[4]{a}$ reell (der eine positiv, der andere negativ), die beiden andern dagegen imaginär und von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, wobei aber dasmal $p=0$ und q positiv oder negativ ist. — Ist a negativ, und $=-b$, so kann man statt der $\sqrt[4]{a}$ d. h. statt

statt der $\sqrt[4]{(-b)}$ setzen $\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[4]{-1}$. — Findet man nun (nach §. 12. D.) die absolute $\sqrt[4]{b}=\beta$, wo β positiv ist, so hat man $\beta\cdot\sqrt[4]{-1}$ für einen der Werthe von $\sqrt[4]{a}$. Den Ausdruck $\sqrt[4]{-1}$ kann man aber wieder auf die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ bringen. Setzt man nämlich

$$\sqrt[4]{-1}=w, \text{ so hat man } w^4=-1 \text{ oder } w^4=i^2$$

d. h. $\quad w^4-i^2=0, \quad$ oder $\quad (w^2-i)(w^2+i)=0$

so daß $$w=+\sqrt{i}$$

wird, wenn man nur einen Werth von w haben will. Die Formel §. 18. N. 5.) giebt aber nun, wenn daselbst $p=0$ und $q=1$ gesetzt wird,

$$\sqrt{i}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i.$$

Ist also a negativ und $=-b$, und wird $\sqrt[4]{b}=\beta$ berechnet, wo β positiv ist, so finden sich die vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ jetzt so:

$$\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i; \quad -\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i;$$
$$-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i; \quad +\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{2}\cdot i;$$

mithin alle vier imaginär aber von der Form $P+Q\cdot i$. —

Ist $a=0$, so sind alle vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$, $=0$. Ist a reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$, so hat $\sqrt{a}$ allemal zwei Werthe, welche beide reell, oder beide imaginär, aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind. Weil man aber der Gleichung $z^4=a$, die Form $z^4=(\sqrt{a})^2$, oder $z^4-(\sqrt{a})^2=0$ oder $(z^2-\sqrt{a})(z^2+\sqrt{a})=0$ geben kann, so folgt, daß man alle vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ auch findet, wenn man von jedem der beiden Werthe der $\sqrt{a}$ nochmals die allgemeine Quadrat-Wurzel nimmt. — Daraus folgt noch, daß die vier Werthe von $\sqrt[4]{a}$ allemal reell oder imaginär, aber von der Form $P+Q\cdot i$ sind, so oft a selbst reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$ ist.

Will man nun die reducirte biquadratische Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

allgemein auflösen, so zerlegt man den Ausdruck z^4+pz^2+qz+r zuerst in die beiden Faktoren $(z^2+\alpha z+\beta)(z^2-\alpha z+\gamma)$. — Multiplicirt man nämlich letztere beiden, so erhält man

$$z^4+(\beta+\gamma-\alpha^2)z^2+\alpha(\gamma-\beta)z+\beta\gamma;$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit dem gegebenen, so hat man

$$\beta+\gamma-\alpha^2=p, \quad \alpha(\gamma-\beta)=q \quad \text{und} \quad \beta\gamma=r.$$

Findet man nun aus den beiden erstern dieser drei Gleichungen

$$2\beta=\alpha^2+p-\frac{q}{\alpha} \quad \text{und} \quad 2\gamma=\alpha^2+p+\frac{q}{\alpha},$$

und substituirt man diese Werthe von β und γ in die dritte Gleichung $4\beta\gamma=4r$, so erhält man zur Bestimmung von α die Gleichung

$$(\alpha^2+p)^2-\frac{q^2}{\alpha^2}=4r \text{ od. } (\alpha^2)^3+2p(\alpha^2)^2+(p^2-4r)\alpha^2-q^2=0.$$

Diese Gleichung ist, wenn man α^2 als den Unbekannten ansieht, eine kubische; sie giebt für α^2 drei, also für α selbst 6 Werthe, während zu jedem Werth von α ein Werth von β und ein Werth von γ sich ergiebt. Dabei sind diese Werthe von α, β, γ allemal reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$ (den früheren Paragraphen zu Folge). — Nimmt man nun für α einen seiner Werthe und für β und γ die zugehörigen, so findet man die Werthe von z, welche der Gleichung $z^4+pz^2+qz+r=0$ angehören, wenn man die Werthe von z sucht, welche jeden der beiden Faktoren dieses Ausdruckes zu Null machen, d. h. welche aus der Auflösung der Gleichungen

$$z^2+\alpha z+\beta=0 \quad \text{und} \quad z^2-\alpha z+\gamma=0$$

für z hervorgehen. Man erhält demnach vier Werthe von z, welche jedoch alle vier nothwendig von der Form $p+q\cdot i$ werden, wo p und q reell sind, wo auch q der Null gleich werden

kann, so daß diese Werthe von z zum Theil oder alle auch reell seyn können *).

Soll aber die allgemeine Gleichung vom vierten Grade

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$$

aufgelöst werden, so setzt man

$$x=-\tfrac{1}{4}\frac{d}{e}+z,$$

substituirt diese Form statt x in die gegebene Gleichung, ordnet die neue Gleichung nach z und erhält eine reducirte Gleichung vom vierten Grade, deren Auflösung so eben gezeigt worden ist. **) — Es finden sich also vier Werthe für z, und dann, wenn zu jedem derselben $-\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{e}$ addirt wird, auch vier Werthe von x, welche letztere der gegebenen allgemeinen biquadratischen Gleichung genügen.

Auch diese letztern vier Werthe sind alle reell oder imaginär, aber von der Form $p+q\cdot i$, sobald nur a, b, c, d, e reell oder imaginär, aber von derselben Form sind.

§. 22.

Eine allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen vom fünften und höhern Grade in geschlossener endlicher Form

---

*) Der Grund, warum sechs Werthe von α, β, γ sich ergeben, kann nur darin gesucht werden, daß

$$z^4+pz^2+qz+r$$

in vier einfache Faktoren von der Form

$$(z+a)(z+b)(z+c)(z+d)$$

sich zerlegt. Je zwei derselben mit einander multiplicirt, geben einen doppelten Faktor von der Form $z^2+\alpha z+\beta$. Also kann $z^2+\alpha z+\beta$ jedes der sechs Produkte $(z+a)(z+b)$, $(z+a)(z+c)$, $(z+a)(z+d)$, $(z+b)(z+c)$, $(z+b)(z+d)$, $(z+c)(z+d)$ vorstellen, und deshalb hat auch α die sechs verschiedenen Werthe $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ und $c+d$. Irgend einer der Werthe genügt aber.

**) Eigentlich muß man $x=u+z$ setzen, die neue Gleichung nach z ordnen, dann aber über u dergestalt disponiren, daß der Koefficient von z^3, nämlich $4eu+d$, der Null gleich wird. Dies giebt dann $u=-\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{e}$.

§. 32.

Nimmt man n Elemente a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, so ist:

I. Die Anzahl aller Verbindungen zu **zweien**, die man aus diesen n Elementen bilden kann,

1) bei den Variationen **mit** Wiederholgn. ... $= n^2$;

2) bei den " **ohne** " ... $= n^{2|-1}$;

3) bei den Combinationen **mit** Wiederh. ... $= \frac{n^{2|1}}{2!}$;

4) bei den " **ohne** " ... $= \frac{n^{2|-1}}{2!}$.

II. Dagegen ist die Anzahl der Verbindungen zu **dreien**, welche aus denselben n Elementen gemacht werden, in denselben vier Fällen bezüglich

$$n^3; \quad n^{3|-1}; \quad \frac{n^{3|1}}{3!} \quad \text{und} \quad \frac{n^{3|-1}}{3!}.$$

III. Allgemein: Die Anzahl der Verbindungen zu je m Dingen, welche sich aus den gegebenen n Elementen a_1, a_2, a_3, ... a_n bilden lassen, sind

1) bei den Variationen **mit** Wiederholgn. ... $= n^m$;

2) bei den " **ohne** " ... $= n^{m|-1}$;

3) bei den Combinationen **mit** Wiederh. ... $= \frac{n^{m|1}}{m!}$;

4) bei den " **ohne** " ... $= \frac{n^{m|-1}}{m!}$.

Folgendes sind die Gründe für diese Formeln. Die Variationen mit Wiederholungen erhält man, wenn man jedem Elemente, jedes Element vorsetzt (dies giebt die **zweite** Klasse); dann wieder jeder dieser Verbindungen zu zweien jedes Element vorsetzt (dann hat man die **dritte** Klasse); ferner wieder jeder dieser Verbindungen zu dreien, auf's Neue jedes Element vorsetzt (um die **vierte** Klasse zu bekommen) u. s. w. f. — Daraus folgt die Formel 1.) ohne Weiteres.

Will man aber Wiederholungen vermeiden, so muß man jedem Elemente nur die $m-1$ übrigen Elemente vorsetzen: daher erhält die zweite Klasse dann nicht mehr $m \cdot m$ oder m^2, sondern nur $m(m-1)$ oder $m^{2|-1}$ Verbindungen. Jeder dieser Verbindungen zu zweien dürfen dann wiederum

nur die $m-2$ übrigen Elemente vorgesetzt werden, die sie nicht schon hat (wenn man Wiederholungen vermeiden will); daher hat die dritte Klasse jetzt nur $m-2$ mal so viel Verbindungen als die zweite Klasse deren hatte, nämlich $m(m-1)(m-2)$ oder $m^{2|-1}(m-2)$ d. h. $m^{3|-1}$ Verbindungen. Eben so dürfen jeder dieser Verbindungen zu dreien nur die $m-3$ übrigen Elemente, die sie nicht schon hat, vorgesetzt werden; u. s. w. f. — So findet sich ohne Weiteres die Formel 2.).

Da die m^{te} Klasse der Variationen ohne Wiederholungen nichts weiter ist, als alle Verbindungen der m^{ten} Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen zugleich mit allen Versetzungen der einzelnen Verbindungen, und da jede der letztern Verbindungen m und zwar lauter verschiedene Elemente enthält, so giebt jede Verbindung in der m^{ten} Combinations-Klasse genau $m!$ Verbindungen in der m^{ten} Variations-Klasse (nach §. 29.); folglich erhält man die Anzahl aller Verbindungen der m^{ten} Combinations-Klasse, wenn man die in der m^{ten} Variations-Klasse noch durch $m!$ dividirt. — Dadurch ist aber die Formel 4.) außer Zweifel gesetzt.

Die m^{te} Klasse der Combinationen mit Wiederholungen hat dagegen noch mehr Verbindungen. Erstlich hat sie alle die eben bestimmten, und dann noch alle diejenigen, in welchen Wiederholungen vorkommen. Wir wollen zusehen, wie sie gebildet werden.

Aus den n Elementen wird die zweite Klasse gebildet, wenn man allen Elementen a_1 vorsetzt, — dann allen von a_2 ab, a_2 vorsetzt, — dann allen von a_3 ab, a_3 vorsetzt, u. s. w. f. — Daher hat die zweite Klasse aus den n Elementen offenbar

$$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$

Verbindungen. — Bezeichnen wir diese Summe der ersten n natürlichen Zahlen durch S_1^n, so drückt S_1^{n-1} die Summen der ersten $n-1$ natürlichen Zahlen aus, während auch die Bedeutung von S_1^{n-2}, S_1^{n-3}, ... S_1^2, S_1^1 feststeht.

Aus der zweiten Klasse wird nun die dritte Klasse gebildet, wenn man allen S_1^n Verbindungen der zweiten Klasse das erste Element a_1 vorsetzt; dann allen S_1^{n-1} Verbindungen der zweiten Klasse, welche nicht a_1 enthalten, das zweite Element a_2 vorsetzt; dann allen S_1^{n-2} Verbindungen, welche weder a_1 noch a_2 haben, das dritte Element a_3 vorsetzt, u. s. w. f. Daher ist die Anzahl aller Verbindungen in der dritten Klasse

$$=S_1^n+S_1^{n-1}+S_1^{n-2}+S_1^{n-3}+\ldots+S_1^2+S_1^1;$$

und diese Summe wollen wir durch S_2^n bezeichnen.

Ganz auf dieselbe Weise zeigt sich die Anzahl der Verbindungen in der vierten Klasse

$$=S_2^n+S_2^{n-1}+S_2^{n-2}+\ldots+S_2^3+S_2^2+S_2^1;$$

und diese Summe wollen wir durch S_3^n bezeichnen.

Fahren wir so fort die Summen

$$S_3^n+S_3^{n-1}+S_3^{n-2}+\ldots+S_3^2+S_3^1 \quad \text{durch} \quad S_4^n,$$
$$S_4^n+S_4^{n-1}+S_4^{n-2}+\ldots+S_4^2+S_4^1 \quad \text{durch} \quad S_5^n$$

u. s. w. f. zu bezeichnen, so wird die Anzahl der Verbindungen in der m^{ten} Klasse durch S_{m-1}^n bezeichnet seyn, und es bleibt jetzt nur noch übrig die Ausdrücke zu finden, welche durch die Zeichen S_1^n, S_2^n, S^n,... S_ν^n vorgestellt sind. — Dies lehrt aber der nächste Paragraph. — Nimmt man das Resultat desselben zu Hülfe, so findet sich die Formel 3.) ohne Weiteres.

Dritte Abtheilung.

Von den figurirten Zahlen-Reihen.

§. 33.

So wie hier, so kommen in anderen Untersuchungen noch oft die Zahlen-Reihen

I. ...	1,	2,	3,	4,	5,	6, ...
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21, ...
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56, ...
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126, ...
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252, ...

u. s. w. f.

vor, von denen die erstere die Reihe der natürlichen Zahlen ist, von denen aber jede folgende aus der ihr zunächst vorhergehenden dadurch gebildet wird, daß man zu jedem, z. B. zum r^{ten} Gliede die Summe der r ersten Glieder der nächst vorhergehenden Reihe nimmt. Diese Zahlen-Reihen, nennt man **figurirte Reihen**, oder **Reihen der figurirten Zahlen** und zwar bezüglich von der I^ten^, II^ten^, III^ten^, IV^ten^, V^ten^ etc. etc. **Ordnung**.

Be-

Bezeichnen wir die Summen der n ersten Zahlen in diesen verschiedenen Reihen bezüglich durch S^n_1, S^n_2, S^n_3, S^n_4, S^n_5, etc. etc., so findet sich

$$1) \quad S^n_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^{2|1}}{2!};$$

$$2) \quad S^n_2 = \frac{n^{3|1}}{3!};$$

$$3) \quad S^n_3 = \frac{n^{4|1}}{4!};$$

$$4) \quad S^n_4 = \frac{n^{5|1}}{5!};$$

$$5) \quad S^n_5 = \frac{n^{6|1}}{6!};$$

und allgemein

$$\odot \ldots \quad S^n_{m-1} = \frac{n^{m|1}}{m!}.$$

Von der erstern Reihe, welche zu gleicher Zeit eine gemeine arithmetische Reihe ist, findet man, wie aus den Elementen bekannt ist, die Summe der n ersten Glieder, wenn man das erste und letzte derselben addirt, und die halbe Summe mit der Anzahl aller Glieder multiplicirt. Dies giebt sogleich $S^n_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dieses Resultat giebt aber die muthmaßliche Form für die übrigen Summen; nimmt man daher die folgenden Gleichungen (2.—⊙.) als Lehrsätze an, so kommt alles nur noch darauf an, sie zu beweisen. Dazu läßt sich aber der „Weg der vollkommenen Induktion" mit augenblicklichem Erfolge anwenden. Dieser besteht darin, daß man nachweist, wie das behauptete Resultat, so oft es für einen einzigen Werth von n zutrifft, allemal auch für den nächstfolgenden Werth von n zutreffen müsse. Ist solches nachgewiesen, so versucht man, ob die Formel ein, mit dem zu Anfange des Paragraphen stehenden Schema übereinstimmendes Resultat giebt, wenn $n=2$ gesetzt wird. Im bejahenden Falle gilt dieselbe dann allemal für jede folgende positive oder vielmehr absolute ganze Zahl, welche statt n gesetzt werden mag. — Wir wollen dies Verfahren für die Gleichung 2.) hier noch durchführen.

Es sey nämlich h eine bestimmte ganze Zahl, welche in die Formel 2.) statt n gesetzt, den Ausdruck $\frac{h^{3|1}}{3!}$ giebt, der wirklich die Summe der h

ersten Glieder in der IIten Ordnung der figurirten Reihen ausdrückt, in so fern nämlich das Resultat mit dem Schema selbst gestimmt hat. Es ist also für diese einzige bestimmte Zahl h, nach dieser Annahme, wirklich

$$S_2^h = \frac{h^{3|1}}{3!}$$

gefunden worden. Um nun daraus S_2^{h+1} zu finden, muß man zu S_2^h noch das $h+1$te Glied derselben Reihe der IIten Ordnung addiren. Weil aber dieses $h+1$te Glied der IIten Ordnung die Summe S_1^{h+1} der ersten $h+1$ Glieder der nächstvorhergehenden (ersten) Ordnung, also bekannt und $=\frac{(h+1)^{2|1}}{2!}$ ist, so findet sich demnach

$$S_2^{h+1} = \frac{h^{3|1}}{3!} + \frac{(h+1)^{2|1}}{2!} = \frac{h\cdot(h+1)^{2|1}+3\cdot(h+1)^{2|1}}{3!}$$

$$= \frac{(h+1)^{2|1}\cdot(h+3)}{3!} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}.$$

Weil jedoch die Formel 2.), wenn man $h+1$ statt n setzt, dasselbe Resultat liefert, so ist diese Formel 2.) richtig für jede nächstfolgende ganze Zahl $h+1$ (statt n), so oft sie für $n=h$ richtig gefunden worden ist. Für $n=2$ giebt aber dieselbe Formel

$$S_2^2 = \frac{2^{3|1}}{3!} = \frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 4;$$

und das Schema II.) giebt für die Summe der beiden ersten Glieder (1 und 3) ebenfalls 4; folglich gilt die Formel 2.) für $n=2$; aber nun auch für $n=3, 4, 5, 6$, und für jede folgende ganze Zahl, eben weil sie immer für die nächstvorhergehende ganze Zahl wahr ist.

Jeder Anfänger wird nun den Beweis der nächsten Formel 3.) ohne weiteres liefern können. Wer jedoch noch nähere Nachhülfe wünschen sollte, der findet solche im „System d. Mathem." Th. II. 2te Aufl. Kap. XV. Abthlg. 2.).

Vierte Abtheilung.

Die beiden Discerptions-Probleme.

§. 34.

Hat man eine der Gleichungen

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n; \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=n; \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=n; \text{ etc. etc.}$$

aufzulösen, wo die deutschen Buchstaben die Unbekannten vorstellen, während n Null oder eine positive ganze Zahl ist, unter der Bedingung, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. etc. selbst keine anderen

Werthe annehmen sollen, als Null oder positive ganze Zahlen, — und will man **alle** Auflösungen haben, welche die Gleichung zuläßt, so bilden die zusammengehörigen Werthe der Unbekannten das was man bezüglich die **zweite, dritte, vierte** etc. etc. **Klasse der Variationen zur bestimmten Summe** n nennt.

Diese Auflösungen bilden sich übrigens z. B. für $n = 5$ auf nachstehende Weise:

0005
0014
0023
0032
0041
0050

0104
0113
0122
0131
0140
0203
0212
0221
0230
0302
0311
0320
0401
0410
0500

1004
1013
1022
1031
1040
1103
1112
1121
1130
1202
1211
1220
1301
1310
1400
2003
2012
2021
2030
2102
2111
2120
2201
2210
2300
3002
3011
3030
3101
3110
3200
4001
4010
4100
5000

Die rechts oben abgetrennten sechs Verbindungen zu zweien enthalten alle Auflösungen der Gleichung $a+b=5$; die nachgehends abgetrennten einundzwanzig Verbindungen zu dreien enthalten alle Auflösungen der Gleichung $a+b+c=5$; endlich enthalten **alle** Verbindungen zu vieren die Auflösungen der Gleichung $a+b+c+d=5$.

Vermehrte man alle Elemente um 1, so würden die erstern sechs Verbindungen zu zweien die Auflösungen der Gleichung $a+b=7$; die einundzwanzig Verbindungen zu dreien die Auflösungen der Gleichung $a+b+c=8$; und **alle** Verbindungen zu vieren die Auflösungen der Gleichung $a+b+c+d=9$ unter der Voraussetzung vorstellen, daß keine Null-Werthe zugelassen werden.

Will man daher die m^te^ Klasse der Variationen zur bestimmten Summe n mit Ausschließung der Null-Werthe entwickeln, so darf man nur nach dem nebenstehenden Vorbilde die m^te^ Klasse der Variationen zur Summe $n-m$ entwickeln, indem man den Null-Werthen freien Zutritt gestattet, — dann aber jedes einzelne Element um eine Einheit erhöhen.

§. 35.

Nimmt man von den Verbindungen der m^{ten} Klasse der Variationen zur Summe n, nur die **wohlgeordneten** Verbindungen, so erhält man die m^{te} Klasse der **Combinationen** zur **Summe** n.

Z. B. für $n=5$ werden diese Combinationen zur bestimmten Summe 5 folgende

0005
0014
0023
0113
0122
1112

wo man die **zweite** Klasse und die **dritte** Klasse abgetrennt erblickt, während das ganze Schema die vierte Klasse bildet.

Was bei den Variationen für den Fall gesagt worden ist (§. 34.), daß die Null-Werthe ausgeschlossen werden sollen, gilt auch für die Combinationen.

Anmerkung. Diese beiden Probleme sind aber in der Geschichte der Mathematik auch unter dem Namen der beiden **Discerptions-Probleme** bekannt. — Man kann sie noch verallgemeinern und eine Zahl n aus zwei, drei, vier, etc. etc. der Zahlen $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.$ etc. etc. auf alle möglichen Arten zusammensetzen, und zwar sowohl nur wohlgeordnete Verbindungen (Combinationen) oder letztere zugleich mit allen Versetzungen (Variationen) bilden, das ganze Verfahren aber auf das in den §§. 34. und 35.) entwickelte zurückführen. (Ausführlicheres hierüber findet man im „System d. Mathem." Th. II. 2te Aufl. Kap. XVI).

Drittes Kapitel.

Der binomische Lehrsatz für Differenz-Potenzen und für ganze Faktoriellen.

I. Der binomische Lehrsatz für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 36.

Multiplicirt man $x+h$ mit $x+h$, was herauskommt wieder mit $x+h$, und so weiter fort, so erhält man nachstehende Rechnung

$$
\begin{array}{l}
x+h \\
x+h \\
\hline
x^2+xh \\
\quad +xh+h^2 \\
\hline
(x+h)^2=x^2+2xh+h^2 \\
\qquad\qquad x+h \\
\hline
x^3+x^2h \\
\quad +2x^2h+2xh^2 \\
\qquad\quad +xh^2+h^3 \\
\hline
(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \\
\qquad\qquad x+h \\
\hline
x^4+x^3h \\
\quad +3x^3h+3x^2h^2 \\
\qquad +3x^2h^2+3xh^3 \\
\qquad\qquad +xh^3+h^4 \\
\hline
(x+h)^4=x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4 \\
\qquad\qquad x+h \\
\hline
x^5+x^4h \\
\quad +4x^4h+4x^3h^2 \\
\qquad +6x^3h^2+6x^2h^3 \\
\qquad\qquad +4x^2h^3+4xh^4 \\
\qquad\qquad\qquad +xh^4+h^5 \\
\hline
(x+h)^5=x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5.
\end{array}
$$

Es ist jedes Glied zuerst mit x, dann sogleich mit h multiplicirt. Beide Glieder in jeder Linie haben daher allemal den Koefficienten des Gliedes, welches multiplicirt wurde.

Man braucht die Multiplikation nicht weiter fortzusetzen, um einzusehen, daß jedes neue Resultat in jedem r^{ten} Gliede zum Koefficienten hat die Summe des r^{ten} und des $(r-1)^{ten}$ Gliedes

des nächst vorhergehenden Resultates. — Daraus folgt, daß man durch fortgesetztes Multipliciren, für $(a+b)^m$ erhalten werde eine Summe von der Form

$$x^m + m_1 \cdot x^{m-1}h + m_2 \cdot x^{m-2}h^2 + m_3 \cdot x^{m-3}h^3 + \ldots$$
$$+ m_r \cdot x^{m-r}h^r + \ldots + h^m,$$

in welcher die unbekannten, aber offenbar von der Zahl m abhängigen Koefficienten einstweilen durch m_1, m_2, m_3, m_4, ... m_r, etc. etc. bezeichnet sind, dergestalt, daß die Koefficienten der nächst vorhergehenden $(m-1)^{ten}$ Potenz von $x+h$, eben weil sie aus den letztern hervorgehen müssen, wenn man $m-1$ statt m setzt, durch $(m-1)_1$, $(m-1)_2$, $(m-1)_3$, ... $(m-1)_r$ bezeichnet, aber deshalb noch nicht bekannt seyn werden.

Man kann nun Versuchsweise Ausdrücken (angezeigten Operationen) nachspüren, die der oben bei'm Multipliciren bemerkten Eigenschaft genügen, nach welcher

$$m_r = (m-1)_r + (m-1)_{r-1}$$

seyn muß, — und unter den mehreren, die man vielleicht für jedes dieser Zeichen m_r auffindet*), diejenigen heraussuchen, welche wenigstens in einem Falle (d. h. für einen Werth von m) mit den Resultaten der direkten Multiplikation übereinstimmen. Dann hat man die Vermuthung für sich, daß diese Koefficienten die richtigen seyn möchten.

---

*) Nimmt man z. B.

$$p \cdot \frac{m^{r|-1}}{r!} \text{ statt } m_r, \text{ so bekommt man}$$

$$p \cdot \frac{(m-1)^{r|-1}}{r!} \text{ statt } (m-1)_r$$

und

$$p \cdot \frac{(m-1)^{r-1|-1}}{(r-1)!} \text{ statt } (m-1)_{r-1};$$

und in der That findet sich, daß, wenn man diese letztern beiden Ausdrücke nach den Regeln der Buchstaben-Rechenkunst addirt, der erstere wieder herauskommt, während p jeden Werth haben kann.

Auf diesem Wege findet man

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1}\cdot x^{m-1}h + \frac{m^{2|-1}}{2!}\cdot x^{m-2}h^2 + \frac{m^{3|-1}}{3!}\cdot x^{m-3}h^3 +$$
$$\cdots + \frac{m^{r|-1}}{r!}\cdot x^{m-r}h^r + \ldots\ldots + \frac{m^{m|-1}}{m!}\cdot h^m \text{ *)}.$$

Dieser Satz heißt der **binomische Lehrsatz** für **positive ganze Exponenten**. — So wie er hier aufgefunden worden ist, ist er noch nicht hinreichend begründet; man kann ihn aber nun als einen Lehrsatz hinstellen und (auf dem „Wege der vollkommenen Induktion") noch vollständig beweisen **). — Die Koefficienten dieser Entwicklung zur Rechten heißen die **Binomial-Koefficienten**.

§. 37.

Der im vorstehenden Paragraphen betretene Weg ist der geschichtliche; der nachstehende combinatorische der einfachere.

Da nämlich das Multipliciren mit $x+h$ nichts weiter als ein abwechselndes Vorsetzen des x und des h ist, vor jedes zu multiplicirende Glied, so ist $(x+h)^m$ nichts anders als die m^{te} Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus den beiden

---

*) In der That: addirt man die beiden Koefficienten $\frac{(m-1)^{r|-1}}{r!}$ und $\frac{(m-1)^{r-1|-1}}{(r-1)!}$ (nämlich den r^{ten} und den $(r-1)^{ten}$) der nächst-vorhergehenden $(m-1)^{ten}$ Potenz, so ergiebt sich wirklich als Endresultat der Ausdruck $\frac{m^{r|-1}}{r!}$. Und setzt man 2, 3, 4 oder 5 statt m, so kommen in der That die durch direktes Multipliciren erhaltenen Resultate wieder.

**) Gesetzt nämlich es wäre für einen einzigen Werth μ von m wirklich

$$(x+h)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1}\cdot x^{\mu-1}h + \frac{\mu^{2|-1}}{2!}\cdot x^{\mu-2}h^2 + \cdots,$$

so würde man diese Gleichung noch mit $x+h$ multipliciren, und erhielte sogleich $(x+h)^{\mu+1}$ in eine Reihe verwandelt, deren jeder Koefficient die Summe zweier Koefficienten der vorstehenden Reihe ist, so daß, wegen des Resultats in vorstehender Note, dieselben Koefficienten des Lehrsatzes wiederkehren, für $m=\mu+1$.

Elementen x und h entwickelt, sobald man die einzelnen Verbindungen als Producte ansieht und zu einander addirt sich denkt. Weil aber alle Producte einander gleich sind, welche aus denselben, nur verschiedentlich angeordneten Factoren bestehen, und weil zugleich die Variations-Klasse erhalten wird, wenn man die m^{te} Combinations-Klasse nimmt, und jede Verbindung zugleich mit allen ihren Versetzungen, so wird man $(x+h)^m$ erhalten, wenn man aus x und h die m^{te} Combinations-Klasse entwickelt und jede einzelne Verbindung als Product angesehen so oft nimmt, als sie sich verschiedentlich anordnen läßt. — Nun ist aber die m^{te} Klasse der Combinationen offenbar die:

$$x^m,\ x^{m-1}h,\ x^{m-2}h^2,\ \cdots,\ x^{m-r}h^r,\ \cdots,\ h^m.$$

Nehmen wir daraus die Verbindung $x^{m-r}h^r$, welche, je nachdem 0, 1, 2, 3, ... oder m statt r gesetzt wird, alle die übrigen Verbindungen repräsentirt, und suchen wir die Anzahl der Versetzungen, die sie zuläßt, so finden wir (nach §. 30.) die Zahl $\frac{m!}{(m-r)!\cdot r!}$, — oder, wenn man Zähler und Nenner mit $(m-r)!$ wegdividirt, und die bleibenden Factoren im Zähler rückwärts liest, $\frac{m^{r|-1}}{r!}$. — Folglich ist $(x+h)^m$ einer Summe von Gliedern gleich, deren jedes einzelne durch $\frac{m^{r|-1}}{r!}\cdot x^{m-r}h^r$ vorgestellt ist, und welche alle aus diesem allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man nach und nach 0, 1, 2, 3, und alle folgenden ganzen Zahlen statt r setzt. Dies giebt aber genau wieder den Satz ⊙ des §. 36.

Derselbe binomische Lehrsatz läßt sich auch so schreiben:

$$\text{II.}\qquad (x+h)^m = S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{m-\mathfrak{b}}\cdot h^{\mathfrak{b}}\right],$$

indem wir den kleinen deutschen Buchstaben allein das Recht vorbehalten nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen-Werthe anzunehmen und durch das vorgesetzte

S die Summe aller dadurch hervorgehenden Glieder andeuten *). Auch kann man denselben Satz nun noch so schreiben:

$$\text{III.}\quad (x+h)^m = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{a}}h^{\mathfrak{b}}\right] = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{a}}h^{\mathfrak{b}}\right],$$

in so fern die deutschen Buchstaben 0 und alle ganzen (positiven) Zahlen-Werthe annehmen, die untergesetzte Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$ dagegen alle diejenigen Verbindungen ausschließt, deren Summe nicht $=m$ ist. Dies giebt für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Werthe, welche die zweite Klasse der Variationen zur bestimmten Summe m liefert; und daraus gehen wieder alle Glieder der Entwicklung von $(x+h)^m$ hervor.

§. 38.

Setzt man 1 statt x, und b statt h, so nimmt dieser binomische Lehrsatz noch die Form an:

$$\text{I.}\quad (1+b)^m = 1+\frac{m}{1}\cdot b+\frac{m^{2|-1}}{2!}\cdot b^2+\frac{m^{3|-1}}{3!}\cdot b^3+\frac{m^{4|-1}}{4!}\cdot b^4+\cdots$$

oder

$$\text{II.}\quad (1+b)^m = S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right],$$

während es nicht einmal nöthig ist die Anzahl der Glieder näher anzugeben, weil, so wie der m^{te} Binomial-Koefficient $\frac{m^{m|-1}}{m!}$ erscheint, welcher $=1$ ist, jeder folgende dann die Null im Zähler erhält, folglich selbst der Null gleich wird.

Setzt man aber in dieser Gleichung, $\frac{h}{x}$ statt b, und multiplicirt man noch links und rechts mit x^m, so erhält man sogleich wieder hieraus auch die Resultate I. und II. der §§. 36. und 37.), nämlich die Entwicklungen von $(x+h)^m$.

Anmerkung. Wenn man die Schlüsse des §. 37.) wiederholt, so findet man auch noch

*) Ueber diese Bezeichnungs-Weise findet man sehr ausführliches im „System der Math.“ Th. II. Zweite Aufl. Kap. XVII.

$$1) \qquad (a+b+c)^m = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!} a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m},$$

wo statt $\frac{m!}{\mathfrak{a}!}$ auch $m^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|-1}$, so wie noch $m-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{a}$, geschrieben werden kann, in welchem Falle die untergesetzte Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m$ überflüssig wird; ferner

$$2) \qquad (a+b+c+d)^m = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!\ \mathfrak{d}!} a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}} d^{\mathfrak{d}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m},$$

wo man statt $\frac{m!}{\mathfrak{a}!}$ auch $m^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}|-1}$ und statt $\mathfrak{a}$ auch $m-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}$ schreiben kann, in welchem Falle die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m$ ganz überflüssig wird, wenn man nur statt der deutschen Buchstaben 0 und alle ganzen Zahlen setzt. U. s. w. f.

Wollte man danach $(a+b+c)^4$ entwickeln, so würde man nach 1.) zuerst der Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=4$ genügen dadurch, daß man die dritte Klasse der Variationen zur bestimmten Summe 4 entwickelte, nämlich

𝔞, 𝔟, 𝔠	𝔞, 𝔟, 𝔠	𝔞, 𝔟, 𝔠
0 0 4	1 0 3	2 1 1
0 1 3	1 1 2	2 2 0
0 2 2	1 2 1	3 0 1
0 3 1	1 3 0	3 1 0
0 4 0	2 0 2	4 0 0

Man bekommt dann, wenn man diese Werthe von 𝔞, 𝔟, 𝔠 in das allgemeine Glied (in 1.) nach und nach substituirt, die 15 Glieder, deren Summe $=(a+b+c)^4$ ist, nämlich, wenn man alle Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt

$$(a+b+c)^4 = a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c$$
$$+12abc^2+4ac^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4.$$

Als eine Probe, ob man richtig gerechnet habe, setze man in dieser Gleichung $a=b=c=1$, so kommt links 3^4 oder 81; also muß rechts die Summe aller 15 Koefficienten gerade 3^4 oder 81 betragen. — Und dieses trifft in der That zu.

Den Satz 1.) nennt man den trinomischen, den Satz 2.) dagegen den quadrinomischen Lehrsatz. — Man begreift wie augenblicklich ein polynomischer Lehrsatz auf demselben Wege entwickelt wird, wenn man sich nämlich die Aufgabe stellt

$$(a+b+c+d+e+f+\cdots)^m$$

zu entwickeln und dazu den Weg der Combinationen wählt.

Der binomische Lehrsatz für ganze Faktoriellen.

§. 39.

Statt lauter gleiche Faktoren x+h, x+h, x+h etc. etc., wollen wir nun einmal die äquidifferenten Faktoren x+h, x+h+d, x+h+2d, x+h+3d, u. s. w. f. mit einander multipliciren, übrigens den ganz analogen Weg betreten, wie im §. 36.); dann erhält man nachstehende Rechnung:

$$\begin{array}{l} x+h \\ x+h+d \\ \hline x(x+d)+xh \\ \quad +xh+h(h+d) \end{array}$$

Man zerlegt x+h+d einmal in (x+d)+h, wenn das erste Glied x multiplicirt wird, — dann in x+(h+d), sobald das zweite Glied h multiplicirt wird.

$$(x+h)^{2|d} = x^{2|d} + 2x^{1|d} \cdot h^{1|d} + h^{2|d}.$$

$$\begin{array}{l} x+h+2d \\ \hline x^{2|d} \cdot (x+2d) + x^{2|d} \cdot h \\ \quad + 2x^{1|d} \cdot (x+d) \cdot h^{1|d} + 2x^{1|d} \cdot h^{1|d}(h+d) \\ \quad\quad + x \cdot h^{2|d} + h^{2|d} \cdot (h+2d) \end{array}$$

Man zerlegt x+h+2d in (x+2d)+h, wenn das erste Glied multiplicirt werden soll; dann in (x+d)+(h+d), wenn das zweite Glied zu multipliciren ist, — zuletzt in x+(h+2d) bei dem Multipliciren des dritten Gliedes.

$$(x+h)^{3|d} = x^{3|d} + 3x^{2|d} \cdot h^{1|d} + 3x^{1|d} \cdot h^{2|d} + h^{3|d}.$$

$$\begin{array}{l} x+h+3d \text{ *)} \\ \hline x^{3|d} \cdot (x+3d) + x^{3|d} \cdot h \\ \quad + 3x^{2|d} \cdot (x+2d) \cdot h^{1|d} + 3x^{2|d} \cdot h^{1|d} \cdot (h+d) \\ \quad\quad + 3x^{1|d}(x+d) \cdot h^{2|d} + 3x^{1|d} \cdot h^{2|d} \cdot (h+2d) \\ \quad\quad\quad + x \cdot h^{3|d} + h^{3|d} \cdot (h+3d) \end{array}$$

$$(x+h)^{4|d} = x^{4|d} + 4x^{3|d} \cdot h^{1|d} + 6x^{2|d} \cdot h^{2|d} + 4x^{1|d} \cdot h^{3|d} + h^{4|d}.$$

$$\begin{array}{l} x+h+4d \text{ **)} \\ \hline x^{5|d} + x^{4|d} \cdot h^{1|d} \\ \quad + 4x^{4|d} \cdot h^{1|d} + 4x^{3|d} \cdot h^{2|d} \\ \quad\quad + 6x^{3|d} \cdot h^{2|d} + 6x^{2|d} \cdot h^{3|d} \\ \quad\quad\quad + 4x^{2|d} \cdot h^{3|d} + 4x^{1|d} \cdot h^{4|d} \\ \quad\quad\quad\quad + x^{1|d} \cdot h^{4|d} + h^{5|d} \end{array}$$

$$(x+h)^{5|d} = x^{5|d} + 5x^{4|d} \cdot h^{1|d} + 10x^{3|d} \cdot h^{2|d} + 10x^{2|d} \cdot h^{3|d} + 5x^{1|d} \cdot h^{4|d} + h^{5|d}.$$

u. s. w. f.

---

*) Man zerlegt x+h+3d in (x+3d)+h, oder in (x+2d)+(h+d), oder in (x+d)+(h+2d), oder in x+(h+3d), je nachdem das erste, zweite, dritte oder vierte Glied des Multiplikanden an die Reihe kommt.

**) Man zerlegt x+h+4d bald in (x+4d)+h, bald in (x+3d)

ersten Glieder in der II^ten Ordnung der figurirten Reihen ausdrückt, in so fern nämlich das Resultat mit dem Schema selbst gestimmt hat. Es ist also für diese einzige bestimmte Zahl h, nach dieser Annahme, wirklich

$$S_2^h = \frac{h^{3|1}}{3!}$$

gefunden worden. Um nun daraus S_2^{h+1} zu finden, muß man zu S_2^h noch das $h+1$te Glied derselben Reihe der II^ten Ordnung addiren. Weil aber dieses $h+1$te Glied der II^ten Ordnung die Summe S_1^{h+1} der ersten $h+1$ Glieder der nächstvorhergehenden (ersten) Ordnung, also bekannt und $= \frac{(h+1)^{2|1}}{2!}$ ist, so findet sich demnach

$$S_2^{h+1} = \frac{h^{3|1}}{3!} + \frac{(h+1)^{2|1}}{2!} = \frac{h\cdot(h+1)^{2|1} + 3\cdot(h+1)^{2|1}}{3!}$$
$$= \frac{(h+1)^{2|1}\cdot(h+3)}{3!} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}.$$

Weil jedoch die Formel 2.), wenn man $h+1$ statt n setzt, dasselbe Resultat liefert, so ist diese Formel 2.) richtig für jede nächstfolgende ganze Zahl $h+1$ (statt n), so oft sie für $n=h$ richtig gefunden worden ist. Für $n=2$ giebt aber dieselbe Formel

$$S_2^2 = \frac{2^{3|1}}{3!} = \frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 4;$$

und das Schema II.) giebt für die Summe der beiden ersten Glieder (1 und 3) ebenfalls 4; folglich gilt die Formel 2.) für $n=2$; aber nun auch für $n=3, 4, 5, 6$, und für jede folgende ganze Zahl, eben weil sie immer für die nächstvorhergehende ganze Zahl wahr ist.

Jeder Anfänger wird nun den Beweis der nächsten Formel 3.) ohne weiteres liefern können. Wer jedoch noch nähere Nachhülfe wünschen sollte, der findet solche im „System d. Mathem." Th. II. 2te Aufl. Kap. XV. Abthlg. 2.).

Vierte Abtheilung.

Die beiden Discerptions-Probleme.

§. 34

Hat man eine der Gleichungen

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n; \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=n; \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=n; \text{ etc. etc.}$$

aufzulösen, wo die deutschen Buchstaben die Unbekannten vorstellen, während n Null oder eine positive ganze Zahl ist, unter der Bedingung, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. etc. selbst keine anderen

Werthe annehmen sollen, als Null oder positive ganze Zahlen, — und will man alle Auflösungen haben, welche die Gleichung zuläßt, so bilden die zusammengehörigen Werthe der Unbekannten das was man bezüglich die zweite, dritte, vierte etc. etc. Klasse der Variationen zur bestimmten Summe n nennt.

Diese Auflösungen bilden sich übrigens z. B. für $n = 5$ auf nachstehende Weise:

0005
0014
0023
0032
0041
0050

0104
0113
0122
0131
0140
0203
0212
0221
0230
0302
0311
0320
0401
0410
0500

1004
1013
1022
1031
1040
1103
1112
1121
1130
1202
1211
1220
1301
1310
1400
2003
2012
2021
2030
2102
2111
2120
2201
2210
2300
3002
3011
3020
3101
3110
3200
4001
4010
4100
5000

Die rechts oben abgetrennten sechs Verbindungen zu zweien enthalten alle Auflösungen der Gleichung $a + b = 5$; die nachgehends abgetrennten einundzwanzig Verbindungen zu dreien enthalten alle Auflösungen der Gleichung $a + b + c = 5$; endlich enthalten alle Verbindungen zu vieren die Auflösungen der Gleichung $a + b + c + d = 5$.

Vermehrte man alle Elemente um 1, so würden die erstern sechs Verbindungen zu zweien die Auflösungen der Gleichung $a + b = 7$; die einundzwanzig Verbindungen zu dreien die Auflösungen der Gleichung $a + b + c = 8$; und alle Verbindungen zu vieren die Auflösungen der Gleichung $a + b + c + d = 9$ unter der Voraussetzung vorstellen, daß keine Null-Werthe zugelassen werden.

Will man daher die m^{te} Klasse der Variationen zur bestimmten Summe n mit Ausschließung der Null-Werthe entwickeln, so darf man nur nach dem nebenstehenden Vorbilde die m^{te} Klasse der Variationen zur Summe $n - m$ entwickeln, indem man den Null-Werthen freien Zutritt gestattet, — dann aber jedes einzelne Element um eine Einheit erhöhen.

§. 35.

Nimmt man von den Verbindungen der m^{ten} Klasse der Variationen zur Summe n, nur die **wohlgeordneten** Verbindungen, so erhält man die m^{te} Klasse der **Combinationen zur Summe** n.

Z. B. für $n = 5$ werden diese **Combinationen** zur bestimmten Summe 5 folgende

```
0|0|0 5
0|0|1 4
0|0|2 3
   -----
0|1 1 3
0|1 2 2
 -------
1 1 1 2
```

wo man die **zweite** Klasse und die **dritte** Klasse abgetrennt erblickt, während das ganze Schema die vierte Klasse bildet.

Was bei den Variationen für den Fall gesagt worden ist (§. 34.), daß die Null-Werthe ausgeschlossen werden sollen, gilt auch für die Combinationen.

Anmerkung. Diese beiden Probleme sind aber in der Geschichte der Mathematik auch unter dem Namen der beiden **Discerptions-Probleme** bekannt. — Man kann sie noch verallgemeinern und eine Zahl n aus zwei, drei, vier, etc. etc. der Zahlen a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, etc. etc. auf alle möglichen Arten zusammensetzen, und zwar sowohl nur wohlgeordnete Verbindungen (Combinationen) oder letztere zugleich mit allen Versetzungen (Variationen) bilden, das ganze Verfahren aber auf das in den §§. 34. und 35.) entwickelte zurückführen. (Ausführlicheres hierüber findet man im „System d. Mathem." Th. II. 2te Aufl. Kap. XVI.).

Drittes Kapitel.

Der binomische Lehrsatz für Differenz-Potenzen und für ganze Faktoriellen.

I. Der binomische Lehrsatz für Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 36.

Multiplicirt man $x+h$ mit $x+h$, was herauskommt wieder mit $x+h$, und so weiter fort, so erhält man nachstehende Rechnung

$$\begin{array}{l}
x+h \\
x+h \\
\hline
x^2+xh \\
\quad +xh+h^2 \\
\hline
(x+h)^2=x^2+2xh+h^2 \\
\qquad\qquad x+h \\
\hline
x^3+x^2h \\
\quad +2x^2h+2xh^2 \\
\qquad\quad +xh^2+h^3 \\
\hline
(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \\
\qquad\qquad\qquad x+h \\
\hline
x^4+x^3h \\
\quad +3x^3h+3x^2h^2 \\
\qquad +3x^2h^2+3xh^3 \\
\qquad\qquad +xh^3+h^4 \\
\hline
(x+h)^4=x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x+h \\
\hline
x^5+x^4h \\
\quad +4x^4h+4x^3h^2 \\
\qquad +6x^3h^2+6x^2h^3 \\
\qquad\qquad +4x^2h^3+4xh^4 \\
\qquad\qquad\qquad +xh^4+h^5 \\
\hline
(x+h)^5=x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5.
\end{array}$$

Es ist jedes Glied zuerst mit x, dann sogleich mit h multiplicirt. Beide Glieder in jeder Linie haben daher allemal den Koefficienten des Gliedes, welches multiplicirt wurde.

Man braucht die Multiplikation nicht weiter fortzusetzen, um einzusehen, daß jedes neue Resultat in jedem r^{ten} Gliede zum Koefficienten hat die Summe des r^{ten} und des $(r-1)^{ten}$ Gliedes

des nächst vorhergehenden Resultates. — Daraus folgt, daß man durch fortgesetztes Multipliciren, für $(a+b)^m$ erhalten werde eine Summe von der Form

$$x^m + m_1 \cdot x^{m-1}h + m_2 \cdot x^{m-2}h^2 + m_3 \cdot x^{m-3}h^3 + \ldots$$
$$+ m_r \cdot x^{m-r}h^r + \ldots + h^m,$$

in welcher die unbekannten, aber offenbar von der Zahl m abhängigen Koefficienten einstweilen durch m_1, m_2, m_3, m_4, ... m_r, etc. etc. bezeichnet sind, dergestalt, daß die Koefficienten der nächst vorhergehenden $(m-1)^{ten}$ Potenz von $x+h$, eben weil sie aus den letztern hervorgehen müssen, wenn man $m-1$ statt m setzt, durch $(m-1)_1$, $(m-1)_2$. $(m-1)_3$, ... $(m-1)_r$ bezeichnet, aber deshalb noch nicht bekannt seyn werden.

Man kann nun Versuchsweise Ausdrücken (angezeigten Operationen) nachspüren, die der oben bei'm Multipliciren bemerkten Eigenschaft genügen, nach welcher

$$m_r = (m-1)_r + (m-1)_{r-1}$$

seyn muß, — und unter den mehreren, die man vielleicht für jedes dieser Zeichen m_r auffindet*), diejenigen heraussuchen, welche wenigstens in einem Falle (d. h. für einen Werth von m) mit den Resultaten der direkten Multiplikation übereinstimmen. Dann hat man die Vermuthung für sich, daß diese Koefficienten die richtigen seyn möchten.

---

*) Nimmt man z. B.

$$p \cdot \frac{m^{r|-1}}{r!} \text{ statt } m_r, \text{ so bekommt man}$$

$$p \cdot \frac{(m-1)^{r|-1}}{r!} \text{ statt } (m-1)_r$$

und

$$p \cdot \frac{(m-1)^{r-1|-1}}{(r-1)!} \text{ statt } (m-1)_{r-1};$$

und in der That findet sich, daß, wenn man diese letztern beiden Ausdrücke nach den Regeln der Buchstaben-Rechenkunst addirt, der erstere wieder herauskommt, während p jeden Werth haben kann.

Auf diesem Wege findet man

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} \cdot x^{m-1}h + \frac{m^{2|-1}}{2!} \cdot x^{m-2}h^2 + \frac{m^{3|-1}}{3!} \cdot x^{m-3}h^3 + \cdots + \frac{m^{r|-1}}{r!} \cdot x^{m-r}h^r + \ldots\ldots + \frac{m^{m|-1}}{m!} \cdot h^m \; {}^{*)}.$$

Dieser Satz heißt der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten. — So wie er hier aufgefunden worden ist, ist er noch nicht hinreichend begründet; man kann ihn aber nun als einen Lehrsatz hinstellen und (auf dem „Wege der vollkommenen Induktion“) noch vollständig beweisen**). — Die Koefficienten dieser Entwicklung zur Rechten heißen die Binomial-Koefficienten.

§. 37.

Der im vorstehenden Paragraphen betretene Weg ist der geschichtliche; der nachstehende combinatorische der einfachere.

Da nämlich das Multipliciren mit $x+h$ nichts weiter als ein abwechselndes Vorsetzen des x und des h ist, vor jedes zu multiplicirende Glied, so ist $(x+h)^m$ nichts anders als die $m$te Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus den beiden

---

*) In der That: addirt man die beiden Koefficienten $\frac{(m-1)^{r|-1}}{r!}$ und $\frac{(m-1)^{r-1|-1}}{(r-1)!}$ (nämlich den r^{ten} und den $(r-1)^{ten}$) der nächstvorhergehenden $(m-1)^{ten}$ Potenz, so ergiebt sich wirklich als Endresultat der Ausdruck $\frac{m^{r|-1}}{r!}$. Und setzt man 2, 3, 4 oder 5 statt m, so kommen in der That die durch direktes Multipliciren erhaltenen Resultate wieder.

**) Gesetzt nämlich es wäre für einen einzigen Werth μ von m wirklich

$$(x+h)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1} \cdot x^{\mu-1}h + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} \cdot x^{\mu-2}h^2 + \cdots,$$

so würde man diese Gleichung noch mit $x+h$ multipliciren, und erhielte sogleich $(x+h)^{\mu+1}$ in eine Reihe verwandelt, deren jeder Koefficient die Summe zweier Koefficienten der vorstehenden Reihe ist, so daß, wegen des Resultats in vorstehender Note, dieselben Koefficienten des Lehrsatzes wiederkehren, für $m = \mu + 1$.

Elementen x und h entwickelt, sobald man die einzelnen Verbindungen als Produkte ansieht und zu einander addirt sich denkt. Weil aber alle Produkte einander gleich sind, welche aus denselben, nur verschiedentlich angeordneten Faktoren bestehen, und weil zugleich die Variations-Klasse erhalten wird, wenn man die m^{te} Combinations-Klasse nimmt, und jede Verbindung zugleich mit allen ihren Versetzungen, so wird man $(x+h)^m$ erhalten, wenn man aus x und h die m^{te} Combinations-Klasse entwickelt und jede einzelne Verbindung als Produkt angesehen so oft nimmt, als sie sich verschiedentlich anordnen läßt. — Nun ist aber die m^{te} Klasse der Combinationen offenbar so:

$$x^m,\ x^{m-1}h,\ x^{m-2}h^2,\ \cdots,\ x^{m-r}h^r,\ \cdots,\ h^m.$$

Nehmen wir davon die Verbindung $x^{m-r}h^r$, welche, je nachdem 0, 1, 2, 3, ⋯ oder m statt r gesetzt wird, alle die übrigen Verbindungen repräsentirt, und suchen wir die Anzahl der Versetzungen, die sie zuläßt, so finden wir (nach §. 30.) die Zahl $\frac{m!}{(m-r)!\ r!}$, — oder, wenn man Zähler und Nenner mit $(m-r)!$ wegdividirt, und die bleibenden Faktoren im Zähler rückwärts liest, $\frac{m^{r|-1}}{r!}$. — Folglich ist $(x+h)^m$ einer Summe von Gliedern gleich, deren jedes einzelne durch $\frac{m^{r|-1}}{r!}\cdot x^{m-r}h^r$ vorgestellt ist, und welche alle aus diesem allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man nach und nach 0, 1, 2, 3, und alle folgenden ganzen Zahlen statt r setzt. Dies giebt aber genau wieder den Satz ⊙ des §. 36.).

Derselbe binomische Lehrsatz läßt sich auch so schreiben:

$$\text{II.}\qquad (x+h)^m = S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{m-\mathfrak{b}}\cdot h^{\mathfrak{b}}\right],$$

indem wir den kleinen deutschen Buchstaben allein das Recht vorbehalten nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen-Werthe anzunehmen und durch das vorgesetzte

S die Summe aller dadurch hervorgehenden Glieder andeuten *). Auch kann man denselben Satz nun noch so schreiben:

$$\text{III.}\quad (x+h)^m = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{a}}h^{\mathfrak{b}}\right] = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{a}}h^{\mathfrak{b}}\right]$$

in so fern die deutschen Buchstaben 0 und alle ganzen (positiven) Zahlen-Werthe annehmen, die untergesetzte Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$ dagegen alle diejenigen Verbindungen ausschließt, deren Summe nicht $= m$ ist. Dies giebt für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Werthe, welche die zweite Klasse der Variationen zur bestimmten Summe m liefert; und daraus gehen wieder alle Glieder der Entwicklung von $(x+h)^m$ hervor.

§. 38.

Setzt man 1 statt x, und b statt h, so nimmt dieser binomische Lehrsatz noch die Form an:

$$\text{I.}\quad (1+b)^m = 1+\frac{m}{1}\cdot b+\frac{m^{2|-1}}{2!}\cdot b^2+\frac{m^{3|-1}}{3!}\cdot b^3+\frac{m^{4|-1}}{4!}\cdot b^4+\cdots$$

oder

$$\text{II.}\qquad (1+b)^m = S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right],$$

während es nicht einmal nöthig ist die Anzahl der Glieder näher anzugeben, weil, so wie der m^{te} Binomial-Koefficient $\frac{m^{m|-1}}{m!}$ erscheint, welcher $=1$ ist, jeder folgende dann die Null im Zähler erhält, folglich selbst der Null gleich wird.

Setzt man aber in dieser Gleichung, $\frac{h}{x}$ statt b, und multiplicirt man noch links und rechts mit x^m, so erhält man sogleich wieder hieraus auch die Resultate I. und II. der §§. 36. und 37.), nämlich die Entwicklungen von $(x+h)^m$.

Anmerkung. Wenn man die Schlüsse des §. 37.) wiederholt, so findet man auch noch

*) Ueber diese Bezeichnungs-Weise findet man sehr ausführliches im „System der Math." Th. II. Zweite Aufl. Kap. XVII.

$$1) \qquad (a+b+c)^m = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m},$$

wo statt $\frac{m!}{\mathfrak{a}!}$ auch $m^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|-1}$, so wie noch $m-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{a}$, geschrieben werden kann, in welchem Falle die untergesetzte Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m$ überflüssig wird; ferner

$$2) \qquad (a+b+c+d)^m = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!\ \mathfrak{d}!}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}}d^{\mathfrak{d}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m},$$

wo man statt $\frac{m!}{\mathfrak{a}!}$ auch $m^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}|-1}$ und statt $\mathfrak{a}$ auch $m-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}$ schreiben kann, in welchem Falle die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m$ ganz überflüssig wird, wenn man nur statt der deutschen Buchstaben 0 und alle ganzen Zahlen setzt. U. s. w. f.

Wollte man danach $(a+b+c)^4$ entwickeln, so würde man nach 1.) zuerst der Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=4$ genügen dadurch, daß man die dritte Klasse der Variationen zur bestimmten Summe 4 entwickelte, nämlich

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$	$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$	$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$
0 0 4	1 0 3	2 1 1
0 1 3	1 1 2	2 2 0
0 2 2	1 2 1	3 0 1
0 3 1	1 3 0	3 1 0
0 4 0	2 0 2	4 0 0

Man bekommt dann, wenn man diese Werthe von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in das allgemeine Glied (in 1.) nach und nach substituirt, die 15 Glieder, deren Summe $=(a+b+c)^4$ ist, nämlich, wenn man alle Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt

$$(a+b+c)^4 = a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c$$
$$+12abc^2+4ac^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4.$$

Als eine Probe, ob man richtig gerechnet habe, setze man in dieser Gleichung $a=b=c=1$, so kommt links 3^4 oder 81; also muß rechts die Summe aller 15 Koefficienten gerade 3^4 oder 81 betragen. — Und dieses trifft in der That zu.

Den Satz 1.) nennt man den *trinomischen*, den Satz 2.) dagegen den *quadrinomischen* Lehrsatz. — Man begreift wie augenblicklich ein *polynomischer* Lehrsatz auf demselben Wege entwickelt wird, wenn man sich nämlich die Aufgabe stellt

$$(a+b+c+d+e+f+\cdots)^m$$

zu entwickeln und dazu den Weg der Combinationen wählt.

Der binomische Lehrsatz für ganze Faktoriellen.

§. 39.

Statt lauter gleiche Faktoren $x+h$, $x+h$, $x+h$ etc. etc., wollen wir nun einmal die äquidifferenten Faktoren $x+h$, $x+h+d$, $x+h+2d$, $x+h+3d$, u. s. w. f. mit einander multipliciren, übrigens den ganz analogen Weg betreten, wie im §. 36.); dann erhält man nachstehende Rechnung:

$$\begin{array}{l} x+h \\ x+h+d \\ \hline x(x+d)+xh \\ \quad +xh+h(h+d) \end{array}$$

Man zerlegt $x+h+d$ einmal in $(x+d)+h$, wenn das erste Glied x multiplicirt wird, — dann in $x+(h+d)$, sobald das zweite Glied h multiplicirt wird.

$$(x+h)^{2|d} = x^{2|d}+2x^{1|d}\cdot h^{1|d}+h^{2|d}.$$

$$\begin{array}{l} \quad x+h+2d \\ \hline x^{2|d}\cdot(x+2d)+x^{2|d}\cdot h \\ \quad +2x^{1|d}\cdot(x+d)\cdot h^{1|d}+2x^{1|d}\cdot h^{1|d}(h+d) \\ \quad + x\cdot h^{2|d} + h^{2|d}\cdot(h+2d) \end{array}$$

Man zerlegt $x+h+2d$ in $(x+2d)+h$, wenn das erste Glied multiplicirt werden soll; dann in $(x+d)+(h+d)$, wenn das zweite Glied zu multipliciren ist, — zuletzt in $x+(h+2d)$ bei dem Multipliciren des dritten Gliedes.

$$(x+h)^{3|d} = x^{3|d}+3x^{2|d}\cdot h^{1|d}+3x^{1|d}\cdot h^{2|d}+h^{3|d}.$$

$$\begin{array}{l} \quad x+h+3d\ ^{*)} \\ \hline x^{3|d}\cdot(x+3d)+x^{3|d}\cdot h \\ \quad +3x^{2|d}\cdot(x+2d)\cdot h^{1|d}+3x^{2|d}\cdot h^{1|d}\cdot(h+d) \\ \quad +3x^{1|d}(x+d)\cdot h^{2|d}+3x^{1|d}\cdot h^{2|d}\cdot(h+2d) \\ \quad + x\cdot h^{3|d}+h^{3|d}\cdot(h+3d) \end{array}$$

$$(x+h)^{4|d} = x^{4|d}+4x^{3|d}\cdot h^{1|d}+6x^{2|d}\cdot h^{2|d}+4x^{1|d}\cdot h^{3|d}+h^{4|d}.$$

$$\begin{array}{l} \quad x+h+4d\ ^{**)} \\ \hline x^{5|d}+x^{4|d}\cdot h^{1|d} \\ \quad +4x^{4|d}\cdot h^{1|d}+4x^{3|d}\cdot h^{2|d} \\ \quad +6x^{3|d}\cdot h^{2|d}+6x^{2|d}\cdot h^{3|d} \\ \quad +4x^{2|d}\cdot h^{3|d}+4x^{1|d}\cdot h^{4|d} \\ \quad + x^{1|d}\cdot h^{4|d}+h^{5|d} \end{array}$$

$$(x+h)^{5|d} = x^{5|d}+5x^{4|d}\cdot h^{1|d}+10x^{3|d}\cdot h^{2|d}+10x^{2|d}\cdot h^{3|d}+5x^{1|d}\cdot h^{4|d}+h^{5|d}.$$

u. s. w. f.

---

*) Man zerlegt $x+h+3d$ in $(x+3d)+h$, oder in $(x+2d)+(h+d)$, oder in $(x+d)+(h+2d)$, oder in $x+(h+3d)$, je nachdem das erste, zweite, dritte oder vierte Glied des Multiplikanden an die Reihe kommt.

**) Man zerlegt $x+h+4d$ bald in $(x+4d)+h$, bald in $(x+3d)$

Dieses Schema mit dem des §. 36.) verglichen läßt aber überzeugend erkennen, daß man genau dieselben Koefficienten bekommen wird, wie bei den Potenzen von $x+h$, daß man also allgemein finden wird

$$\text{I.}\quad (x+h)^{m|d} = x^{m|d} + \frac{m}{1} \cdot x^{m-1|d} \cdot h^{1|d} + \frac{m^{2|-1}}{2!} \cdot x^{m-2|d} \cdot h^{2|d} + \dots$$

$$\dots + \frac{m^{r|-1}}{r!} \cdot x^{m-r|d} \cdot h^{r|d} + \dots + h^{m|d};$$

und dieser Satz heißt der „binomische Lehrsatz für ganze Faktoriellen".

Auch dieser Satz läßt sich dann noch so schreiben:

$$\text{II.}\quad (x+h)^{m|d} = S\left[\frac{m^{b|-1}}{b!} \cdot x^{m-b|d} \cdot h^{b|d}\right]$$

und auch noch so

$$\text{III.}\quad (x+h)^{m|d} = S\left[\frac{(a+b)^{b|-1}}{b!} \cdot x^{a|d} \cdot h^{b|d}\right]_{a+b=m},$$

während, unter der Bedingung daß $a+b=m$ ist, allemal auch $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$ statt $\frac{(a+b)^{b|-1}}{b!}$ geschrieben werden kann.

§. 40.

Die nächste Anwendung, welche man von diesem binomischen Lehrsatze für ganze Faktoriellen macht, betrifft Ausdrücke von der Form der Binomial-Koefficienten $\frac{m^{r|-1}}{r!}$ selber, weil solche im Zähler Faktoriellen mit der Differenz -1 enthalten, — jedoch diese Ausdrücke hier für jedes unbestimmte m genommen. — Setzt man nämlich in I. des §. 39.) -1 statt d, und, wenn man will, auch noch z statt h, und dividirt man

---

$+(h+d)$, dann in $(x+2d)+(h+2d)$, hernach in $(x+d)+(h+3d)$, zuletzt aber in $x+(h+4d)$, je nachdem das erste, zweite, dritte, vierte oder fünfte Glied des Multiplikanden an die Reihe kommt.

noch die Gleichung durch m!, so erhält man sogleich, wenn man nicht übersieht, daß $\frac{m^{r|-1}}{r!}$ nichts anders als $\frac{m!}{(m-r)!\,r!}$ ist,

IV.
$$\frac{(x+z)^{m|-1}}{m!} = \frac{x^{m|-1}}{m!} + \frac{x^{m-1|-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{z^{1|-1}}{1!} + \frac{x^{m-2|-1}}{(m-2)!}\cdot\frac{z^{2|-1}}{2!} + \cdots$$
$$+ \frac{x^{m-r|-1}}{(m-r)!}\cdot\frac{z^{r|-1}}{r!} + \cdots + \frac{z^{m|-1}}{m!};$$

oder, bequemer geschrieben,

$$\frac{(x+z)^{m|-1}}{m!} = \left[\frac{x^{a|-1}}{a!}\cdot\frac{z^{b|-1}}{b!}\right]_{a+b=m}.$$

Diese Formel IV.) gilt aber, so oft m eine positive ganze Zahl ist, während x und z ganz allgemein gedacht sind; und nur in dem besondern Falle, wo x und z selbst wieder positive ganze Zahlen sind, stellen die Ausdrücke $\frac{x^{a|-1}}{a!}$, $\frac{z^{b|-1}}{b!}$ und $\frac{(x-z)^{m|-1}}{m!}$ bezüglich den a^{ten}, b^{ten} und m^{ten} Binomial-Koeffizienten vor, bezüglich von den Potenzen $(a+b)^x$, $(a+b)^z$ und $(a+b)^{x+z}$. — Ausführlicheres hierüber findet man im „Syst. d. Math." Th. II. zweite Aufl. Kap. XVIII.).

Beweis des binomischen Lehrsatzes für Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.

§. 41.

Ist x eine *positive*, also $-x$ eine *negative* ganze Zahl, so ist

$$(1+b)^{-x} = \frac{1}{(1+b)^x} \quad \text{oder} \quad (1+b)^{-x} \times (1+b)^x = 1.$$

Wollte man nun untersuchen, ob der binomische Lehrsatz des §. 36.) auch in dem Falle noch wahr ist, wenn statt des Exponenten der Potenz eine negative ganze Zahl gesetzt wird, so dürfte man nur untersuchen, ob die beiden Reihen

$$1)\ 1+\frac{(-x)}{1}\cdot b+\frac{(-x)^{2I-1}}{2!}\cdot b^2+\frac{(-x)^{3I-1}}{3!}\cdot b^3+\frac{(-x)^{4I-1}}{4!}\cdot b^4+\cdots$$

und

$$2)\ 1+\frac{x}{1}\cdot b+\frac{x^{2I-1}}{2!}\cdot b^2+\frac{x^{3I-1}}{3!}\cdot b^3+\frac{x^{4I-1}}{4!}\cdot b^4+\cdots$$

mit einander multiplicirt, und wenn man sich bemüht, das Resultat nach den ganzen Potenzen von b zu ordnen, — lauter Null-Glieder giebt, bis auf das allererste Glied, welches 1 wird. Multiplicirt man aber die beiden Reihen wirklich mit einander, so erhält man zum Koefficienten des m^{ten} Gliedes (welches den Faktor b^m hat) offenbar, wie die ausgeführte Rechnung sogleich zeigt,

$$\frac{x^{mI-1}}{m!}+\frac{x^{m-1I-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{(-x)^{1I-1}}{1!}+\frac{x^{m-2I-1}}{(m-2)!}\cdot\frac{(-x)^{2I-1}}{2!}+\cdots$$
$$+\cdots\cdots+\frac{x^{2I-1}}{2!}\cdot\frac{(-x)^{m-2I-1}}{(m-2)!}+\frac{x^{1I-1}}{1!}\cdot\frac{(-x)^{m-1I-1}}{(m-1)!}+\frac{(-x)^{mI-1}}{m!};$$

und dieser Koefficient ist (nach §. 40. IV.)

$$=\frac{(x-x)^{mI-1}}{m!}\ \text{d. h.}=0,$$

so lange m irgend eine positive ganze Zahl ist. Also geben die beiden Reihen 1.) und 2.) mit einander multiplicirt, wirklich genau die Einheit, während die Reihe 2.) nichts anders als $(1+b)^x$ ist. Folglich ist die Reihe 1.) offenbar $=\frac{1}{(1+b)^x}$ d. h. $=(1+b)^{-x}$; und so sieht sich also der binomische Lehrsatz für Potenzen, auch erwiesen, so oft der Exponent eine negative ganze Zahl ist, und zwar ganz allgemein, da man in der Gleichung, welche $(1+b)^{-m}$ entwickelt darstellt, bloß $\frac{h}{x}$ statt b setzen, und dann die ganze Gleichung mit x^{-m} multipliren darf, um sogleich auch die Entwicklung von $(x+h)^{-m}$ so zu

haben, wie sie der Satz §. 36. I.) oder §. 37. II.) liefern würde, wenn man $-m$ statt m setzte (Vgl. §. 38.).

Anmerkung. Es ist nur zu bemerken, daß während die Reihe 2.) eine endliche Anzahl $(x+1)$ von Gliedern hat, so oft x eine positive ganze Zahl ist, die Reihe 1.) allemal eine unendliche Anzahl von Gliedern enthält, da keiner der folgenden Koefficienten der Null gleich wird. Soll daher das in dem vorliegenden §. 41.) Gesagte gehörig gründlich seyn, so muß man vorher von den unendlichen Reihen überhaupt gesprochen haben. — Das nächste Kapitel mag nun solches nachholen.

Viertes Kapitel.

Von den unendlichen Reihen im Allgemeinen. Beweis des binomischen Lehrsatzes für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 42.

Wird ein Ausdruck von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

in welchem a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, etc. etc. beliebig gegebene Koefficienten vorstellen, ohne Ende fortgehend gedacht, so heißt er eine „nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe", oder, in so fern wir andere als nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihen zunächst gar nicht betrachten, eine „unendliche Reihe nach x" schlechtweg. — Geht aber derselbe Ausdruck nur bis zu einem bestimmten Gliede $a_n \cdot x^n$ fort, so heißt er eine endliche Reihe oder auch eine ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade.

Diese unendliche Reihe heißt eine allgemeine, so lange x noch keinen bestimmten Werth angenommen hat, wenn auch die Koefficienten a_0, a_1, a_2, etc. etc. bereits bestimmte (Ziffern-) Werthe haben. Sie wird dagegen eine numerische Reihe genannt, wenn nicht bloß die Koefficienten, sondern x selbst einen bestimmten (Ziffern-) Werth angenommen haben.

Eine numerische Reihe mit reellen Gliedern heißt convergent, wenn die Summe ihrer n ersten Glieder, für $n = \infty$ (d. h. wenn n unendlich groß gedacht wird) nicht selbst unendlich groß und auch nicht unbestimmt wird, sondern einen bestimmten reellen Werth annimmt; oder, mit andern Worten, wenn die Summe aller nach dem n^{ten} Gliede folgenden Glieder, dadurch

daß

daß man n immer größer und größer nimmt, kleiner wird als jede noch so klein gedachte bestimmte Zahl*). — Im entgegengesetzten Falle heißt dieselbe numerische Reihe divergent.

Jeder periodische Decimalbruch, z. B.

3,045970459704597045970 45......

ist eine convergente numerische unendliche Reihe, weil die Summe aller unendlich vielen Glieder doch kleiner ist als z. B. 3,04598, und namentlich auch kleiner als 3,1.

Eine allgemeine Reihe ist eben deshalb, weil sie allgemein ist, weder convergent noch divergent.

Jede endliche Reihe kann man auch allemal als eine unendliche Reihe ansehen, deren spätere Koefficienten alle der Null gleich geworden sind.

§. 43.

Da das „Rechnen" nichts anders ist als ein Umformen der Ausdrücke, die allgemeinen unendlichen Reihen nach x aber als solche eine völlig bestimmte Form haben, so kann man mit ihnen ohne Weiteres rechnen, indem man diejenigen Gesetze der algebraischen Summen auf sie in Anwendung bringt, welche unabhängig von der Anzahl der Glieder derselben gelten, und alle Resultate immer wieder nach x ordnet. Die Resultate, welche man dann erhält, sind alle nothwendig richtig, ohne daß man sich darum zu bekümmern braucht oder darum bekümmern kann, ob diese unendlichen Reihen convergent oder divergent sind**).

---

*) Es giebt auch numerische Reihen, deren Glieder so periodisch wiederkehren, daß die Summe von n Gliedern nie unendlich groß wird, während sie selbst doch nie zu den convergenten Reihen gezählt werden kann. Dahin gehört die Reihe, welche aus

$$1+z\cdot\cos x+z^2\cdot\cos 2x+z^3\cdot\cos 3x+z^4\cdot\cos 4x+z^5\cdot\cos 5x+\ldots\ldots$$

hervorgeht, wenn $z=1$ und $x=\frac{1}{2}\pi=90°$ gesetzt wird. Sie wir dann

$$1+0-1-0+1+0-1-0+1+ \text{ in infinit.}$$

und sie ist, der obigen Definition zu Folge, nicht zu den convergenten Reihen zu zählen.

**) Die älteren Analysten und selbst Euler noch, rechneten mit

Ganz anders ist es mit den numerischen unendlichen Reihen. Bei ihnen ist die Form (die Folge der angezeigten Operationen), welche allein Gegenstand des „Rechnens" ist, in der Regel verloren gegangen; — sind sie daher zu gleicher Zeit divergent, so hört alles „Rechnen" mit ihnen auf, und sie hören auf Gegenstand mathematischer Untersuchungen zu seyn. Sind sie aber convergent, so giebt es eine reelle (positive oder negative, rationale oder irrationale) Zahl, welche einer solchen Reihe gleich ist, und mit letzterer (aber nicht mit der unendlichen Reihe als solcher) kann man natürlich wieder rechnen.

§. 44.

I. Eine unendliche und allgemeine Reihe nach x, z. B.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

kann (während x ganz unbestimmt bleiben soll) nie der Null gleich seyn, wenn nicht jeder einzelne Koefficient für sich der Null gleich ist, d. h. wenn nicht $a_0=0$; $a_1=0$; $a_2=0$; $a_3=0$; $a_4=0$; etc. etc. ist.

Denn man erkennt die Richtigkeit einer Gleichung

1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=0$$

daran, daß man alle indirekten Operationen (namentlich alle Divisionen), dann alle Klammern wegschafft, und wenn dann auf jeder Seite des Gleichheits-Zeichens genau eine und dieselbe Form steht. Gesetzt nun, der General-Nenner aller Koefficienten (da x selbst nur auf direkte Weise, nämlich durch Multiplikation und Addition verbunden erscheint) wäre N, so würde die Gleichung 1.) die Form annehmen

2) $$a_0N+a_1N\cdot x+a_2N\cdot x^2+a_3N\cdot x^3+\cdots=0,$$

wo man sich in den Koefficienten bereits alle Klammern aufgelöst denken kann. Ist nun die Gleichung 1.) richtig, so muß in der Gleichung 2.) links und rechts des =Zeichens eine und dieselbe Form stehen; also müssen links alle einzelnen Glieder, d. h. alle einzelnen Koefficienten der Null gleich seyn, weil sonst links nicht Null stände, sondern etwas anders. Mit

$$a_0N=0,\quad a_1N=0,\quad a_2N=0,\quad a_3N=0,\ \text{etc. etc.}$$

---

divergenten Reihen. Die neueste Schule verfällt oft in den entgegengesetzten Fehler und getraut sich nicht mit allgemeinen Reihen zu rechnen, sondern will, daß sie alle convergent seyen. Wäre aber dies nöthig, so würde oft alles Rechnen aufhören.

ist aber zu gleicher Zeit, wenn nicht $N=0$ ist, auch

$$a_0=0,\quad a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_3=0,\ \text{etc. etc.}$$

Man darf nur nicht übersehen, daß die Gleichung 2.) nur direkte Operationen enthält, mittelst welcher die einzelnen Glieder verbunden sind, die sich nie gegenseitig vernichten.

II. Daraus folgt aber sogleich noch:

Sind zwei unendliche und allgemeine Reihen nach x, nämlich

1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$$

und

2) $$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\cdots$$

einander gleich (während x völlig unbestimmt bleiben soll), so müssen die Koefficienten einzeln einander gleich seyn, nämlich

$$a_0=b_0;\quad a_1=b_1;\quad a_2=b_2;\quad a_3=b_3;\ \text{etc. etc.}$$

Denn, subtrahirt man beide Reihen von einander, so ist die neue Reihe der Null gleich. Also tritt I.) ein.

III. Diese beiden vorstehenden Sätze gelten auch, wenn statt der unendlichen Reihen endliche Reihen gedacht werden, weil man statt letzterer immer unendliche setzen kann, deren spätere Koefficienten alle der Null gleich sind.

§. 45.

Werden zwei unendliche und allgemeine Reihen nach x zu einander addirt, von einander subtrahirt, oder mit einander multiplicirt, so kann man die Resultate sogleich wieder in eben solche Reihen umformen.

Soll aber der Quotient zweier solcher Reihen, nämlich

I. $$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots}$$

in eine eben solche Reihe umgeformt werden, so kann man die gemeine Division der algebraischen Summen, d. h. die Formel $\frac{A}{B}=z+\frac{A-Bz}{B}$ in Anwendung bringen, indem man bei jeder wiederholten Anwendung derselben zum ersten Summanden z das nimmt, was man jedesmal erhält, wenn man das erste Glied des jedesmaligen Dividenden durch das erste Glied b_0

des Divisors dividirt. Die Ausführung zeigt sich ohne Ende fort als möglich, wenn nur nicht $b_0 = 0$ ist. Die unendliche Reihe, welche als Resultat gefunden wird, mit dem Divisor $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ ohne Ende fort multiplicirt, giebt den Dividenden $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ohne Ende fort.

Man kann aber dasselbe Resultat durch ein Verfahren erhalten, welches man die „Methode der unbestimmten Koefficienten" nennt, und welches wir hier noch näher beschreiben wollen.

Da man die Form des Resultats, nämlich

II. $$K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + K_4 x^4 + \cdots$$

schon kennt, so braucht man nur noch die Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. etc. der Bedingung gemäß zu finden, daß das Resultat II.) dem Quotienten I.) gleich seyn soll, d. h. daß das Produkt aus der Reihe II.) und dem Divisor in I.) völlig einerlei wird mit dem Dividenden in I.).

Multiplicirt man aber, so erhält man

III. $$b_0 K_0 + (b_1 K_0 + b_0 K_1) \cdot x + (b_2 K_0 + b_1 K_1 + b_0 K_2) \cdot x^2 + (b_3 K_0 + b_2 K_1 + b_1 K_2 + b_0 K_3) \cdot x^3 + \cdots$$

Soll nun dieses Resultat mit dem Dividenden in I.) zusammenfallen, so müssen die gesuchten Koefficienten K_0, K_1, K_2 K_3, etc. etc. so beschaffen seyn, daß die einzelnen Koefficienten der Reihe III.) und des Dividenden in I.) dieselben werden (nach §. 44. II.). Folglich muß man nehmen

1) $b_0 K_0 = a_0$;

2) $b_1 K_0 + b_0 K_1 = a_1$;

3) $b_2 K_0 + b_1 K_1 + b_0 K_2 = a_2$;

4) $b_3 K_0 + b_2 K_1 + b_1 K_2 + b_0 K_3 = a_3$;

u. s. w. f. bis in's Unendliche. — Und aus diesen Gleichungen lassen sich dann auf dem Wege der gemeinen Algebra nach und nach die einzelnen Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. bis in's Unendliche fort ohne Weiteres finden *).

---

*) Setzt man $a_0 = 1$, die übrigen Koefficienten a_1, a_2, etc. etc. der-

§. 46.

Man kann nun auch eine unendliche und allgemeine Reihe

(R)... $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

mit einer ganzen Zahl m potenziren d. h. die Potenz wiederum in eine nach x geordnete unendliche Reihe umformen, in so fern man m Faktoren sich denkt, die alle mit einander multiplicirt werden, oder in so fern man die Reihe R als ein Binomium sich denkt aus a_0 und der Summe S aller übrigen Glieder, — dann

$$R^m = (a_0 + S)^m = a_0^m + m a_0^{m-1} \cdot S + \frac{m^{2|-1}}{2!} a_0^{m-2} \cdot S^2 + \cdots$$

nimmt, und zuletzt statt S, S^2, S^3, etc. etc. die nach x geordneten, bekannten oder durch Multiplikation zu erhaltenden Reihen substituirt, das ganze Resultat aber nach x ordnet.

Auf dem erstern Wege erhält man namentlich

$$1)\; R^2 = a_0^2 + 2a^0 a_1 \cdot x + \left|\begin{array}{l} 2a_0 a_2 \\ + a_1^2 \end{array}\right| \cdot x^2 + \left|\begin{array}{l} 2a_0 a_3 \\ + 2a_1 a_2 \end{array}\right| \cdot x^3 + \left|\begin{array}{l} 2a_0 a_4 \\ + 2a_1 a_3 \\ + a_2^2 \end{array}\right| \cdot x^4 + \cdots$$

$$2)\; R^3 = a_0^3 + 3a_0^2 a_1 \cdot x + \left|\begin{array}{l} 3a_0^2 a_2 \\ + 3a_0 a_1^2 \end{array}\right| \cdot x^2 + \left|\begin{array}{l} 3a_0^2 a_2 \\ + 6a_0 a_1 a_2 \\ + a_1^3 \end{array}\right| \cdot x^3 + \left|\begin{array}{l} 3a_0^2 a_4 \\ + 6a_0 a_1 a_3 \\ + 3a_0 a_2^2 \\ + 3a_1^2 a_2 \end{array}\right| \cdot x^4 + \cdots$$

$$3)\; R^m = a_0^m + m a_0^{m-1} a_1 \cdot x \left|\begin{array}{l} + m a_0^{m-1} a_2 \\ + m_2 a_0^{m-2} a_1^2 \end{array}\right| \cdot x^2 + \left|\begin{array}{l} m a_0^{m-1} a_3 \\ + 2m_2 a_0^{m-2} a_1 a_2 \\ + m_3 a_0^{m-3} a_1^3 \end{array}\right| \cdot x^3 + \cdots,$$

wenn der Kürze wegen unter m_2, m_3, etc. etc. der 2te, 3te, etc. etc. Binominal-Koefficient der mten Potenz von $a + b$ verstanden wird.

---

gegen alle $= 0$; setzt man endlich statt b_0, b_1, b_2, etc. etc. der Reihe nach die Koefficienten der Entwicklung von $(1+x)^m$, so erhält man auf diesem Wege die Reihe für $\frac{1}{(1+x)^m}$ d. h. die Reihe für $(1+x)^{-m}$; dies ist aber die zu Ende des vorhergehenden Kapitels geführte Untersuchung.

Man findet aber von dem Resultate 1.) irgend einen der Koefficienten, z. B. den von x^8, wenn man die zweite Klasse der Combinationen zur Summe 8 entwickelt, nämlich 08, 17, 26, 35, 44; dann die Elemente dieser Verbindungen an a als Zeiger unten anhängt, zuletzt aber die Versetzungszahl der Verbindung als Faktor vorschreibt. Dies giebt

$$(2a_0a_8+2a_1a_7+2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2)x^8.$$

Eben so findet man in dem Resultate 2.) irgend einen der Koefficienten z. B. den von x^7, wenn man die dritte Klasse der Combinationen zur Summe 7 entwickelt, nämlich 007, 016, 025, 034, 115, 124, 133, 223; die Elemente jeder Verbindung an a als Zeiger hängt, und dem Ganzen die Versetzungs-Zahl noch als Faktor vorsetzt. Dies giebt

$$(3a_0^2a_7+6a_0a_1a_6+6a_0a_2a_5+6a_0a_3a_4+3a_1^2a_5+6a_1a_2a_4$$
$$+3a_1a_3^2+3a_2^2a_3)\cdot x^7.$$

In dem Resultate 3.) endlich wird jeder Koefficient gefunden, z. B. der von x^5, wenn man die m^{te} Klasse der Combinationen zur Summe 5 entwickelt, nämlich

$$0^{m-1}5,\quad 0^{m-2}14,\quad 0^{m-2}23,\quad 0^{m-3}113,\quad 0^{m-3}122,\quad 0^{m-4}1112;$$

dann wie oben verfährt, und die Versetzungs-Zahl als Faktor vorsetzt. Dies giebt

$$(ma_0^{m-1}a_5+m^{2|-1}a_0^{m-2}a_1a_4+m^{2|-1}a_0^{m-2}a_2a_3+\frac{m^{3|-1}}{2}a_0^{m-3}a_1^2a_3$$
$$+\frac{m^{3|-1}}{2}a_0^{m-3}a_1a_2^2+\frac{m^{4|-1}}{3!}a_0^{m-4}a_1^3a_2)\cdot x^5.$$

Der Grund dieses Verfahrens liegt aber wieder darin, daß man statt der Variationen aus den einzelnen Gliedern der mit einander zu multiplicirenden gleichen Reihen, bloß die Combinationen entwickeln darf, sobald man nur jede Verbindung der letztern so oft nimmt, als sie sich verschiedentlich anordnen läßt. Der Unterschied zwischen hier und dem im §. 37.) beschriebenen Verfahren liegt bloß darin, daß man hier die Glieder sogleich nach Potenzen von x ordnet, daher bei der Entwicklung eines (z. B. des mit x^n behafteten) Gliedes alle diejenigen Verbindungen nur nehmen darf, welche als Produkte angesehen, gerade nur diese Potenz x^n enthalten.

§. 47.

Mittelst der (im §. 45. beschriebenen) Methode der „unbestimmten Koefficienten" kann man auch unendliche Reihen finden, nicht welche gegebenen Ausdrücken gleich, sondern welche Repräsentanten gewisser Eigenschaften sind.

I. Es hat z. B. a^x die Eigenschaft, daß wenn man z statt x setzt, so daß man a^z erhält, dann diese beiden Potenzen mit

einander multiplicirt, gerade das herauskommt, was auch aus a^x hervorgeht, wenn $x+z$ statt x gesetzt wird (vorausgesetzt, daß a^x eine Differenz-Potenz oder eine reelle Potenz ist). — Suchen wir eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe R_x, welche dieselbe Eigenschaft hat, welche nämlich so ist, daß wenn man in ihr z statt x, und auch $x+z$ statt x setzt, — wodurch man zwei neue Reihen erhält, welche bezüglich durch R_z und R_{x+z} bezeichnet werden können, — dann $R_x \cdot R_z = R_{x+z}$ werde.

Es sey diese gesuchte Reihe

1) $R_x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$,

so ist die andere

2) $R_z = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$

und die dritte

3) $R_{x+z} = A_0 + A_1(x+z) + A_2(x+z)^2 + A_3(x+z)^3 + \cdots$,

während in allen dreien die Koefficienten A_0, A_1, A_2, etc. etc. dieselben Werthe behalten, die wir gerade suchen. Multiplicirt man aber die Reihen 1.) und 2.) mit einander, so erhält man eine nach x fortlaufende Reihe, deren Koefficienten selber wieder nach z fortlaufende Reihen sind, oder auch eine Reihe, die nach z fortläuft, während ihre Koefficienten wiederum nach x fortlaufende Reihen sind. — Eine solche heißt, um es hier nebenbei zu sagen, eine Doppel-Reihe. — Entwickelt man aber in der Reihe 3.) die einzelnen Potenzen von $x+z$ nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man wiederum eine solche Doppel-Reihe. Da nun diese beiden Doppel-Reihen nicht von einander verschieden seyn sollen, so müssen in beiden die einzelnen Koefficienten von z, welche wiederum Reihen sind, die nach Potenzen von x fortlaufen, einander gleich seyn. Nun ist aber in dem Produkte $R_x \cdot R_z$ der Koefficient von z, offenbar $A_1 \cdot R_x$ d. h.

4) $A_1 A_0 + A_1^2 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + A_1 A_4 x^4 + \cdots$,

während in der Reihe 3.) der Koefficient von z offenbar

5) $A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \cdots$

wird. Da nun auch diese beiden Reihen 4.) und 5.) (als die Koefficienten von z^1 in beiden Doppel-Reihen) einander gleich seyn müssen, so müssen wieder in diesen letztern die einzelnen Koefficienten von x einander gleich sein (immer nach §. 44.). Dies giebt die Gleichungen

6) $$A_1 \cdot A_0 = A_1; \quad 2A_2 = A_1^2; \quad 3A_3 = A_1 \cdot A_2;$$
$$4A_4 = A_1 \cdot A_3; \; 5A_5 = A_1 \cdot A_4; \text{ u. s. f.}$$

Diese Gleichungen lassen A_1 ganz willkührlich, geben aber

7) $$A_0 = 1; \; A_2 = \frac{A_1^2}{2!}; \; A_3 = \frac{A_1^3}{3!}; \; A_4 = \frac{A_1^4}{4!}; \; A_5 = \frac{A_1^5}{5!};$$

u. s. w. f.

Und die gesuchte Reihe R_x ist daher, wenn man, der größern Bequemlichkeit wegen, A statt A_1 schreibt

8) $$\begin{cases} R_x = 1 + A \cdot x + \frac{A^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{A^3}{3!} \cdot x^3 + \frac{A^4}{4!} \cdot x^4 + \cdots \\ \text{d. h. } R_x = S\left[\frac{A^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \cdot x^{\mathfrak{b}}\right], \end{cases}$$

so daß, weil A ganz beliebig gewählt werden kann, unendlich viele solche Reihen gefunden sind, von denen jede die verlangte Eigenschaft hat.

Dies letztere ist jedoch nicht eher überzeugend gewiß, als bis man es untersucht hat. Setzt man aber, wie wir so eben gefunden haben,

$$R_x = S\left[\frac{A^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} \cdot x^{\mathfrak{a}}\right], \quad \text{also} \quad R_z = S\left[\frac{A^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \cdot z^{\mathfrak{b}}\right],$$

so ist

9) $$R_x \cdot R_z = S\left[\frac{A^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} x^{\mathfrak{a}} \cdot z^{\mathfrak{b}}\right] = S\left[\frac{A^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot x^{\mathfrak{a}} \cdot z^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}},$$

wenn man $\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ schreibt.

Auf der andern Seite ist

$$R_{x+z} = S\left[\frac{A^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}(x+z)^{\mathfrak{c}}\right];$$

aber nach dem binomischen Lehrsatze ist wiederum für jeden bestimmten Werth von $\mathfrak{c}$

$$(x+z)^{\mathfrak{c}} = S\left[\frac{\mathfrak{c}!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot x^{\mathfrak{a}} \cdot z^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}};$$

also ist auch, wenn man diese Entwicklung statt $(x+z)^c$ substituirt,

$$10)\qquad R_{x+z} = S\left[\frac{A^c}{a!\ b!}\cdot x^a \cdot z^b\right]_{a+b=c}.$$

Weil aber in 9.) und 10.) die (Doppel-) Reihen zur Rechten genau dieselben sind, so ist wirklich

$$R_x \cdot R_z = R_{x+z};$$

d. h. die gefundene Reihe 8.) ist wirklich diejenige, welche die verlangte Eigenschaft hat, und zwar für jeden Werth, der statt A nur immer gesetzt werden mag.

II. Es ist z. B. $2\log(1+x) = \log[(1+x)^2] = \log(1+2x+x^2)$. Es hat also $\log(1+x)$ die Eigenschaft, daß wenn man in ihm $2x+x^2$ statt x setzt, dann der entstehende Logarithme gerade das Doppelte des erstern ist. — Suchen wir nun eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe

$$1)\qquad P_x = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4 + \cdots,$$

welche dieselbe Eigenschaft hat, d. h. welche so ist, daß wenn man aus ihr

$$2)\qquad P_{2x+x^2} = B_0 + B_1(2x+x^2) + B_2(2x+x^2)^2 + \cdots$$

bildet, letztere Reihe nach x ordnet, dann das Resultat genau die doppelte erstere Reihe ist, d. h. daß

$$2P_x = P_{2x+x^2}$$

ist, während B_0, B_1, B_2, B_3 etc. etc. dieselben Werthe, welche in unserer Aufgabe gerade gesucht werden, behalten.

Um aber die Rechnungen zu vereinfachen können wir die Reihe 2.) auch so schreiben:

$$3)\qquad P_{2x+x^2} = S\,[B_c \cdot (2x+x^2)^c]$$

während für jeden bestimmten Werth von c wiederum nach dem binomischen Lehrsatze

$$(2x+x^2)^c = x^c(2+x)^c = S\left[x^c \cdot \frac{c!}{a!\ b!}\cdot 2^a \cdot x^b\right]_{a+b=c}$$

ist; — so daß, wenn man diesen Werth in 3.) substituirt

$$4)\qquad P_{2x+x^2} = S\left[\frac{c!}{a!\ b!}B_c \cdot 2^a \cdot x^{b+c}\right]_{a+b=c}$$

wird, oder, wenn man $a+b$ statt c, und d statt $a+2b$ setzt,

$$5) \qquad P_{2x+x^2} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!} B_{a+b}\cdot 2^a\cdot x^d\right]. \atop a+2b=d$$

Denkt man sich hier statt d nach und nach 0, 1, 2, 3, und alle ganzen Zahlen gesetzt, und für jeden bestimmten Werth von d wiederum statt a und b alle möglichen Werthe, welche 0 und positive ganze Zahlen sind und für welche $a+2b=d$ ist, — so hat man P_{2x+x^2} nach x geordnet, während jeder dieser Koefficienten (der einzelnen Potenzen von x) selber wieder aus mehreren, durch die zu diesem d gehörigen Werthe von a und b bedingten Gliedern besteht.

Auf der andern Seite hat man

$$6) \qquad 2P_x = S[2B_d\cdot x^d].$$

Und da nach der Bedingung der Aufgabe, die beiden Reihen rechts nicht von einander verschieden seyn sollen, so muß der Koefficient von x^d (für jeden bestimmten Werth von d) in beiden ein und derselbe seyn. Also muß seyn für jeden einzelnen bestimmten Werth von d,

$$7) \qquad 2B_d = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!} 2^a\cdot B_{a+b}\right]. \atop a+2b=d$$

Für $d=0$ giebt dies, weil dann auch $a=b=0$ ist,

$$8) \qquad 2B_0 = B_0 \quad \text{d. h.} \quad B_0 = 0.$$

Für $d=1$ wird $a=1$, $b=0$ (aus $a+2b=d$), und die Gleichung 7.) wird nun

$$9) \quad 2B_1 = 2B_1 \quad \text{d. h. } B_1 \text{ bleibt ganz unbestimmt u. willkührlich.}$$

Für $d=2$ wird $a=2$, $b=0$ und noch $a=0$, $b=1$. — Daher geht jetzt die Gleichung 7.) über in

$$10) \quad 2B_2 = 4B_2 + B_1 \qquad \text{d. h.} \qquad B_2 = -\tfrac{1}{2}B_1.$$

Für $d=3$ wird $a=3$, $b=0$, und auch $a=1$, $b=1$. — Daher geht jetzt die Gleichung 7.) über in

$$11) \quad 2B_3 = 8B_3 + 4B_2 \qquad \text{d. h.} \qquad B_3 = +\tfrac{1}{3}B_1.$$

Für $d=4$ wird $a=4$, $b=0$ und $a=2$, $b=1$ und noch

$a=0$, $b=2$. — Daher wird jetzt die Gleichung 7.) die folgende:

12) $2B_4 = 16B_4 + 12B_3 + B_2$ d. h. $B_4 = -\frac{1}{4}B_1$;

u. s. w. f.; so daß für $b>0$, $B_b = (-1)^{b-1}\frac{1}{b}B_1$ hervorgeht.

Die gesuchte Reihe P_x ist daher die nachstehende

$$13) \begin{cases} P_x = B_1(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots) \\ \text{d. h. } P_x = S\left[B_1 \cdot (-1)^a \frac{1}{a+1} x^{a+1}\right], \end{cases}$$

während B_1 ganz willkührlich genommen werden kann.

Auch hier gewährt das Verfahren nicht hinreichende Ueberzeugung, wenn man nicht zuletzt noch nachweist, daß wenn für jeden Werth von b, der nicht Null ist, $(-1)^{b-1}\cdot\frac{1}{b}B_1$ statt B_b gesetzt wird, die Gleichung 7.) wirklich identisch werde. Die Gleichung wird aber nach dieser Substitution, wenn durch B_1 wegdividirt wird

$$(-1)^{b-1}\cdot 2\cdot\frac{1}{b} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\cdot 2^a\cdot(-1)^{a+b-1}\cdot\frac{1}{a+b}\right]_{a+2b=b};$$

und obgleich nachgewiesen werden kann, daß dieselbe für jeden bestimmten Werth von b eine identische ist, so möchte es doch hier am unrechten Orte seyn, diesen Beweis zu führen. Daher können wir von der Reihe 13.) nur so viele Glieder für die richtigen halten, als deren wirklich (aus 7.) berechnet worden sind.

III. Es ist ferner z. B.

$$\cos(x+z) + \cos(x-z) = 2\cdot\cos x\cdot\cos z,$$

wenn man unter $\cos x$, $\cos z$, etc. etc. die aus der Elementar-Trigonometrie bekannten Linien im Kreise versteht, dessen Radius 1 ist. Man kann nun eine nach x fortlaufende Reihe Q_x suchen, nämlich

$$Q_x = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \cdots,$$

welche dieselbe Eigenschaft hat, nämlich welche so ist, daß während C_0, C_1, C_2, etc. etc. dieselben Werthe behalten (welche gerade gesucht werden)

$$1)\qquad Q_{x+z} + Q_{x-z} = 2Q_x\cdot Q_z$$

wird.

Ganz anders ist es mit den numerischen unendlichen Reihen. Bei ihnen ist die Form (die Folge der angezeigten Operationen), welche allein Gegenstand des „Rechnens" ist, in der Regel verloren gegangen; — sind sie daher zu gleicher Zeit divergent, so hört alles „Rechnen" mit ihnen auf, und sie hören auf Gegenstand mathematischer Untersuchungen zu seyn. Sind sie aber convergent, so giebt es eine reelle (positive oder negative, rationale oder irrationale) Zahl, welche einer solchen Reihe gleich ist, und mit letzterer (aber nicht mit der unendlichen Reihe als solcher) kann man natürlich wieder rechnen.

§. 44.

I. Eine unendliche und allgemeine Reihe nach x, z. B. $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$ kann (während x ganz unbestimmt bleiben soll) nie der Null gleich seyn, wenn nicht jeder einzelne Koefficient für sich der Null gleich ist, d. h. wenn nicht $a_0=0$; $a_1=0$; $a_2=0$; $a_3=0$; $a_4=0$; etc. etc. ist.

Denn man erkennt die Richtigkeit einer Gleichung

1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=0$$

daran, daß man alle indirekten Operationen (namentlich alle Divisionen), dann alle Klammern wegschafft, und wenn dann auf jeder Seite des Gleichheits-Zeichens genau eine und dieselbe Form steht. Gesetzt nun, der General-Nenner aller Koefficienten (da x selbst nur auf direkte Weise, nämlich durch Multiplikation und Addition verbunden erscheint) wäre N, so würde die Gleichung 1.) die Form annehmen

2) $$a_0N+a_1N\cdot x+a_2N\cdot x^2+a_3N\cdot x^3+\cdots=0,$$

wo man sich in den Koefficienten bereits alle Klammern aufgelöst denken kann. Ist nun die Gleichung 1.) richtig, so muß in der Gleichung 2.) links und rechts des = Zeichens eine und dieselbe Form stehen; also müssen links alle einzelnen Glieder, d. h. alle einzelnen Koefficienten der Null gleich seyn, weil sonst links nicht Null stände, sondern etwas anders. Mit

$$a_0N=0,\quad a_1N=0,\quad a_2N=0,\quad a_3N=0,\ \text{etc. etc.}$$

---

divergenten Reihen. Die neueste Schule verfällt oft in den entgegengesetzten Fehler und getraut sich nicht mit allgemeinen Reihen zu rechnen, sondern will, daß sie alle convergent seyen. Wäre aber dies nöthig, so würde oft alles Rechnen aufhören.

ist aber zu gleicher Zeit, wenn nicht $N = 0$ ist, auch

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \text{ etc. etc.}$$

Man darf nur nicht übersehen, daß die Gleichung 2.) nur direkte Operationen enthält, mittelst welcher die einzelnen Glieder verbunden sind, die sich nie gegenseitig vernichten.

II. Daraus folgt aber sogleich noch:

Sind zwei unendliche und allgemeine Reihen nach x, nämlich

1) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

und

2) $$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots$$

einander gleich (während x völlig unbestimmt bleiben soll), so müssen die Koefficienten einzeln einander gleich seyn, nämlich

$$a_0 = b_0; \quad a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3; \text{ etc. etc.}$$

Denn, subtrahirt man beide Reihen von einander, so ist die neue Reihe der Null gleich. Also tritt I.) ein.

III. Diese beiden vorstehenden Sätze gelten auch, wenn statt der unendlichen Reihen endliche Reihen gedacht werden, weil man statt letzterer immer unendliche setzen kann, deren spätere Koefficienten alle der Null gleich sind.

§. 45.

Werden zwei unendliche und allgemeine Reihen nach x zu einander addirt, von einander subtrahirt, oder mit einander multiplicirt, so kann man die Resultate sogleich wieder in eben solche Reihen umformen.

Soll aber der Quotient zweier solcher Reihen, nämlich

I. $$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots}$$

in eine eben solche Reihe umgeformt werden, so kann man die gemeine Division der algebraischen Summen, d. h. die Formel $\frac{A}{B} = z + \frac{A - Bz}{B}$ in Anwendung bringen, indem man bei jeder wiederholten Anwendung derselben zum ersten Summanden z das nimmt, was man jedesmal erhält, wenn man das erste Glied des jedesmaligen Dividenden durch das erste Glied b_0

des Divisors dividirt. Die Ausführung zeigt sich ohne Ende fort als möglich, wenn nur nicht $b_0 = 0$ ist. Die unendliche Reihe, welche als Resultat gefunden wird, mit dem Divisor $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ ohne Ende fort multiplicirt, giebt den Dividenden $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ohne Ende fort.

Man kann aber dasselbe Resultat durch ein Verfahren erhalten, welches man die „Methode der unbestimmten Koefficienten" nennt, und welches wir hier noch näher beschreiben wollen.

Da man die Form des Resultats, nämlich

II. $$K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + K_4 x^4 + \cdots$$

schon kennt, so braucht man nur noch die Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. etc. der Bedingung gemäß zu finden, daß das Resultat II.) dem Quotienten I.) gleich seyn soll, d. h. daß das Produkt aus der Reihe II.) und dem Divisor in I.) völlig einerlei wird mit dem Dividenden in I.).

Multiplicirt man aber, so erhält man

III. $$b_0 K_0 + (b_1 K_0 + b_0 K_1) \cdot x + (b_2 K_0 + b_1 K_1 + b_0 K_2) \cdot x^2 + (b_3 K_0 + b_2 K_1 + b_1 K_2 + b_0 K_3) \cdot x^3 + \cdots$$

Soll nun dieses Resultat mit dem Dividenden in I.) zusammenfallen, so müssen die gesuchten Koefficienten K_0, K_1, K_2 K_3, etc. etc. so beschaffen seyn, daß die einzelnen Koefficienten der Reihe III.) und des Dividenden in I.) dieselben werden (nach §. 44. II.). Folglich muß man nehmen

1) $b_0 K_0 = a_0$;

2) $b_1 K_0 + b_0 K_1 = a_1$;

3) $b_2 K_0 + b_1 K_1 + b_0 K_2 = a_2$;

4) $b_3 K_0 + b_2 K_1 + b_1 K_2 + b_0 K_3 = a_3$;

u. s. w. f. bis in's Unendliche. — Und aus diesen Gleichungen lassen sich dann auf dem Wege der gemeinen Algebra nach und nach die einzelnen Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. bis in's Unendliche fort ohne Weiteres finden *).

---

*) Setzt man $a_0 = 1$, die übrigen Koefficienten a_2, a_3, etc. etc. da-

§. 46.

Man kann nun auch eine unendliche und allgemeine Reihe

$$(R)\ldots \qquad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

mit einer ganzen Zahl m potenziren d. h. die Potenz wiederum in eine nach x geordnete unendliche Reihe umformen, in so fern man m Faktoren sich denkt, die alle mit einander multiplicirt werden, oder in so fern man die Reihe R als ein Binomium sich denkt aus a_0 und der Summe S aller übrigen Glieder, — dann

$$R^m=(a_0+S)^m=a_0{}^m+ma_0{}^{m-1}.S+\frac{m^{2|-1}}{2!}a_0{}^{m-2}.S^2+\cdots$$

nimmt, und zuletzt statt S, S^2, S^3, etc. etc. die nach x geordneten, bekannten oder durch Multiplikation zu erhaltenden Reihen substituirt, das ganze Resultat aber nach x ordnet.

Auf dem erstern Wege erhält man namentlich

$$1)\ R^2=a_0^2+2a^0a_1\cdot x+\left|\begin{matrix}2a_0a_2\\+a_1^2\end{matrix}\right|\cdot x^2+\left|\begin{matrix}2a_0a_3\\+2a_1a_2\end{matrix}\right|\cdot x^3+\left|\begin{matrix}2a_0a_4\\+2a_1a_3\\+a_2^2\end{matrix}\right|\cdot x^4+\cdots$$

$$2)\ R^3=a_0^3+3a_0^2a_1\cdot x+\left|\begin{matrix}3a_0^2a_2\\+3a_0a_1^2\end{matrix}\right|\cdot x^2+\left|\begin{matrix}3a_0^2a_3\\+6a_0a_1a_2\\+a_1^3\end{matrix}\right|\cdot x^3+\left|\begin{matrix}3a_0^2a_4\\+6a_0a_1a_3\\+3a_0a_2^2\\+3a_1^2a_2\end{matrix}\right|\cdot x^4+\cdots$$

$$3)\ R^m=a_0^m+ma_0^{m-1}a_1\cdot x\left|\begin{matrix}+\ ma_0^{m-1}a_2\\+m_2a_0^{m-2}a_1^2\end{matrix}\right|\cdot x^2+\left|\begin{matrix}ma_0^{m-1}a_3\\+2m_2a_0^{m-2}a_1a_2\\+\ m_3a_0^{m-3}a_1^3\end{matrix}\right|\cdot x^3+\cdots,$$

wenn der Kürze wegen unter m_2, m_3, etc. etc. der 2te, 3te, etc. etc. Binominal-Koefficient der mten Potenz von $a+b$ verstanden wird.

---

gegen alle $=0$; setzt man endlich statt b_0, b_1, b_2, etc. etc. der Reihe nach die Koefficienten der Entwicklung von $(1+x)^m$, so erhält man auf diesem Wege die Reihe für $\frac{1}{(1+x)^m}$ d. h. die Reihe für $(1+x)^{-m}$; dies ist aber die zu Ende des vorhergehenden Kapitels geführte Untersuchung.

Man findet aber von dem Resultate 1.) irgend einen der Koefficienten, z. B. den von x^8, wenn man die zweite Klasse der Combinationen zur Summe 8 entwickelt, nämlich 08, 17, 26, 35, 44; dann die Elemente dieser Verbindungen an a als Zeiger unten anhängt, zuletzt aber die Versetzungszahl der Verbindung als Faktor vorschreibt. Dies giebt

$$(2a_0a_8+2a_1a_7+2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2)x^8.$$

Eben so findet man in dem Resultate 2.) irgend einen der Koefficienten z. B. den von x^7, wenn man die dritte Klasse der Combinationen zur Summe 7 entwickelt, nämlich 007, 016, 025, 034, 115, 124, 133, 223; die Elemente jeder Verbindung an a als Zeiger hängt, und dem Ganzen die Versetzungs-Zahl noch als Faktor vorsetzt. Dies giebt

$$(3a_0^2a_7+6a_0a_1a_6+6a_0a_2a_5+6a_0a_3a_4+3a_1^2a_5+6a_1a_2a_4 \\ +3a_1a_3^2+3a_2^2a_3)\cdot x^7.$$

In dem Resultate 3.) endlich wird jeder Koefficient gefunden, z. B. der von x^5, wenn man die m^{te} Klasse der Combinationen zur Summe 5 entwickelt, nämlich

$$0^{m-1}5,\quad 0^{m-2}14,\quad 0^{m-2}23,\quad 0^{m-3}113,\quad 0^{m-3}122,\quad 0^{m-4}1112;$$

dann wie oben verfährt, und die Versetzungs-Zahl als Faktor vorsetzt. Dies giebt

$$(ma_0^{m-1}a_5+m^{2|-1}a_0^{m-2}a_1a_4+m^{2|-1}a_0^{m-2}a_2a_3+\frac{m^{3|-1}}{2}a_0^{m-3}a_1^2a_3 \\ +\frac{m^{3|-1}}{2}a_0^{m-3}a_1a_2^2+\frac{m^{4|-1}}{3!}a_0^{m-4}a_1^3a_2)\cdot x^5.$$

Der Grund dieses Verfahrens liegt aber wieder darin, daß man statt der Variationen aus den einzelnen Gliedern der mit einander zu multiplicirenden gleichen Reihen, bloß die Combinationen entwickeln darf, sobald man nur jede Verbindung der letztern so oft nimmt, als sie sich verschiedentlich anordnen läßt. Der Unterschied zwischen hier und dem im §. 37.) beschriebenen Verfahren liegt bloß darin, daß man hier die Glieder sogleich nach Potenzen von x ordnet, daher bei der Entwicklung eines (z. B. des mit x^n behafteten) Gliedes alle diejenigen Verbindungen nur nehmen darf, welche als Produkte angesehen, gerade nur diese Potenz x^n enthalten.

§. 47.

Mittelst der (im §. 45. beschriebenen) Methode der „unbestimmten Koefficienten“ kann man auch unendliche Reihen finden, nicht welche gegebenen Ausdrücken gleich, sondern welche Repräsentanten gewisser Eigenschaften sind.

I. Es hat z. B. a^x die Eigenschaft, daß wenn man z statt x setzt, so daß man a^z erhält, dann diese beiden Potenzen mit

einander multiplicirt, gerade das herauskommt, was auch aus a^x hervorgeht, wenn $x+z$ statt x gesetzt wird (vorausgesetzt, daß a^x eine Differenz-Potenz oder eine reelle Potenz ist). — Suchen wir eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe R_x, welche dieselbe Eigenschaft hat, welche nämlich so ist, daß wenn man in ihr z statt x, und auch $x+z$ statt x setzt, — wodurch man zwei neue Reihen erhält, welche bezüglich durch R_z und R_{x+z} bezeichnet werden können, — dann $R_x \cdot R_z = R_{x+z}$ werde.

Es sey diese gesuchte Reihe

1) $\quad R_x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$

so ist die andere

2) $\quad R_z = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$

und die dritte

3) $\quad R_{x+z} = A_0 + A_1(x+z) + A_2(x+z)^2 + A_3(x+z)^3 + \cdots,$

während in allen dreien die Koefficienten A_0, A_1, A_2, etc. etc. dieselben Werthe behalten, die wir gerade suchen. Multiplicirt man aber die Reihen 1.) und 2.) mit einander, so erhält man eine nach x fortlaufende Reihe, deren Koefficienten selber wieder nach z fortlaufende Reihen sind, oder auch eine Reihe, die nach z fortläuft, während ihre Koefficienten wiederum nach x fortlaufende Reihen sind. — Eine solche heißt, um es hier nebenbei zu sagen, eine Doppel-Reihe. — Entwickelt man aber in der Reihe 3.) die einzelnen Potenzen von $x+z$ nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man wiederum eine solche Doppel-Reihe. Da nun diese beiden Doppel-Reihen nicht von einander verschieden seyn sollen, so müssen in beiden die einzelnen Koefficienten von z, welche wiederum Reihen sind, die nach Potenzen von x fortlaufen, einander gleich seyn. Nun ist aber in dem Produkte $R_x \cdot R_z$ der Koefficient von z, offenbar $A_1 \cdot R_x$ d. h.

4) $\quad A_1 A_0 + A_1^2 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + A_1 A_4 x^4 + \cdots,$

während in der Reihe 3.) der Koefficient von z offenbar

5) $\quad A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \cdots$

wird. Da nun auch diese beiden Reihen 4.) und 5.) (als die Koefficienten von z^1 in beiden Doppel-Reihen) einander gleich seyn müssen, so müssen wieder in diesen letztern die einzelnen Koefficienten von x einander gleich sein (immer nach §. 44.). Dies giebt die Gleichungen

$$6)\qquad A_1 \cdot A_0 = A_1;\quad 2A_2 = A_1^2;\quad 3A_3 = A_1 \cdot A_2;$$
$$4A_4 = A_1 \cdot A_3;\ 5A_5 = A_1 \cdot A_4;\ \text{u. s. f.}$$

Diese Gleichungen lassen A_1 ganz willkührlich, geben aber

$$7)\quad A_0 = 1;\ A_2 = \frac{A_1^2}{2!};\ A_3 = \frac{A_1^3}{3!};\ A_4 = \frac{A_1^4}{4!};\ A_5 = \frac{A_1^5}{5!};$$

u. s. w. f.

Und die gesuchte Reihe R_x ist daher, wenn man, der größern Bequemlichkeit wegen, A statt A_1 schreibt

$$8)\ \begin{cases} R_x = 1 + A \cdot x + \frac{A^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{A^3}{3!} \cdot x^3 + \frac{A^4}{4!} \cdot x^4 + \cdots \\ \text{d. h. } R_x = S\left[\frac{A^b}{b!} \cdot x^b\right], \end{cases}$$

so daß, weil A ganz beliebig gewählt werden kann, unendlich viele solche Reihen gefunden sind, von denen jede die verlangte Eigenschaft hat.

Dies letztere ist jedoch nicht eher überzeugend gewiß, als bis man es untersucht hat. Setzt man aber, wie wir so eben gefunden haben,

$$R_x = S\left[\frac{A^a}{a!} \cdot x^a\right],\quad \text{also}\quad R_z = S\left[\frac{A^b}{b!} \cdot z^b\right],$$

so ist

$$9)\qquad R_x \cdot R_z = S\left[\frac{A^{a+b}}{a!\,b!} \cdot x^a \cdot z^b\right] = S\left[\frac{A^c}{a!\,b!} \cdot x^a \cdot z^b\right]_{a+b=c},$$

wenn man c statt a+b schreibt.

Auf der andern Seite ist

$$R_{x+z} = S\left[\frac{A^c}{c!}(x+z)^c\right];$$

aber nach dem binomischen Lehrsatze ist wiederum für jeden bestimmten Werth von c

$$(x+z)^c = S\left[\frac{c!}{a!\,b!} \cdot x^a \cdot z^b\right]_{a+b=c};$$

also ist auch, wenn man diese Entwicklung statt $(x+z)^c$ substituirt,

$$10) \qquad R_{x+z} = S\left[\frac{A^c}{a!\,b!}\cdot x^a\cdot z^b\right]_{a+b=c}.$$

Weil aber in 9.) und 10.) die (Doppel-) Reihen zur Rechten genau dieselben sind, so ist wirklich

$$R_x \cdot R_z = R_{x+z};$$

d. h. die gefundene Reihe 8.) ist wirklich diejenige, welche die verlangte Eigenschaft hat, und zwar für jeden Werth, der statt A nur immer gesetzt werden mag.

II. Es ist z. B. $2\log(1+x) = \log[(1+x)^2] = \log(1+2x+x^2)$. Es hat also $\log(1+x)$ die Eigenschaft, daß wenn man in ihm $2x+x^2$ statt x setzt, dann der entstehende Logarithme gerade das Doppelte des erstern ist. — Suchen wir nun eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe

$$1) \qquad P_x = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + \cdots,$$

welche dieselbe Eigenschaft hat, d. h. welche so ist, daß wenn man aus ihr

$$2) \qquad P_{2x+x^2} = B_0 + B_1(2x+x^2) + B_2(2x+x^2)^2 + \cdots$$

bildet, letztere Reihe nach x ordnet, dann das Resultat genau die doppelte erstere Reihe ist, d. h. daß

$$2P_x = P_{2x+x^2}$$

ist, während B_0, B_1, B_2, B_3 etc. etc. dieselben Werthe, welche in unserer Aufgabe gerade gesucht werden, behalten.

Um aber die Rechnungen zu vereinfachen können wir die Reihe 2.) auch so schreiben:

$$3) \qquad P_{2x+x^2} = S[B_c\cdot(2x+x^2)^c]$$

während für jeden bestimmten Werth von c wiederum nach dem binomischen Lehrsatze

$$(2x+x^2)^c = x^c(2+x)^c = S\left[x^c\cdot\frac{c!}{a!\,b!}\cdot 2^a\cdot x^b\right]_{a+b=c}$$

ist; — so daß, wenn man diesen Werth in 3.) substituirt

$$4) \qquad P_{2x+x^2} = S\left[\frac{c!}{a!\,b!}B_c\cdot 2^a\cdot x^{b+c}\right]_{a+b=c}$$

wird, oder, wenn man a+b statt c, und d statt a+2b setzt,

5) $$P_{2x+x^2} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!} B_{a+b}\cdot 2^a \cdot x^d\right]_{a+2b=d}.$$

Denkt man sich hier statt d nach und nach 0, 1, 2, 3, und alle ganzen Zahlen gesetzt, und für jeden bestimmten Werth von d wiederum statt a und b alle möglichen Werthe, welche 0 und positive ganze Zahlen sind und für welche a+2b=d ist, — so hat man P_{2x+x^2} nach x geordnet, während jeder dieser Koefficienten (der einzelnen Potenzen von x) selber wieder aus mehreren, durch die zu diesem d gehörigen Werthe von a und b bedingten Gliedern besteht.

Auf der andern Seite hat man

6) $$2P_x = S[2B_d\cdot x^d].$$

Und da nach der Bedingung der Aufgabe, die beiden Reihen rechts nicht von einander verschieden seyn sollen, so muß der Koefficient von x^d (für jeden bestimmten Werth von d) in beiden ein und derselbe seyn. Also muß seyn für jeden einzelnen bestimmten Werth von d,

7) $$2B_d = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!} 2^a\cdot B_{a+b}\right]_{a+2b=d}.$$

Für d=0 giebt dies, weil dann auch a=b=0 ist,

8) $2B_0 = B_0$ d. h. $B_0 = 0$.

Für d=1 wird a=1, b=0 (aus a+2b=d), und die Gleichung 7.) wird nun

9) $2B_1 = 2B_1$ d. h. B_1 bleibt ganz unbestimmt u. willkührlich.

Für d=2 wird a=2, b=0 und noch a=0, b=1. — Daher geht jetzt die Gleichung 7.) über in

10) $2B_2 = 4B_2 + B_1$ d. h. $B_2 = -\frac{1}{2}B_1$.

Für d=3 wird a=3, b=0, und auch a=1, b=1. — Daher geht jetzt die Gleichung 7.) über in

11) $2B_3 = 8B_3 + 4B_2$ d. h. $B_3 = +\frac{1}{3}B_1$.

Für d=4 wird a=4, b=0 und a=2, b=1 und noch

$a=0$, $b=2$. — Daher wird jetzt die Gleichung 7.) die folgende:

12) $2B_4 = 16B_4 + 12B_3 + B_2$ d. h. $B_4 = -\frac{1}{4}B_1$;

u. s. w. f.; so daß für $b>0$, $B_b = (-1)^{b-1}\frac{1}{b}B_1$ hervorgeht.

Die gesuchte Reihe P_x ist daher die nachstehende

$$13) \begin{cases} P_x = B_1(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots) \\ \text{d. h. } P_x = S\left[B_1\cdot(-1)^a \frac{1}{a+1}x^{a+1}\right], \end{cases}$$

während B_1 ganz willkührlich genommen werden kann.

Auch hier gewährt das Verfahren nicht hinreichende Ueberzeugung, wenn man nicht zuletzt noch nachweist, daß wenn für jeden Werth von b, der nicht Null ist, $(-1)^{b-1}\cdot\frac{1}{b}B_1$ statt B_b gesetzt wird, die Gleichung 7.) wirklich identisch werde. Die Gleichung wird aber nach dieser Substitution, wenn durch B_1 wegdividirt wird

$$(-1)^{b-1}\cdot 2\cdot\frac{1}{b} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\cdot 2^a\cdot(-1)^{a+b-1}\cdot\frac{1}{a+b}\right];$$
$$a+2b=b$$

und obgleich nachgewiesen werden kann, daß dieselbe für jeden bestimmten Werth von b eine identische ist, so möchte es doch hier am unrechten Orte seyn, diesen Beweis zu führen. Daher können wir von der Reihe 13.) nur so viele Glieder für die richtigen halten, als deren wirklich (aus 7.) berechnet worden sind.

III. Es ist ferner z. B.

$$\cos(x+z) + \cos(x-z) = 2\cdot\cos x\cdot\cos z,$$

wenn man unter $\cos x$, $\cos z$, etc. etc. die aus der Elementar-Trigonometrie bekannten Linien im Kreise versteht, dessen Radius 1 ist. Man kann nun eine nach x fortlaufende Reihe Q_x suchen, nämlich

$$Q_x = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \cdots,$$

welche dieselbe Eigenschaft hat, nämlich welche so ist, daß während C_0, C_1, C_2, etc. etc. dieselben Werthe behalten (welche gerade gesucht werden)

1) $$Q_{x+z} + Q_{x-z} = 2Q_x\cdot Q_z$$

wird.

Man kann sich dasmal die Rechnung durch nachstehende Betrachtung sehr erleichtern. Setzt man nämlich $-z$ statt z, so ändert sich der Ausdruck links in der Gleichung 1.) nicht; also darf sich auch der Ausdruck rechts nicht ändern; folglich kann Q_x bloß gerade Potenzen von z enthalten; also sind alle Koefficienten C_1, C_3, C_5, C_7 etc. etc. der ungeraden Potenzen von z (oder von x in Q_x) der Null gleich. Mithin hat man $C_1 = C_3 = C_5 =$ etc. etc. $= 0$; und es bleiben nur noch die Koefficienten C_0, C_2, C_4, C_6 etc. etc. in

2) $$Q_x = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \cdots$$

zu bestimmen übrig. — Nun ist aber in Q_{x+z} und in Q_{x-z} der Koefficient von z^2 *),

$$= C_2 + \frac{4\cdot 3}{2} C_4 \cdot x^2 + \frac{6\cdot 5}{2} C_6 \cdot x^4 + \frac{8\cdot 7}{2} C_8 \cdot x^6 + \cdots;$$

also ist in der Summe $Q_{x+z} + Q_{x-z}$ der Koefficient von z^2 das doppelte hiervon nämlich

3) $$2\cdot 1\cdot C_2 + 4\cdot 3\cdot C_4 \cdot x^2 + 6\cdot 5\cdot C_6 \cdot x^4 + 8\cdot 7\cdot C_8 \cdot x^6 + \cdots$$

Auf der andern Seite (der Gleichung 1.) erhält man dagegen als Koefficient von z^2, das Produkt $2C_2 \cdot Q_x$ d. h.

4) $$2C_2 C_0 + 2C_2^2 \cdot x^2 + 2C_2 C_4 \cdot x^4 + 2C_2 C_6 \cdot x^6 + \cdots.$$

Da nun wegen der Gleichung 1.) diese beiden Koefficienten von z^2 dieselben seyn müssen, so müssen wiederum die Koefficienten von x^2, x^4, x^6 etc. etc. (in 3. und 4.) einzeln einander gleich seyn. Dies giebt die Gleichungen

$$2\cdot 1\cdot C_2 = 2C_2 \cdot C_0, \quad \text{also} \quad C_0 = 1;$$

$$4\cdot 3\cdot C_4 = 2C_2^2, \quad \text{also} \quad C_4 = \frac{(2C_2)^2}{4!};$$

$$6\cdot 5\cdot C_6 = 2C_2 \cdot C_4, \quad \text{also} \quad C_6 = \frac{(2C_2)^3}{6!};$$

$$8\cdot 7\cdot C_8 = 2C_2 \cdot C_6, \quad \text{also} \quad C_8 = \frac{(2C_2)^4}{8!};$$

u. s. w. f.; so daß $$C_{2n} = \frac{(2C_2)^n}{(2n)!}$$ wird.

---

*) Man sieht dies sogleich, wenn man die Potenzen $(x \pm z)^2$,

Bezeichnet man daher $2C_2$ durch C, so daß C völlig willkührlich bleibt, so ist die gesuchte Reihe

$$5)\left\{\begin{array}{l} Q_x = 1 + C\cdot\frac{x^2}{2!} + C^2\cdot\frac{x^4}{4!} + C^3\cdot\frac{x^6}{6!} + C^4\cdot\frac{x^8}{8!} + \cdots \\ \text{d. h. } Q_x = S\left[C^a\cdot\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right], \end{array}\right.$$

so daß nach den verschiedenen Werthen von C wiederum unendlich viele Reihen existiren, welche die verlangte Eigenschaft mit einander gemein haben.

Man muß aber wieder, ehe man diese letztere Behauptung für völlig gegründet halten darf, vorher zusehen, ob diese gefundene Reihe, der Gleichung 1.) wirklich genügt. Verfährt man aber mit dieser Probe genau, wie die Probe in I.) sehen läßt, indem man $(x \pm z)^{2a}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so daß man $S\left[\frac{(2a)!}{b!\,c!}\cdot x^b(\pm z)^c\right]_{b+c=2a}$ dafür schreibt, so sieht man die 1.) als eine identische Gleichung nachgewiesen.

IV. Sucht man zu dieser so eben gefundenen Reihe Q_x, noch eine andere Reihe S_x, welche die Eigenschaft hat, daß

$$1)\qquad Q_{x-z} - Q_{x+z} = 2S_x\cdot S_z$$

wird, so sieht man sogleich, daß die Reihe S_z nur ungerade Potenzen von z enthalten kann, weil in 1.) der Ausdruck zur Linken, in denselben, aber mit dem (—) Zeichen versehenen übergeht, wenn —z statt z gesetzt wird, dies also auch mit S_z zur Rechten so seyn muß. — Ferner ist in Q_{x-z} der Koefficient von z,

$$2)\qquad = -\frac{2C}{2!}\cdot x - \frac{4C^2}{4!}\cdot x^3 - \frac{6C^3}{6!}\cdot x^5 - \frac{8C^4}{8!}\cdot x^7 - \cdots.$$

Der Koefficient von z in Q_{x+z} ist derselbe, aber mit lauter (+) Zeichen; folglich ist der Koefficient von z in $Q_{x-z} - Q_{x+z}$ offenbar das Doppelte des in 2.) hingestellten. Auf der andern Seite der Gleichung 1.) ist dagegen der Koefficient von z, wenn man

---

$(x \pm z)^4$, $(x \pm z)^6$, $(x \pm z)^8$, etc. etc. nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und bei dem mit z^2 afficirten Gliede einhält.

3) $S_x = D_1 \cdot x + D_3 \cdot x^3 + D_5 \cdot x^5 + D_7 \cdot x^7 + \cdots$

nimmt, offenbar das Doppelte von $D_1 \cdot S_x$ d. h. das Doppelte von

4) $D_1^2 \cdot x + D_1 D_3 \cdot x^3 + D_1 D_5 \cdot x^5 + D_1 D_7 \cdot x^7 + \cdots$.

Aus der Vergleichung von 2.) und 4.) gehen aber hervor die Gleichungen

$$D_1^2 = -C; \quad \text{also} \quad D_1 = \sqrt{(-C)} = +c,$$

wenn man der Kürze wegen

$$\sqrt{(-C)} = c, \quad \text{also} \quad -C = c^2 \quad \text{und} \quad C = -c^2$$

setzt; ferner

$$D_1 \cdot D_3 = -\frac{C^2}{3!}; \quad \text{also} \quad D_3 = -\frac{c^3}{3!};$$

$$D_1 \cdot D_5 = -\frac{C^3}{5!}; \quad \text{also} \quad D_5 = +\frac{c^5}{5!};$$

$$D_1 \cdot D_7 = -\frac{C^4}{7!}; \quad \text{also} \quad D_7 = -\frac{c^7}{7!};$$

u. s. w. f.; so daß man

$$5) \begin{cases} S_x = cx - \dfrac{c^3x^3}{3!} + \dfrac{c^5x^5}{5!} - \dfrac{c^7x^7}{7!} + \cdots \\ \text{d. h.} \quad S_x = S\left[(-1)^a \cdot \dfrac{c^{2a+1} \cdot x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] \end{cases}$$

erhält, für die gesuchte Reihe, wo c von C in Q_x mittelst der Gleichung $c^2 = -C$ abhängt. — Setzt man dagegen in der Reihe III. 5.) für Q_x, lieber $-c^2$ statt C, so nimmt letztere ebenfalls noch eine analoge Form an, nämlich

$$6) \begin{cases} Q_x = 1 - \dfrac{c^2x^2}{2!} + \dfrac{c^4x^4}{4!} - \dfrac{c^6x^6}{6!} + \cdots \\ \text{d. h.} \quad Q_x = S\left[(-1)^a \cdot \dfrac{c^{2a} \cdot x^{2a}}{(2a)!}\right], \end{cases}$$

wo nun c in S_x und Q_x ganz unbestimmt und willkührlich bleibt, dagegen immer einen und denselben Werth haben muß, wenn der hiesigen Eigenschaft

$$Q_{x-z} - Q_{x+z} = 2S_x \cdot S_z$$

ein Genüge geleistet werden soll.

In dem Falle aber (d. h. für denjenigen Werth von c), wo die hiesige Reihe 6.) für Q_x, den Werth $\cos x$ annehmen sollte, würde die Reihe 5.) für S_x, (bei demselben Werthe von c) höchst wahrscheinlich den Werth $\sin x$ ausdrücken, weil in der That nach jenen Elementar-Begriffen von $\cos x$ und $\sin x$ allemal

$$\cos(x-z) - \cos(x+z) = 2\sin x \cdot \sin z$$

ist, welche Gleichung für $z = x$ in $1 - \cos 2x = 2\sin x^2$ übergeht.

Wir begnügen uns mit diesen vier Beispielen, welche hinlänglich zeigen, wie man verfahren müsse, um mittelst der Methode der unbestimmten Koefficienten, Reihen zu finden, welche mit gegebenen Eigenschaften begabt sind.

Beweis des binomischen Lehrsatzes für reelle Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 48.

Multiplicirt man die beiden Reihen nach b, nämlich

$$1) \quad 1 + \frac{x}{1} \cdot b + \frac{x^{2|-1}}{2!} \cdot b^2 + \frac{x^{3|-1}}{3!} \cdot b^3 + \frac{x^{4|-1}}{4!} \cdot b^4 + \cdots$$

und

$$2) \quad 1 + \frac{z}{1} \cdot b + \frac{z^{2|-1}}{2!} \cdot b^2 + \frac{z^{3|-1}}{3!} \cdot b^3 + \frac{z^{4|-1}}{4!} \cdot b^4 + \cdots$$

in denen x und z ganz allgemein gedacht sind, mit einander und ordnet man das Produkt wiederum nach b, so erhält man zum Koefficienten von b^m eine Summe von Produkten zweier Koefficienten der gegebenen Reihen, welche nach §. 40. IV.) $= \frac{(x+z)^{m|-1}}{m!}$ ist, wie auch x und z gedacht seyn mögen.

Folglich wird das Produkt der beiden vorliegenden Reihen 1.) und 2.) das nachstehende

$$3) \quad 1 + \frac{x+z}{1} \cdot b + \frac{(x+z)^{2|-1}}{2!} \cdot b^2 + \frac{(x+z)^{3|-1}}{3!} \cdot b^3 + \cdots$$

Diese Wahrheit kann man so schreiben:

$$4) \qquad R_x \cdot R_z = R_{x+z},$$

wenn der Kürze wegen R_x die Reihe 1.), folglich R_z und R_{x+z} die Reihen 2.) und 3.) vorstellen.

Daraus folgt aber sogleich, wenn man nach und nach x, 2x, 3x, 4x, ... $(\nu-1)x$ statt z schreibt

$$(R_x)^2 = R_{2x};\quad (R_x)^3 = R_{3x};\quad \text{und}\quad (R_x)^\nu = R_{\nu x},$$

wie auch x gedacht seyn mag, wenn nur ν eine positive ganze Zahl ist. Ist nun $x = \frac{\mu}{\nu}$ gedacht, und μ positiv oder negativ ganz, aber ν positiv ganz, so geht diese letztere Gleichung über in

$$5)\qquad (R_{\mu:\nu})^\nu = R_\mu,\quad \text{d. h.}\quad R_{\mu:\nu} = \sqrt[\nu]{R_\mu}.$$

Nun ist aber die Reihe R_μ keine andere als die Reihe 1.), wenn μ statt x gesetzt wird; also (nach §. 38. und §. 41.) nichts anders als $(1+b)^\mu$. — Folglich hat man (nach 5.)

$$6)\qquad R_{\mu:\nu} = \sqrt[\nu]{(1+b)^\mu} = (1+b)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

so lange $1+b$ positiv ist, so daß $(1+b)^{\frac{\mu}{\nu}}$ (nach §. 12. E.) eine Bedeutung hat und auch nur eindeutig ist, während $R_{\mu:\nu}$ die Reihe 1.) vorstellt, wenn daselbst $\frac{\mu}{\nu}$ statt x gesetzt wird. Die Gleichung 6.), nämlich die Gleichung

$$(1+b)^{\frac{\mu}{\nu}} = R_{\mu:\nu}$$

lehrt uns also, daß der binomische Lehrsatz (§. 38. und daher auch §§. 36. und 37.) selbst dann noch gilt, wenn der Exponent eine (positive oder negative) gebrochene Zahl ist, wenn nur die Potenz selbst zu denjenigen gehört, welche bis jetzt eine Bedeutung haben, weshalb für jetzt der Dignand $1+b$ positiv gedacht werden muß.

§. 49.

Wir können dieses Kapitel nicht schließen, ohne noch ausdrücklich auf folgende Punkte aufmerksam gemacht zu haben:

1) Aus einigen erstern Gliedern einer Reihe kann man das

Gesetz,

Gesetz, nach welchem die folgenden Glieder fortgehen werden, nie mit Sicherheit entnehmen, höchstens vermuthen. Soll daher eine Reihe wirklich gegeben seyn, so muß man das Gesetz haben, nach welchem die Glieder der Reihe ohne Ende fort sich richten.

2) Dieses Gesetz kann aber bei einer jeden Reihe in doppelter Form ausgesprochen seyn. Einmal kann man wissen, wie jedes folgende Glied aus einem, einigen oder allen nächst vorhergehenden Gliedern gebildet wird; dies nennt man ein **recurrentes Gesetz** der Reihe; — dann aber kann man angeben, wie das n^{te} Glied selbst, unabhängig von den übrigen Gliedern aussieht, so daß man einen Ausdruck angiebt, der n enthält, und welcher außer der Ordnung jedes bestimmte (z. B. das 13te) Glied sogleich liefert, wenn statt n die Zahl der Stelle (13) des Gliedes gesetzt wird; dies wird das **independente Gesetz** der Reihe genannt.

So z. B. hatten wir in jeder der vier Aufgaben des §. 47.) anfänglich allemal das recurrente Gesetz für die Koefficienten der gesuchten Reihe, und wir haben uns jedesmal nachgehends erst zu dem independenten Gesetze erhoben. Daß das letztere das richtige sey, ist bei den Aufgaben I. III. und IV.) erwiesen worden; in der Aufgabe II.) dagegen (des §. 47.) haben wir zwar auch das independente Gesetz angegeben, aber ausdrücklich bemerkt, daß wir in diesem Falle die Probe, ob solches auch wirklich das richtige sey, nicht füglich anstellen können, ohne vorher andere Untersuchungen angestellt zu haben.

3) Hat man das **independente Gesetz** einer Reihe, also einen Ausdruck f_n, welcher für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ den ersten, zweiten, dritten, vierten, etc. etc. Koefficienten der Reihe liefert, und enthält f_n noch unbestimmte Buchstaben a, b, etc. etc., so kann man

$$(\odot) \ldots \quad f_n = K_n, \quad f_{n-1} = K_{n-1}, \quad f_{n-2} = K_{n-2}, \text{ etc. etc.}$$

setzen, wo K_n, K_{n-1}, K_{n-2}, etc. etc. bloße Buchstaben vorstellen, — dann aus diesen Gleichungen a, b, etc. etc. eliminiren, und man wird eine Gleichung zwischen K_n, K_{n-1}, etc. etc. haben, welche K_n in die vorhergehenden Koefficienten ausgedrückt liefert, welche daher als ein **recurrentes** Gesetz angesehen wer-

den kann. Aber auch wenn f_n nicht weiter unbestimmte Buchstaben a, b, etc. etc. enthält, so kann man doch die Gleichungen (⊙) noch beliebig mit einander verbinden, etwa einen und denselben zusammengesetzten Ausdruck aus ihnen eliminiren u. d. gl. mehr, so daß man eine Gleichung zwischen K_n, K_{n-1}, etc. etc. erhält, und jede solche Gleichung wird ein recurrentes Gesetz der Reihe aussprechen. — Schwieriger ist es, aus einem recurrenten Gesetze das independente zu finden.

4) Ist eine unendliche Reihe aus der Entwickelung eines endlichen Ausdruckes (d. h. aus seiner Umformung in diese Form der Reihe) hervorgegangen, so kann man umgekehrt aus der Reihe jenen endlichen Ausdruck wieder finden wollen. — Dies Geschäft nennt man die **Summation** einer Reihe. — Solche ist natürlich in wenigen Fällen und dann nur dadurch möglich, daß es gelingt, die gegebene Reihe in andere zu zerlegen, oder zu verwandeln, deren **Summe** [d. h. die ihnen (im Sinne des §. 9.) gleichen endlichen Ausdrücke] man kennt. — Auch eine endliche Reihe von einer unbestimmten Anzahl n von Gliedern kann man zuweilen summiren.

$$\text{Z. B. } 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

5) Setzt man in einer nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\cdots,$$

statt x etwa $z^{\frac{2}{3}}$, so erhält man

$$a+bz^{\frac{2}{3}}+cz^{\frac{4}{3}}+dz^2+ez^{\frac{8}{3}}+fz^{\frac{10}{3}}+\cdots$$

und dies ist eine „**nach steigenden gebrochenen Potenzen fortlaufende Reihe**". — Umgekehrt: Ist die **letztere Reihe** gegeben, so ist es nicht schwer zu erkennen, daß wenn $z^{\frac{1}{3}}=y$ gesetzt wird, solche in

$$a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\cdots$$

und diese wiederum, wenn $y^2=x$ gesetzt wird, in

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\cdots$$

d. h. jedesmal in eine nach **ganzen** Potenzen von x fortlaufende Reihe übergeht.

6) Fängt eine Reihe mit x^m an z. B.

$$A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + A_3x^{m+3} + \cdots,$$

so kann man dafür setzen das Produkt

$$x^m \cdot (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots)$$

und zwar, es mag m positiv oder negativ seyn. Im letztern Falle aber, wo m negativ ist, würde die erstere Reihe negative Potenzen von x mit enthalten. — Danach ist es leicht, eine steigende Reihe nach x, die mit einer negativen oder positiven Potenz von x beginnt, so umzuformen, daß man in den Rechnungen es nur mit Reihen der ursprünglichen Form

$$a + bx + cx^2 + \cdots,$$

in welcher a nicht Null ist, zu thun hat.

7) Setzt man in einer nach positiven Potenzen von x fortlaufenden Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots,$$

$\frac{1}{z}$ statt x, so erhält man

$$a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3} + ez^{-4} + \cdots$$

d. h. man erhält eine „**nach negativen Potenzen von z fortlaufende** (d. h. eine **fallende**) Reihe. — Umgekehrt, hat man eine Reihe, wie die letztere, so darf man nur $z = \frac{1}{x}$ nehmen, um die erstere ursprüngliche Form wieder zu haben.

8) Man ersieht aber aus diesen Beispielen hinlänglich, wie jede Reihe z. B.

$$ax^{\frac{4}{3}} + bx + cx^{\frac{1}{3}} + d + ex^{-\frac{1}{4}} + fx^{-\frac{3}{4}} + gx^{-1} + hx^{-\frac{5}{4}} + \ldots.$$

behandelt werden müsse, um sie auf die ursprüngliche Form der nach ganzen positiven Potenzen von x fortlaufenden Reihen zu bringen. — In der vorliegenden nämlich könnte man damit beginnen, daß man $x^{\frac{4}{3}}$ als Faktor herausrückte. Dann erhielte man

$$x^{\frac{4}{3}} \cdot (a + bx^{-\frac{1}{3}} + cx^{-1} + dx^{-\frac{4}{3}} + ex^{-\frac{19}{12}} + fx^{-\frac{25}{12}} + gx^{-\frac{7}{3}} + \ldots).$$

Hernach würde man $\frac{1}{x} = z$ setzen, und man erhielte statt der gegebenen Reihe dieses Resultat:

$$z^{-\frac{4}{3}} \cdot (a + bz^{\frac{1}{3}} + cz + dz^{\frac{4}{3}} + ez^{\frac{19}{12}} + fz^{\frac{25}{12}} + gz^{\frac{7}{3}} + hz^{\frac{31}{12}} + \cdots).$$

Hierauf könnte man $z^{\frac{1}{12}} = y$ setzen, so daß $y = x^{-\frac{1}{12}}$ wird, und die gegebene Reihe gienge nun in den Ausdruck

$$y^{-16} \cdot (a + by^{4} + cy^{12} + dy^{16} + ey^{19} + fy^{25} + gy^{28} + hy^{31} + \cdots)$$

über, wo die noch vorhandene unendliche Reihe nach ganzen positiven und steigenden Potenzen von x fortläuft, während die mit $y, y^2, y^3, y^5, y^6, \ldots y^{11}, y^{13}$, etc. etc. behafteten Glieder Null-Koefficienten haben, und deshalb herausgefallen sind, nach Belieben aber mit ihren Null-Koefficienten wieder in ihre Stellen eingesetzt werden können.

Fünftes Kapitel.

Vom Unendlich-Großen und Unendlich-Kleinen. Von der Convergenz der Reihen.

Vom Unendlich-Großen und Unendlich-Kleinen.

§. 50.

1) Bezeichnen wir durch ∞ jede absolute (ganze oder gebrochene Zahl, welche immer größer noch ist, als jede bestimmte übrigens noch so groß gedachte absolute Zahl, so nennen wir diese Zahl ∞, welche nie im Seyn, sondern immer nur im Werden ist, eine unendlich-große Zahl. — Der Quotient $\frac{1}{\infty}$ ist dann die ebenfalls nie im Seyn, sondern nur immer im Werden sich befindende unendlich-kleine Zahl, von welcher wir auch sagen, „sie liege der Null nächstan“ *).

Die absoluten (positiven) Zahlen wachsen also von 0 an bis zu ∞ hin stetig, durch alle gebrochenen und irrationalen Zahlen, welche zwischen je zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen liegen, hindurch.

2) Wie sehr klein eine (gebrochene oder irrationale) Zahl z auch immer gedacht seyn mag, so liegen zwischen ihr und der Null doch immer noch unendlich viele andere Zahlen, der Größe nach alle von einander verschieden, aber alle größer als Null und kleiner doch als diese noch so kleine aber bestimmte Zahl z. —

---

*) Das stetige Wachsen der Zeit, so wie das stetige Wachsen einer Linie, setzen die Existenz solcher unendlich-kleinen Unterschiede außer Zweifel, wenn uns auch der Ausdruck fehlt, solche darzustellen.

Denn, wie groß auch die ganze Zahl μ gedacht seyn mag, so werden doch die $\mu-1$ gebrochenen Zahlen $\frac{z}{\mu}, \frac{2z}{\mu}, \frac{3z}{\mu}, \ldots \frac{(\mu-1)z}{\mu}$ der Reihe nach immer größer und größer, während sie dabei alle kleiner als $\frac{\mu z}{\mu}$ d. h. kleiner als z, aber größer als Null sind. Die Zahl z, so klein sie auch gedacht gewesen seyn mag, liegt also doch um diese beliebig große Anzahl von Gliedern von der Null ab.

3) Ist z unendlich-klein, so ist auch pz unendlich-klein, auch qz^2, auch rz^3, etc. etc., wenn nur p, q, r, etc. etc. nicht Null, sondern beliebig große, aber völlig bestimmte Zahlen sind.

Denn wäre pz nicht unendlich-klein, sondern eine, wenn auch sehr kleine aber bestimmte Zahl k, so würde aus $pz=k$ folgen $z=\frac{k}{p}$; d. h. z selbst wäre dann eine zwar sehr kleine aber bestimmte Zahl, folglich nicht unendlich-klein. — Und da $qz^2 < qz$ ist, so ist auch qz^2 mit qz zugleich unendlich-klein. U. s. w. f.

4) Von zweien Zahlen a und b, die endlich oder unendlich-klein seyn mögen, nennen wir die zweite b „unendlich-klein gegen die erstere" a, und die erstere a dann „unendlich-groß gegen die zweite" b, wenn der Quotient $\frac{b}{a}$ eine (in 1. definirte) unendlich-kleine Zahl ist.

5) Sind k, p, q, r, s, etc. etc. irgend welche, ganz beliebige, aber bestimmte Zahlen und nicht Null, so ist, wenn z unendlich-klein gedacht wird,

pz unendlich-klein gegen k; also k unendlich-groß gegen pz;
qz^2 „ „ „ pz; also pz „ „ „ qz^2;
rz^3 „ „ „ qz^2; also qz^2 „ „ „ rz^3;
u. s. w. f.; und allgemein ist
sz^{n+1} unendlich-klein gegen rz^n; also rz^n unendl.-groß gegen sz^{n+1};
alles der in 4.) gegebenen Definition zu Folge.

Man theilt daher die Unendlich-Kleinen in Ordnungen und zählt solche Unendlich-Kleine zu einer und derselben Ordnung, deren Quotienten (Verhältnisse) irgend endliche (be-

stimmte) Werthe haben, so daß keine derselben gegen die andere unendlich-groß oder unendlich-klein ist.

So gehören z, pz, qz, rz, etc. etc. zu den Unendlich-Kleinen der ersten Ordnung; sind aber z, z', z'' etc. etc. solche Unendlich-Kleine der ersten Ordnung, so gehören z^2, zz', pz^2, pzz', qz'^2, etc. etc. zu den Unendlich-Kleinen der zweiten Ordnung, u. s. w. f.; und z^n, $p \cdot z^n$, $q \cdot z^n$, $r \cdot z^n$, $p \cdot z^{\mu} z'^{n-\mu}$, $q \cdot z^{\mu} z'^{\nu} z''^{n-\mu-\nu}$, etc. etc. zu den Unendlich-Kleinen der n^{ten} Ordnung, wo man sich n (positiv) ganz oder gebrochen denken kann, während diese n^{te} Ordnung des Unendlich-Kleinen höher oder niedriger heißt, je nachdem n größer oder kleiner ist.

6) Ist z beliebig und setzt man die Summe der ersten n Glieder der unendlichen Reihe

(R) ··· $\quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots$

$= S$, so daß

$$S = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}$$

ist; und multiplicirt man diese Gleichung mit $1 - z$, so erhält man

$$(1-z) \cdot S = 1 - z^n, \quad \text{also} \quad S = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}.$$

Ist nun $z > 1$, so wird z^n mit n zugleich unendlich-groß; folglich ist (nach §. 42.) die unendliche Reihe R für $z > 1$ divergent. Für $z = 1$ ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe R, $= n$, also mit n zugleich unendlich-groß; folglich ist die unendliche Reihe R für $z = 1$ ebenfalls divergent. — Ist aber $z < 1$ so ist z^n unendlich-klein, so oft n unendlich-groß gedacht wird; folglich ist nun die unendliche Reihe R convergent, und ihr Werth von $\frac{1}{1-z}$ um unendlich wenig, d. h. in der Rechnung gar nicht verschieden.

Ist nämlich $z > 1$, also $z = 1 + y$, wo y noch positiv ist, so ist

$$z^n = (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n^{2|-1}}{2!} \cdot y^2 + \cdots,$$

folglich mit n zugleich unendlich-groß.

Ist aber $z<1$, also $z=\frac{1}{1+y}$, wo y noch positiv ist, so ist $z^n=\frac{1}{(1+y)^n}$; folglich ist z^n, eben weil der Nenner mit n zugleich unendlich-groß wird, unendlich-klein, so oft man $n=\infty$ nimmt.

7) Aus demselben Grunde convergirt auch die unendliche Reihe

$$(Q)\cdots \qquad p+pz+pz^2+pz^3+pz^4+\cdots$$

für $z<1$, und ihr Werth ist dann $=p\cdot\frac{1}{1-z}$; sie divergirt aber für $z=1$ und für $z>1$.

Für $z=\frac{1}{2}$ ist also der Werth der Reihe Q, $=p\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $=2p$. — Ist daher $z<\frac{1}{2}$, und ist p der größeste der Koefficienten der Reihe

$$(P)\cdots \qquad a+bz+cz^2+dz^3+\cdots,$$

so ist der Werth dieser letztern convergenten Reihe, eben weil sie kleiner als

$$p+pz+pz^2+pz^3+\cdots$$

ist, allemal $<2p$; d. h. der doppelt genommene größeste Koefficient der Reihe P, ist allemal größer als der Werth der ganzen unendlichen Reihe P, so oft in ihr $z<\frac{1}{2}$ gedacht ist.

Ist daher A der größeste der Koefficienten der Reihe

$$(N)\cdots \qquad p\cdot z^n+q\cdot z^{n+1}+r\cdot z^{n+2}+\cdots,$$

so ist der Werth der ganzen Reihe N, so oft $z<\frac{1}{2}$ gedacht ist, allemal $<2A\cdot z^n$.

8) Der Werth einer nach steigenden Potenzen vom unendlich-klein gedachten z, fortlaufenden unendlichen Reihe, in welcher z^n die niedrigste der in ihr vorkommenden Potenzen von z ist, ist daher, obgleich aus unendlich vielen Gliedern bestehend, doch ein Unendlich-Kleines der n^{ten} Ordnung (nach N. 5.). Dieser Werth ist daher gar nicht unendlich-klein, sondern endlich, wenn $n=0$ seyn, d. h. wenn die Reihe mit einem Gliede k ohne z anfangen sollte.

9) Ist eine nach steigenden Potenzen des unendlich-kleinen z fortlaufende Reihe

$$p \cdot z^n + q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + \dots$$

der Null gleich, so ist der Koefficient p ihres ersten Gliedes selbst unendlich-klein, weil außerdem das Glied $p \cdot z^n$ von dem Unendlich-Kleinen $q \cdot z^{n+1} + r \cdot z^{n+2} + \dots$ der $(n+1)^{ten}$ Ordnung nicht vernichtet werden könnte. — Und da das Unendlich-Kleine der Null nächst anliegt, so ist es der Wahrheit nächst anliegend, wenn man in den Rechnungen, wo statt p ein bestimmter Ausdruck gesetzt werden muß, $p = 0$ nimmt; und jeder andere, wenn auch noch so kleine aber bestimmte Werth, den man statt p setzen wollte, würde dagegen vom wahren (unendlich-kleinen) Werthe von p, unendlich weit abliegen.

Von der Convergenz der numerischen Reihen.

§. 51.

I. Eine numerische Reihe ist convergent, wenn ihre Glieder von irgend einem derselben ab (wie auch die Anzahl der vorhergehenden Glieder, und wie groß auch die letztern seyn mögen) eben so schnell oder schneller noch abnimmt als die Glieder irgend einer als convergent bereits anerkannten Reihe, z. B. der geometrischen Reihe

$$p + px + px^2 + px^3 + \dots,$$

wenn solche in dem Falle gedacht wird, wo $x < 1$ ist.

II. Dividirt man daher in einer numerischen Reihe das $(n+1)^{te}$ Glied durch das n^{te}, ist der Quotient < 1, und wird derselbe für keinen größern Werth von n größer, als er für irgend einen übrigens noch so großen aber bestimmten Werth von n bereits geworden ist, so ist die Reihe gewiß convergent, eben weil ihre Glieder nun eben so schnell oder schneller noch abnehmen, als die Glieder der geometrischen Reihe $p + px + px^2 + px^3 + \dots$ es thun, wenn in ihr $x < 1$ ist.

Untersucht man danach die Convergenz der Reihen

$$1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{2!}+\frac{A^3x^3}{3!}+\cdots$$

$$1+\frac{cx^2}{2!}+\frac{c^2x^4}{4!}+\frac{c^3x^6}{6!}+\cdots$$

$$\frac{cx}{1}+\frac{c^3x^3}{3!}+\frac{c^5x^5}{5!}+\frac{c^7x^7}{7!}+\cdots$$

so findet man, daß solche für jeden reellen Werth von x convergent sind, welchen reellen Werth c nur immer haben mag. In der letztern Reihe z. B. ist das n^{te} und $n+1^{te}$ Glied so ausgedrückt, nämlich

$$\frac{c^{2n-1}.x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{und} \quad \frac{c^{2n+1}.x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

der Quotient aus dem $n+1^{ten}$ Gliede durch das n^{te} ist daher

$$=\frac{c^2x^2}{2n\cdot(2n+1)}.$$

Wie groß nun auch c und x, also c^2x^2 seyn mögen, so wird der Nenner $2n(2n+1)$, da n fortwährend wächst, zuletzt doch größer, so daß dieser Quotient endlich doch <1 und dann immer noch kleiner wird. Von diesem Gliede ab convergirt die Reihe also schneller als die oben gedachte geometrische Reihe für $x<1$ es thut. — Die Summe aller erstern Glieder der Reihe bis dahin, wie groß sie auch immer seyn mag, ist doch nie unendlich-groß. Also hat auch diese ganze unendliche Reihe für jeden Werth von x einen bestimmten endlichen Werth, welcher in manchen Fällen zwar sehr groß, aber doch nie unendlich-groß werden kann; man müßte denn x selbst unendlich-groß nehmen.

Untersucht man aber auf demselben Wege die Convergenz der Reihe

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5+\cdots,$$

so zeigt sich der Quotient aus dem $n+1^{ten}$ Gliede durch das n^{te} $=\frac{n}{n+1}x$, und für $x=1$ ist selbiger $=\frac{n}{n+1}$. Obgleich nun der letztere <1 ist, so wächst er doch mit n zugleich; also nimmt diese Reihe für $x=1$, nicht so schnell ab, als die oben gedachte geometrische Reihe, und deshalb ist die Convergenz der Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots.$$

hieraus noch zweifelhaft. Und in der That ist diese Reihe nicht convergent, wie sich später zeigen läßt. — Dieses Beispiel läßt zugleich sehen, daß die Glieder einer Reihe immerfort abnehmen können, ohne daß die Reihe deshalb convergent ist.

III. Eine Reihe dagegen, deren Glieder fortwährend abnehmen, ist allemal convergent, so oft ihre Glieder abwechselnde + und — Zeichen haben; z. B.

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots.$$

Es seyen vom n^{ten} Gliede ab, die übrigen Glieder einer solchen Reihe

(♂)··· $+u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\cdots$,

so läßt sich dieselbe einmal so schreiben:

1) $+(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots$,

und dann auch so:

2) $+u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots$.

Aus der Form 1.) geht hervor, daß die Summe der ganzen Reihe ♂.), $>u_1-u_2$ ist, weil alle übrigen Glieder der Voraussetzung zu Folge positiv sind. Aus der Form 2.) geht indessen hervor, daß dieselbe $<u_1$ seyn müsse. Also liegt die Summe der ganzen Reihe vom n^{ten} Gliede ab, zwischen den Grenzen u_1 und u_1-u_2. — Mithin ist die Reihe convergent.

IV. Sind

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; u_4, \; u_5, \cdots$$

die Glieder einer Reihe vom n^{ten} Gliede ab gerechnet, und setzt man voraus, daß alle diese Glieder positiv und addirt sind, und daß auch jedes folgende Glied kleiner ist, als das vorhergehende, so ist

$u_1=u_1$	$u_1=u_1$
$2u_2=2u_2$	$2u_2>u_2+u_3$
$4u_4<2u_3+2u_4$	$4u_4>u_4+u_5+u_6+u_7$
$8u_8<2u_5+2u_6+2u_7+2u_8$	$8u_8>u_8+u_9+\cdots+u_{15}$
u. s. w. f.	u. s. w. f.

Addirt man links und rechts, so findet man, daß die Reihe

1) $u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots+2^m u_{(2^m)}+\cdots$

kleiner ist als die doppelte Summe der Reihe

2) $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots$,

aber größer ist als die einfache Summe dieser letztern. — Convergirt also die Reihe 2.), so ist auch die Reihe 1.) convergent; und umgekehrt, weil die Reihe 2.) auch größer ist als die halbe Summe der Reihe 1.), dagegen kleiner als die ganze Summe der Reihe 1.) (wie ebenfalls aus der Addition der obigen Ungleichungen hervorgeht), so sind die Reihen 1.) und 2.) allemal beide zugleich convergent, oder beide zugleich divergent.

Wendet man dies auf die Reihe

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\cdots$$

an, welche statt der 2.) genommen werden mag, so wird die 1.) jetzt folgende:

$$1+2^{1-\mu}+4^{1-\mu}+8^{1-\mu}+\cdots$$

d. h.
$$1+2^{1-\mu}+2^{2(1-\mu)}+2^{3(1-\mu)}+2^{4(1-\mu)}+\cdots$$

d. h. wenn $2^{1-\mu}=x$ gesetzt wird,

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots.$$

Da nun diese letztere Reihe convergent ist, so oft $x<1$, also so oft $2^{1-\mu}<1$, d. h. $1-\mu$ negativ, folglich $\mu>1$ ist, und da dieselbe allemal divergent ist, so oft $x\overline{\gtrless}1$ d. h. $2^{1-\mu}\overline{\gtrless}1$, d. h. $\mu=1$ oder $\mu<1$ ist, so folgt, daß die Reihe

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\cdots$$

allemal convergent ist, so oft $\mu>1$; dagegen allemal divergent ist, so oft $\mu\overline{\lessgtr}1$. — Für $\mu=1$ wird sie aber die in II.) besprochene Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots,$$

deren Divergenz also jetzt außer Zweifel gestellt ist. — Diese letztere Reihe bestimmt in der Musik die Tonleiter, und wird deshalb die gemeine harmonische Reihe genannt.

V. Convergiren zwei nach x fortlaufende Reihen für irgend einen Werth von x, so convergiren auch die Reihen, welche aus der Addition und Subtraktion derselben als allgemein gedachte Reihen hervorgehen, für denselben Werth von x.

VI. Das Produkt derselben Reihen convergirt aber nur dann gewiß für denselben Werth von x, wenn für ihn alle Glieder der beiden mit einander multiplicirten Reihen positiv werden.

Denn es ist die Summe der ersten n Glieder des Produkts dann offenbar kleiner als das Produkt der Werthe der beiden gegebenen convergenten Reihen; folglich für $n=\infty$ nicht unendlich-groß.

VII. Ist eine nach x fortlaufende Reihe für einen gewissen Werth von x convergent, und wird dieselbe mit einer endlichen Reihe nach x multiplicirt, so ist die neue für das Produkt hervorgehende nach x geordnete Reihe für denselben Werth von x ebenfalls convergent.

Denn es sind die aus der Multiplikation mit den einzelnen Gliedern der endlichen Reihe hervorgehenden unendlichen Reihen einzeln convergent, daher ist auch ihre Summe convergent.

§. 52.

Wir haben in den Sätzen des vorhergehenden §. 51.) durchaus Reihen vorausgesetzt, deren Glieder alle reell sind. Weil aber die Glieder einer numerischen Reihe von der Form $p+q\cdot i$ seyn können, so kann man den Begriff der Convergenz einer solchen Reihe dahin ausdehnen, daß man die Summe ihrer n ersten Glieder auf die Form $P_n+Q_n\cdot i$ bringt, und nun die Reihe für convergent erklärt, wenn weder P_n noch Q_n unendlich-groß werden, sobald $n=\infty$ gesetzt wird. — Wird dagegen für $n=\infty$ entweder P_n oder Q_n, oder werden beide dann unendlich-groß, so ist die Reihe divergent, und dann ist kein weiteres „Rechnen" mit ihr möglich. — Mit dem Werthe $P+Q\cdot i$ der convergenten numerischen Reihe dagegen kann man noch weiter rechnen, wenn auch nicht mit der Reihe als solcher.

Anmerkung. Fast alle diese Sätze über die Convergenz der Reihen stehen vereinzelt und können nur in besonderen Fällen in Anwendung gebracht werden. An allgemeinen Kennzeichen der Convergenz, wenn man nicht §. 51. N. I.) dafür will gelten lassen, gebricht es gänzlich. — Man könnte aber noch mehrere Sätze hinstellen, ähnlich der N. IV. des §. 51.), woraus die Convergenz neuer Klassen von Reihen hervorgienge. Dies letztere jedoch müssen wir, der uns hier gesteckten Kürze wegen, unterlassen.

Sechstes Kapitel.

Der allgemeinere binomische Lehrsatz, oder der Taylor'sche Satz für endliche oder unendliche, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen.

§. 53.

Bezeichnet man

$$A \cdot x^m \quad \text{durch} \quad f_x,$$

so kann man $A \cdot (x+h)^m$ durch f_{x+h} ausdrücken. Dann ist nach dem binomischen Lehrsatze (§. 36.), wenn man die Divisoren unter die Potenzen von h setzt,

$$f_{x+h} = Ax^m + mAx^{m-1} \cdot \frac{h}{1} + m^{2|-1} Ax^{m-2} \cdot \frac{h^2}{2!} + m^{3|-1} Ax^{m-3} \cdot \frac{h^3}{3!}$$
$$+ m^{4|-1} Ax^{m-4} \cdot \frac{h^4}{4!} + m^{5|-1} Ax^{m-5} \cdot \frac{h^5}{5!} + \cdots.$$

Fragt man sich aber nach der praktischen Regel, nach welcher in dieser Form des binomischen Lehrsatzes die Koefficienten von $\frac{h}{1}, \frac{h^2}{2!}, \frac{h^3}{3!}, \frac{h^4}{4!}, \frac{h^5}{5!}$ etc. etc. sich mechanisch hinschreiben lassen, so findet man bald

„daß jeder dieser Koefficienten aus dem nächst vorhergehenden „gebildet wird, wenn man den letztern mit seinem Exponenten von x multiplicirt und nachgehends den Exponenten „selbst um eine Einheit vermindert, während das allererste „Glied (d. h. der Koefficient von h^0) der Ausdruck f_x „selbst ist."

§. 54.

Diese Wahrheit dehnt sich sogleich auf den zusammengesetzteren Fall aus, wo die endliche oder unendliche Reihe

$$Ax^m + Bx^n + Cx^p + \cdots \quad \text{durch} \quad f_x,$$

also $A(x+h)^m + B(x+h)^n + C(x+h)^p + \cdots$ durch f_{x+h}

bezeichnet wird; und zwar deshalb, weil man die Theile $A(x+h)^m$, $B(x+h)^n$, $C(x+h)^p$ etc. etc. einzeln nach dem Vorstehenden in Reihen, die nach Potenzen von h fortlaufen, entwickeln, und zuletzt alle diese Reihen addiren kann, um das jetzige f_{x+h} zu bekommen. — Man findet aber auf diesem Wege, daß das allererste Glied dieser Entwicklung des jetzigen f_{x+h} allemal das jetzige f_x selber wieder wird, und daß, **wenn man die gefundene Reihe selbst so bezeichnet:**

$$(\odot)\cdots \quad f_{x+h}=f_x+\partial f_x\cdot\frac{h}{1}+\partial^2 f_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^3 f_x\cdot\frac{h^3}{3!}+ \\ +\partial^4 f_x\cdot\frac{h^4}{4!}+\partial^5 f_x\cdot\frac{h^5}{5!}+\cdots,$$

„jeder dieser durch ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$ etc. etc. bezeichneten Koefficienten aus seinem nächst vorhergehenden dadurch gefunden „wird, daß man jedes Glied des letztern mit seinem Exponenten „von x multiplicirt, nachgehends aber den Exponenten selbst um „eine Einheit vermindert."

Ist z. B. $f_x = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$;

so ist

$$\begin{aligned}\partial f_x{}^{*)} &= B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3;\\ \partial^2 f_x &= 2C+6Dx+12Ex^2;\\ \partial^3 f_x &= 6D+24Ex;\\ \partial^4 f_x &= 24E;\\ \partial^5 f_x=\partial^6 f_x &= \text{etc. etc.} = 0;\end{aligned}$$

und die Gleichung ($\odot$) lehrt uns nun, daß

$$\begin{aligned}A+B(x+h)+C(x+h)^2+D(x+h)^3+E(x+h)^4 \\ = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4 \\ +(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3)\cdot\frac{h}{1} \\ +(2C+6Dx+12Ex^2)\cdot\frac{h^2}{2!} \\ +(6D+24Ex)\cdot\frac{h^3}{3!} \\ +24E\cdot\frac{h^4}{4!}.\end{aligned}$$

ist.

*) In allen den Gliedern, welche kein x enthalten, kann man sich nämlich den Faktor x^0 noch hinzudenken. Daher fällt das erste Mal A,

Diesen Satz (⊙) kann man den **allgemeineren binomischen Lehrsatz** nennen, in so fern er die Entwicklung einer Summe von der Form $A(x+h)^m + B(x+h)^n + C(x+h)^p +$ etc. etc. (nach ganzen Potenzen von h) giebt, und daraus dann der gemeine binomische Lehrsatz hervorgeht, wenn $A=1$, $B=C=$ etc. $=0$ gesetzt wird. — Derselbe Satz ist auch ein besonderer Fall des in der Differential-Rechnung unter dem Namen des **Taylor**'schen mitzutheilenden Satzes, weshalb er auch hier der „**Taylor'sche Satz für endliche und unendliche Reihen**" genannt werden kann.

Das durch das vorgesetzte (runde) ∂ bezeichnete mechanische Geschäft, durch welches die Koefficienten der Reihe ⊙.) aus einander abgeleitet werden, kann man das **Ableiten nach** x, — die einzelnen Koefficienten ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$ etc. etc. aber die erste, zweite, dritte etc. etc. **Ableitung von** f **nach** x nennen.

§. 55.

Um denselben Satz auch auf diejenige nach x fortlaufende Reihe f_x leicht anwenden zu können, welche man noch gar nicht hat, sondern welche aus zweien andern nach x fortlaufenden Reihen φ_x und ψ_x 1) durch **Addition** oder **Subtraktion**, 2) durch **Multiplikation** und 3) durch **Division** hervorgehen würden, — stellt man die leicht zu erweisenden Sätze hin:

I. Ist $f_x = \varphi_x \pm \psi_x$, so ist $\partial f_x = \partial\varphi_x \pm \partial\psi_x$;

II. Ist $f_x = \varphi_x \cdot \psi_x$, so ist $\partial f_x = \psi_x \cdot \partial\varphi_x + \varphi_x \cdot \partial\psi_x$;

III. Ist $f_x = \frac{\varphi_x}{\psi_x}$, so ist $\partial f_x = \frac{\psi_x \cdot \partial\varphi_x - \varphi_x \cdot \partial\psi_x}{\psi_x^2}$.

Beweis des Satzes I. Da die Reihe für f_{x+h} der Voraussetzung gemäß aus den Reihen für φ_{x+h} und ψ_{x+h} durch Addition oder Subtraktion erhalten wird, so erhält man auch die einzelnen Koefficienten von $\frac{h}{1}, \frac{h^2}{2!}, \frac{h^3}{3!}$ etc. etc. in der Entwicklung von f_{x+h}, wenn man die entsprechen-

das nächste Mal B, das darauf folgende Mal 2C und zuletzt 6D ganz heraus, wenn man das durch ∂ angezeigte Verfahren immer auf's Neue noch einmal anwendet.

sprechenden Koefficienten der Entwicklungen von φ_{x+h} und ψ_{x+h} bezüglich addirt oder subtrahirt.

Beweis des Satzes II. Da nach der Voraussetzung

$$f_{x+h} = \varphi_{x+h} \cdot \psi_{x+h}$$

ist, so erhält man die Koefficienten von $\frac{h}{1}$, $\frac{h^2}{2!}$, $\frac{h^3}{3!}$ etc. etc. in der Entwicklung von f_{x+h}, wenn man die beiden Reihen

$$\varphi_x + \partial\varphi_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots \text{ (für } \varphi_{x+h})$$

$$\psi_x + \partial\psi_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2\psi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots \text{ (für } \psi_{x+h})$$

und mit einander multiplicirt. Dies giebt aber im Produkte zum Koefficienten von $\frac{h}{1}$ sogleich $\psi \cdot \partial\varphi_x + \varphi \cdot \partial\psi_x$.

Beweis des Satzes III. Diesen Satz kann man aus dem vorhergehenden folgern, in so fern aus

$$f_x = \frac{\varphi_x}{\psi_x}, \qquad \text{sogleich} \qquad \varphi_x = f_x \cdot \psi_x,$$

also (nach II.)

$$\partial\varphi_x = \psi_x \cdot \partial f_x + f_x \cdot \partial\psi_x$$

hervorgeht. Setzt man aber hier herein statt f_x seinen Werth $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$, so findet sich aus dieser Gleichung, ∂f_x ohne Weiteres so, wie die III.) es lehrt.

Zu diesen Sätzen kann man den ohnedies in die Augen fallenden Satz noch hinzufügen, nach welchem, wenn

IV. $\qquad f_x = A \cdot \varphi_x$ ist, $\qquad$ sogleich $\qquad \partial f_x = A \cdot \partial\varphi_x$

seyn muß, weil der Voraussetzung zufolge $f_{x+h} = A \cdot \varphi_{x+h}$ ist, d. h. weil f_{x+h} gefunden wird, wenn man alle Glieder von φ_{x+h} noch mit A multiplicirt.

Anmerkung. Aus II.) folgt noch: Ist

$$f_x = u_x \cdot v_x \cdot w_x \cdot z_x,$$

so ist auch

$$\partial f_x = v \cdot w \cdot z \cdot \partial u_x + u \cdot w \cdot z \cdot \partial v_x + u \cdot v \cdot z \cdot \partial w_x + u \cdot v \cdot w \cdot \partial z_x.$$

Aehnliches, wenn f_x ein Produkt von 3 oder 5 und noch mehr Faktoren seyn sollte.

§. 56.

Um ferner denselben allgemeinern binomischen Lehrsatz auch auf die nach x fortlaufende Reihe f_x leicht anwenden zu können, welche man ebenfalls gar nicht hat, sondern welche aus einer nach z fortlaufenden Reihe

$$f_z \quad \text{oder} \quad A\cdot z^m + B\cdot z^n + C\cdot z^p + \cdots$$

hervorgehen würde, wenn man in letzterer überall statt z die Reihe

$$z_x \quad \text{oder} \quad ax^\mu + bx^\nu + cx^\varrho + \cdots$$

substituiren, die m^{te}, n^{te}, p^{te} etc. etc. Potenz dieser Reihe (mittelst des §. 46.) in Reihen nach x entwickeln, und das so entstehende f_x nach Potenzen von x ordnen wollte, — dazu bedient man sich des Satzes

$$\text{V.} \qquad \partial f_{(x)} = \partial f_z \cdot \partial z_x \text{ *)},$$

welcher ebenfalls auf nachstehende Weise erwiesen wird.

Es ist nämlich

$$1) \qquad z_{x+h} = z_x + \partial z_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2 z_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = z + k,$$

wenn die Summe der übrigen Glieder, nämlich

$$2) \qquad \partial z_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2 z_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = k$$

gesetzt wird, und wenn wir z statt z_x schreiben. Dann ist, nach der Voraussetzung,

$$3) \qquad f_{(x+h)} = f_{z+k} = f_z + \partial f_z \cdot k + \partial^2 f_z \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots.$$

Setzt man aber hier herein statt k seinen Werth (aus 2.), so wie das Zeichen $f_{(x)}$ statt f_z, so erhält man (aus 3.) sogleich

$$f_{(x+h)} = f_{(x)} + \partial f_z \cdot \partial z_x \cdot \frac{h}{1} + \left\{ \begin{array}{l} \text{die übrigen Glieder, welche die hö-} \\ \text{hern Potenzen von h enthalten.} \end{array} \right\}$$

---

*) Da dem Vorangegangenen analog, f_x das bezeichnen würde, was aus f_z wird, wenn man bloß x statt z setzt, so schreiben wir hier absichtlich $f_{(x)}$, um das auszudrücken, was dem f_z gleich ist, und was aus f_z hervorgeht, nicht wenn bloß x, sondern wenn die ganze Reihe

$$z_x \quad \text{oder} \quad ax^\mu + bx^\nu + cx^\varrho + \cdots$$

statt z gesetzt wird.

Also hat sich der durch $\partial f_{(x)}$ bezeichnete Koefficient von $\frac{h}{1}$ in der Entwicklung von $f_{(x+h)}$, $= \partial f_z \cdot \partial z_x$ gefunden.

In dem besonderen Falle, wo $f_z = z^m$ ist, wird also hiernach

$$\text{VI.} \qquad \partial(z^m)_x = mz^{m-1} \cdot \partial z_x.$$

§. 57.

Mittelst dieser Sätze kann man aber, wenn f_x irgend eine, direkt oder auf eine der in den §§. 55. 56.) vorausgesetzten Weisen gegebene, nach x fortlaufende, endliche oder unendliche Reihe vorstellt, — allemal das f_{x+h}, was entsteht, wenn in f_x der neue Werth $x+h$ statt x gesetzt wird, sogleich und unmittelbar in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln. Dies mag durch nachstehende Beispiele noch näher erörtert werden, in welchen wir uns jedesmal mit den 3 oder 2 ersten Gliedern des Resultats begnügen.

Beispiel 1. Wir wollen das, was aus dem Produkte $(2-3x+x^2)(3x^4-4x^5)$ wird, wenn man $x+h$ statt x setzt, in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln, ohne aber dieses Produkt selbst vorher nach x zu ordnen.

Bezeichnen wir das gegebene Produkt durch f_x, so wie die beiden Faktoren desselben durch φ_x und ψ_x, so hat man

1) $\varphi_x = 2-3x+x^2$, also 2) $\partial\varphi_x = -3+2x$;

3) $\psi_x = 3x^4-4x^5$, also 4) $\partial\psi_x = 12x^3-20x^4$.

Dann wird (nach II.), weil $f_x = (2-3x+x^2)(3x^4-4x^5)$ ist,

5) $\partial f_x = (3x^4-4x^5)(-3+2x)+(2-3x+x^2)(12x^3-20x^4)$;

oder, wenn man multiplicirt und addirt, d. h. nach x ordnet,

6) $\partial f_x = 24x^3-85x^4+90x^5-28x^6$.

Hätte man aber f_x selbst hergestellt (nach x geordnet), so hätte man gehabt

7) $f_x = 6x^4-17x^5+15x^6-4x^7$;

und findet man hieraus ∂f_x direkt dadurch, daß man jedes Glied mit seinem Exponenten von x multiplicirt und 1 vom Exponenten subtrahirt, so ergiebt sich für ∂f_x dasselbe Resultat, welches wir kurz vorher (in 6.) mittelst Anwendung der II.) ebenfalls gefunden hatten.

Da nun (nach §. 54. ⊙)

$$(☾)\cdots \quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

ist, so kennen wir von der Entwicklung von f_{x+h}, d. h. von der Entwicklung des Produkts $[2-3(x+h)+(x+h)^2]\cdot[3(x+h)^4-4(x+h)^5]$, bereits die zwei ersten Glieder, nämlich das allererste f_x, welches gegeben ist, und das erste $\partial f_x \cdot \frac{h}{1}$, welches so eben, dadurch daß man ∂f_x abgeleitet hat, gefunden worden ist. — Um nun das zweite Glied $\partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!}$ *) noch zu haben, mag aus ∂f_x in 5.) noch $\partial^2 f_x$ gefunden werden.

Man hat aber in 5.) zur Rechten die Summe zweier Produkte. Nimmt man damit das durch ∂ angezeigte Geschäft des Ableitens vor, so muß man (nach I.) die Ableitungen der beiden Summanden der Summe suchen und addiren, während die Ableitung eines jeden der beiden Summanden, in so fern er ein Produkt ist, gefunden wird (nach II.), wenn man die Ableitung eines jeden der beiden Faktoren mit dem anderen Faktor multiplicirt und die Produkte addirt. Dies giebt

8) $$\partial^2 f_x = (-3+2x)(12x^3-20x^4)+2(3x^4-4x^5) + (12x^3-20x^4)(-3+2x)+(2-3x+x^2)(36x^2-80x^3);$$

oder, wenn man dies nach x ordnet,

9) $$\partial^2 f_x = 72x^2 - 340x^3 + 450x^4 - 168x^5.$$

Dasselbe hätte man aber auch erhalten, wenn man ∂f_x aus 6.) genommen, und daraus $\partial^2 f_x$ direkt dadurch gefunden hätte, daß jedes Glied mit seinem Exponenten von x multiplicirt, der Exponent selbst aber dann um 1 vermindert worden wäre.

Man hätte auch $\partial^2 f_x$ wie folgt finden können. Aus $f_x = \varphi_x \cdot \psi_x$ folgt zuerst

a) $$\partial f_x = \psi_x \cdot \partial\varphi_x + \varphi_x \cdot \partial\psi_x.$$

Die Formel I.) angewandt, giebt nun

b) $$\partial^2 f_x = \partial(\psi_x \cdot \partial\varphi_x)_x + \partial(\varphi_x \cdot \partial\psi_x)_x.$$

Die Formel II.) giebt dagegen

c) $$\partial(\psi_x \cdot \partial\varphi_x)_x = \partial\varphi_x \cdot \partial\psi_x + \psi_x \cdot \partial^2\varphi_x$$

d) $$\partial(\varphi_x \cdot \partial\psi_x)_x = \partial\psi_x \cdot \partial\varphi_x + \varphi_x \cdot \partial^2\psi_x.$$

---

*) Dies ist eigentlich das dritte Glied der Entwicklung von f_{x+h}. — Es ist aber in mancher Beziehung bequem, die Glieder nach dem Exponenten von h zu benennen, und f_x selbst für das nullte, oder wenn man lieber will, für das allererste Glied anzusehen.

Diese Werthe aus c) und d) in die b) substituirt, geben aber

e) $$\partial^2 f_x = \varphi_x \cdot \partial^2 \varphi_x + 2\partial\psi_x \cdot \partial\varphi_x + \varphi_x \cdot \partial^2 \psi_x.$$

Weil aber in unserem Beispiele

$$\varphi_x = 2 - 3x + x^2 \quad \text{und} \quad \psi_x = 3x^4 - 4x^5$$

ist, so erhält man hieraus zunächst

$$\partial\varphi_x = -3 + 2x \quad \text{und} \quad \partial\psi_x = 12x^3 - 20x^4;$$

dann aber noch

$$\partial^2\varphi_x = 2 \quad \text{und} \quad \partial^2\psi_x = 36x^2 - 80x^3.$$

Diese Werthe in die obige e) substituirt, geben nun

$$\partial^2 f_x = 2(3x^4 - 4x^5) + 2(-3 + 2x)(12x^3 - 20x^4) + (2 - 3x + x^2)(36x^2 - 80x^3),$$

welches genau die Gleichung 8.) ist, aus der dann die 9.) ohne Weiteres hervorgeht.

Hat man aber ∂f_x und $\partial^2 f_x$ gefunden, so kennt man drei Glieder der Entwicklung von f_{x+h} (nach ☾ oder nach §. 54. ⊙).

Beispiel 2. Es sey gegeben

1) $$f_z = 7z^2 - z^3$$

und 2) $$z_x = 1 - 2x + 5x^2,$$

so daß also

3) $$f_{(x)} = 7(1 - 2x + 5x^2)^2 - (1 - 2x + 5x^2)^3$$

ist; und man soll das, was aus $f_{(x)}$ wird, wenn man $x + h$ statt x setzt, also den Ausdruck

$$f_{(x+h)} \quad \text{oder} \quad 7[1 - 2(x+h) + 5(x+h)^2]^2 - [1 - 2(x+h) + 5(x+h)^2]^3$$

in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln, und zunächst wenigstens die zwei ersten Glieder dieser Reihe herstellen.

Man findet aber hier aus V.)

$$\partial f_{(x)} = \partial f_z \cdot \partial z_x,$$

während

$$\partial f_z = 14z - 3z^2 \quad \text{und} \quad \partial z_x = -2 + 10x$$

gefunden wird. Also ist

$$\partial f_x = (14z - 3z^2)(-2 + 10x)$$
$$= [14(1 - 2x + 5x^2) - 3(1 - 2x + 5x^2)^2](-2 + 10x);$$

oder, wenn man dieses nach x ordnet,

$$\partial f_{(x)} = -22 + 142x - 216x^2 + 160x^3 + 750x^4 - 750x^5.$$

Stellt man $f_{(x)}$ nach x geordnet her, so erhält man

$$f_{(x)} = 6 - 22x + 71x^2 - 72x^3 + 40x^4 + 150x^5 - 125x^6$$

und daraus würde $\partial f_{(x)}$ direkt (indem man jedes Glied mit dem Exponenten von x multiplicirt und dann den Exponenten um 1 vermindert)

gerade so gefunden werden, wie wir solches mittelst unserer Formel gefunden haben.

§. 58.

Um von diesem allgemeineren binomischen Lehrsatze auch eine Anwendung zu geben, seyen $x-h$, x und $x+h$ drei nächst auf einander folgende Werthe von x, und wir wollen die drei zugehörigen Werthe von f_x, nämlich

$$f_{x-h}, \qquad f_x \qquad \text{und} \qquad f_{x+h}$$

mit einander vergleichen, unter der Voraussetzung, daß sie mit x zugleich reell sind.

Es ist aber nach dem allgemeineren binomischen Lehrsatze (§. 54. ⊙)

$$\text{I.} \quad f_{x+h}-f_x = \partial f_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

und, wenn man hier überall $-h$ statt h setzt:

$$\text{II.} \quad f_{x-h}-f_x = -\partial f_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} - \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Ist nun ∂f_x für den in Rede stehenden Werth von x nicht der Null gleich, so haben (nach §. 50. N. 7.), weil hier h unendlich-klein gedacht ist, die beiden Differenzen I.) u. II.) verschiedene (+ oder —) Vorzeichen. Deshalb

wachsen alle drei Werthe von f_x mit denen von x zugleich, so lange ∂f_x positiv ist; dagegen nehmen alle drei Werthe von f_x fortwährend ab, während die Werthe von x wachsen, so lange ∂f_x negativ ist.

Ist aber für den in Rede stehenden Werth von x, der Koefficient $\partial f_x = 0$, und nicht $\partial^2 f_x$ der Null gleich, so sind beide Differenzen I.) und II.) zugleich positiv, wenn $\partial^2 f_x$ positiv wird, dagegen zugleich negativ, wenn $\partial^2 f_x$ negativ wird. Also

findet gerade ein Uebergang vom Abnehmen der Werthe von f_x zum Wachsen statt, wenn $\partial f_x = 0$ und $\partial^2 f_x$ positiv ist; dagegen findet ein Uebergang vom Wachsen zum Abnehmen der Werthe von f_x statt, wenn $\partial f_x = 0$ und $\partial^2 f_x$ negativ seyn sollte. Im erstern Fall heißt der Werth von f_x selbst,

der kleiner ist als seine beiden nächsten Nachbar-Werthe f_{x-h} und f_{x+h}, ein Minimum oder ein Kleinstes. Im andern Falle dagegen, wo der Werth von f_x größer ist als seine beiden nächsten Nachbar-Werthe f_{x-h} und f_{x+h}, wird derselbe ein Maximum oder ein Größtes genannt.

Sollte der Werth von x nicht bloß $\partial f_x = 0$ sondern auch noch $\partial^2 f_x = 0$ machen, so würde $\partial^3 f_x$ positiv oder negativ, ein stetiges Wachsen oder ein in diesem Augenblicke stattfindendes stetiges Abnehmen der Werthe von f_x anzeigen. Würde aber derselbe Werth von x, welcher $\partial f_x = 0$ und $\partial^2 f_x = 0$ macht, auch noch $\partial^3 f_x = 0$ machen, so würde ein positiver Werth von $\partial^4 f_x$ ein Minimum, ein negativer Werth von $\partial^4 f_x$ dagegen ein Maximum des Werthes von f_x anzeigen. — U. s. w. f.

Sucht man z. B. die Werthe von x, welche

$$7 - 12x + x^3$$

zu einem Maximum machen, so hat man

$$f_x = 7 - 12x + x^3; \quad \text{also} \quad \partial f_x = -12 + 3x^2.$$

Die Gleichung $\partial f_x = 0$ d. h. $-12 + 3x^2 = 0$, giebt nun für x zwei Werthe, nämlich $x = +2$ und $x = -2$. — Man findet ferner

$$\partial^2 f_x = 6x$$

und da dieser Ausdruck $6x$ positiv wird für $x = +2$, so hat f_x d. h. $7 - 12x + x^3$ für $x = +2$ einen kleinsten Werth d. h. der Werth von f_x wird größer, man mag x um unendlich wenig größer oder kleiner als $+2$ nehmen. — In der That wird für $x = +2$, $f_x = -9$; dagegen wird für $x = 2 \pm h$, der zugehörige Werth von f_x, $= -9 + 6h^2 \pm 6h^3$; also jedesmal größer als -9, wenn h unendlich klein gedacht wird.

Weil aber ferner $\partial^2 f_x = 6x$, für den andern, aus $\partial f_x = 0$ hervorgehenden Werth -2 von x, negativ wird, so hat f_x d. h. $7 - 12x + x^3$ für $x = -2$ einen größten Werth. Und in der That ist für $x = -2$ der Werth von f_x, $= 23$; und für $x = -2 \pm h$, wird dann der Werth von f_x, $= 23 - 6h^2 \pm 6h^3$, folglich jedesmal kleiner als 23, so lange h unendlich klein gedacht wird.

Der Werth von f_x oder $7 - 12x + x^3$ ist negativ für $x = -\infty$ und wächst mit x zugleich so lange ∂f_x d. h. $-12 + 3x^2$ positiv ist, also bis man zu $x = -2$ kommt. — In diesem Augenblicke ist f_x ein Maximum und hat den positiven Werth 23. — Hier ist also der Uebergang vom Wachsen des f_x zum Abnehmen. — So wie daher x größer als -2,

aber kleiner als $+2$ genommen wird, so ist f_x im Abnehmen begriffen, während x wächst, weil für alle diese Werthe von x (zwischen -2 und $+2$) der Werth von ∂f_x negativ wird. — So wie aber x bis zu $+2$ herangewachsen ist, so tritt wiederum der Uebergang vom Abnehmen zum Wachsen der Funktion f_x ein. Der Werth $f_x = -9$ ist der kleinste, den f_x annimmt (und zwar für $x = +2$); von da ab wächst f_x wiederum mit x zugleich, und zwar ohne Ende fort, weil für alle Werthe von x, welche >2 sind, ∂f_x d. h. $-12+3x^2$ immerfort positiv bleibt *).

§. 59.

Wir sehen zu gleicher Zeit aus der Form der Differenz I.) daß, wenn f_x eine endliche oder unendliche Reihe nach x vorstellt, dann die zu unmerklich verschiedenen Werthen von x gehörigen Werthe von f_x ebenfalls nur unmerklich von einander verschieden sind, wenn sie nur wirklich existiren, und reell sind, d. h. wenn nur, im Falle die Reihe f_x eine unendliche seyn sollte, solche für die in Rede stehenden Werthe von x wirklich allemal convergent ist, und einen reellen Werth hat.

Wird daher f_x für irgend einen reellen Werth a von x positiv, für irgend einen andern reellen Werth b von x aber negativ, so muß zwischen a und b ein Werth von x liegen (der $>a$ und $<b$, oder der $>b$ und $<a$ ist), für welchen $f_x = 0$

*) Man kann den Gang der Werthe einer solchen Reihe f_x durch eine Figur (s. Fig. 40.) versinnlichen. Man denkt sich zwei auf einander senkrechte Gerade X′OX und Y′OY; trägt von O aus auf OX′ alle negativen Werthe von x (nach einem beliebigen Maaßstabe) ab, so wie auf OX alle positiven Werthe von x. In den Endpunkten dieser (Abscissen-) Werthe von x, errichtet man Parallelen mit Y′OY, und trägt von diesen Endpunkten aus auf diesen Parallelen die zugehörigen Werthe von f_x ab, nach oben, wenn sie positiv, nach unten aber, wenn sie negativ sind. Diese werden dann Ordinaten-Werthe genannt. Die Endpunkte dieser Ordinaten-Werthe bilden nun in der Regel eine krumme (und Ausnahmsweise eine gerade) Linie; und diese versinnlicht den Gang der Werthe von f_x, wie sie zu den von $-\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin stetig wachsend gedachten Werthen von x gehören. — Wo diese Kurve der Abscissen-Axe X′OX begegnet, da schneidet sie die (Abscissen-) Werthe von x ab, für welche der Werth von f_x weder positiv, noch negativ, sondern der Null gleich wird.

wird, wenn nur f_x für alle Werthe von x zwischen a und b wirklich lauter reelle Werthe hat.

Auf diesen Satz gründet sich die Auflösung aller höheren algebraischen Gleichungen vom beliebigen Grade mit reellen Koefficienten, auch der Gleichungen, welche die Form der höhern haben, nämlich die Form

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\cdots \text{ in infinit.} = 0,$$

dabei aber, um so zu sagen, von unendlichem Grade sind (in welchem Falle die Gleichungen zu den transcendenten gezählt werden), sobald nur die Koefficienten der Gleichung reell und in Ziffern-Ausdrücken gegeben sind und wenn ein reeller Werth des Unbekannten wirklich existirt.

Es sey z. B. ein Werth von x zu finden, welcher der Gleichung

$$A\cdots \qquad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\text{ in infinit.} = 0$$

genügt.

Da diese Reihe zur Linken (nach §. 51.) für jeden reellen Werth von x convergent ist, so kann man diesen bestimmten Werth von x zwischen $+\infty$ und $-\infty$ suchen. Da ferner diese Gleichung bloß gerade Potenzen von x enthält, so genügt ihr allemal auch der Werth $-\alpha$ statt x, wenn der Werth $+\alpha$ statt x genügt hat. — Schreibt man ferner die Gleichung 1.) noch so

$$B\cdots 1-\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 4}\right)-\frac{x^6}{6!}\left(1-\frac{x^2}{7\cdot 8}\right)-\frac{x^{10}}{10!}\left(1-\frac{x^2}{11\cdot 12}\right)-\cdots = 0,$$

und wird der Ausdruck zur Linken des =Zeichens (in A. oder in B.) durch f_x bezeichnet, so überzeugt man sich bald, daß f_x negativ wird für $x=2$, dagegen positiv wird für $x=0$; folglich liegt zwischen 0 und 2 ein Werth von x, welcher $f_x, =0$ macht. — Man berechnet nun f_x für den dazwischen liegenden Werth 1 von x. Auch hier findet man bald, daß f_x noch positiv wird; also liegt zwischen 1 und 2 ein Werth von x, welcher $f_x, =0$ macht. — Man setzt nun 1,5 (welches zwischen 1 und 2 liegt) statt x, berechnet dazu f_x und findet f_x noch immer positiv *); also liegt zwischen 1,5 und 2 ein Werth von x, welcher $f_x, =0$ macht. —

---

*) Um f_x zu berechnen für irgend einen Werth von x, wird man so viele Glieder desselben f_x berechnen, bis die Nenner der folgenden Glieder so groß werden, daß die folgenden Glieder auf die Anzahl der Decimalstellen, welche man herstellen will, keinen Einfluß mehr haben.

Man versucht es nun mit 1,6, und für diesen Werth von x rechnet sich bald f_x negativ aus. Folglich liegt zwischen 1,5 und 1,6 ein Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht. — Man setzt nun 1,55; 1,56; 1,57; 1,58 nach und nach statt x, berechnet jedesmal f_x dazu, und findet den Werth von f_x die drei ersten Male immer wieder positiv, dagegen das vierte Mal negativ; also liegt zwischen 1,57 und 1,58 ein Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht.

Man begreift, wie man so fort fahren kann, um immer nähere und nähere Grenzen zu erhalten, zwischen denen der gesuchte reelle Werth von x liegt.

Hat man aber einen Werth 1,57 von x gefunden, welcher dem gesuchten sehr nahe kommt, so kann man selbigen durch x, — das noch fehlende durch h, also den gesuchten Werth von x durch x+h bezeichnen, und hat nun zur Bestimmung von h die Gleichung

$$f_{x+h} = 0, \quad \text{d. h.} \quad f_x + \partial f_x \cdot \frac{h}{1} + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = 0,$$

wo

$$f_x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

also (nach §. 54.)

$$\partial f_x = -\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

u. s. w. f. ist, während statt x der Näherungs-Werth 1,57 gesetzt werden muß. Läßt man aber aus dieser Gleichung, welche h bestimmen soll, alle höhern Potenzen von h, als sehr klein, weg, so bekommt man bloß

$$f_x + \partial f_x \cdot h = 0, \quad \text{also} \quad h = -\frac{f_x}{\partial f_x},$$

für diesen Näherungs-Werth von x (1,57) ausgerechnet. Auf diesem Wege bekommt man h positiv, wenn 1,57 statt x gesetzt wird, dagegen h negativ, wenn etwa 1,58 statt x gesetzt werden sollte. Welcher der beiden Grenz-Werthe aber bei diesem letztern Verfahren genommen werden müsse, wenn x+h wirklich dem gesuchten Werthe von x näher liegen soll als der in die-

ser Berechnung von h, zu Grunde gelegte Grenz-Werth von x, — hat Fourier zuerst gezeigt, während die Auflösungs-Methode selbst die Newton'sche heißt. Hierauf müssen wir später bei Gelegenheit der Lehre von den höhern Gleichungen noch einmal zurückkommen.

Man findet aber auf diesem Wege, wenn 1,57 statt x gesetzt wird, aus $h = -\frac{f_x}{\partial f_x}$, sogleich $h = 0{,}0008$; dagegen wenn 1,58 statt x substituirt wird, $h = -0{,}0092$. In beiden Fällen findet sich der mehr genäherte Werth $x + h, = 1{,}5708$.

Wird dann dieser Werth 1,5708 statt x gesetzt, in $h = -\frac{f_x}{\partial f_x}$, so findet sich h abermals negativ dazu, nämlich $h = -0{,}00000368$; und man findet nun den gesuchten Werth von x schon bis auf 7 Decimalstellen genau, nämlich $x = 1{,}5707963$.

Auf dieselbe Weise findet man einen zweiten Werth von x zwischen 4 und 5, welcher abermals f_x zu Null macht, weil f_x für $x = 4$ negativ, für $x = 5$ aber positiv wird (vgl. die zweite Abthlg. des nächstfolgenden Kapitels).

Als neues Beispiel kann man die Funktion $f_x = 7 - 12x + x^3$ betrachten, welche wir schon im Beispiel zu §. 58.) hinsichtlich des Ganges ihrer reellen Werthe näher untersucht haben. — Weil sie für $x = -\infty$ selbst den Werth $-\infty$ annimmt, für $x = -2$ aber positiv ($= +23$) wird, so liegt zwischen $-\infty$ und -2 ein (negativer) Werth von x, der sie zu Null macht. — Weil sie ferner für $x = -2$ positiv ($= +23$), für $x = +2$ aber negativ wird (nämlich $= -9$), so liegt zwischen -2 und $+2$ abermals ein (positiver oder negativer) Werth von x, der solche Funktion $7 - 12x + x^3$ der Null gleich macht.

Und weil endlich diese Funktion f_x d. h. $7 - 12x + x^3$, für $x = +2$ negativ, für $x = +\infty$ aber positiv (nämlich ebenfalls $+\infty$) wird so liegt zwischen $+2$ und $+\infty$ noch ein (positiver) Werth von x, welcher der Gleichung

$$7 - 12x + x^3 = 0$$

genügt.

Der Anfänger mag nun versuchen, diese drei reellen Werthe der letztern Gleichung auf dem so eben beschriebenen Wege näher zu bestimmen. Derselbe kann noch bemerken, daß für $x = 0$, die Funktion $f_x, = 7$ d. h. noch positiv wird, so daß der zweite Werth von x zwischen 0 und $+2$ liegt, also ebenfalls positiv sich zeigt. Und da für

$x = +1$, $f_x = -4$ also schon negativ wird, so liegt dieser zweite Werth von x zwischen 0 und 1. — U. s. w. f.

In der bald folgenden „Lehre der höhern Gleichungen" ist hierüber in der dritten Abtheilung das Weitere zu suchen. — Hier wollten wir nur einstweilen den Nutzen des allgemeineren binomischen (d. h. des Taylor'schen) Lehrsatzes in einem nahe liegenden Falle der Anwendung anschaulich machen.

§. 60.

Man kann auch den allgemeinern binomischen Lehrsatz ausdehnen auf den Fall, wo man eine Doppel-Reihe hat z. B.

$$\begin{array}{l} A_{0,0} + A_{1,0}\cdot x + A_{2,0}\cdot x^2 + \cdots \\ + A_{0,1}\cdot z + A_{1,1}\cdot xz + A_{2,1}\cdot x^2 z + \cdots \\ + A_{0,2}\cdot z^2 + A_{1,2}\cdot xz^2 + A_{2,2}\cdot x^2 z^2 + \cdots \\ + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \end{array}$$

welche durch $f_{x,z}$ bezeichnet seyn mag, wo nun nicht bloß $x+h$ statt x, sondern auch $z+k$ statt z gesetzt wird, und wo man das Resultat $f_{x+h,z+k}$ abermals in eine Doppel-Reihe entwickeln will, welche sowohl nach Potenzen von h als auch nach Potenzen von k fortlauft.

Man hat nämlich zunächst, wenn man bloß $x+h$ statt x setzt (nach §. 54. ☉).

$$f_{x+h,z} = f_{x,z} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

wo die Koefficienten ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, etc. etc. alle noch z enthalten. Setzt man dann in dieser Gleichung links und rechts noch $z+k$ statt z, so erhält man auf der rechten Seite nach demselben (§. 54. ☉)

statt $f_{x,z}$ jetzt $f_{x,z} + \partial f_z \cdot k + \partial^2 f_z \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots,$

statt ∂f_x jetzt $\partial f_x + \partial(\partial f_x)_z \cdot k + \partial^2(\partial f_x)_z \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots,$

statt $\partial^2 f_x$ jetzt $\partial^2 f_x + \partial(\partial^2 f_x)_z \cdot k + \partial^2(\partial^2 f_x)_z \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots,$

u. s. w. f., so daß die vorstehende Gleichung, sobald $z+k$ statt z gesetzt wird, übergeht in

$$f_{x+h,z+k} = f_{x,z} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial f_z \cdot k + \partial(\partial f_x)_z \cdot \frac{h}{1} \cdot \frac{k}{1} + \partial(\partial^2 f_x)_z \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{k}{1} + \cdots$$
$$+ \partial^2 f_z \cdot \frac{k^2}{2!} + \partial^2(\partial f_x)_z \cdot \frac{h}{1} \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial^3 f_z \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Und dies ist die gesuchte Entwicklung von $f_{x+h,z+k}$ in eine Doppel-Reihe nach h und k.

Hätte man in $f_{x,z}$ zuerst $z+k$ statt z gesetzt, und dann erst noch $x+h$ statt x, so hätte man erhalten

$$f_{x+h,z+k} = f_{x,z} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial f_z \cdot k + \partial(\partial f_z)_x \cdot \frac{h}{1} \cdot \frac{k}{1} + \partial^2(\partial f_z)_x \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{k}{1} + \cdots$$
$$+ \partial^2 f_z \cdot \frac{k^2}{2!} + \partial(\partial^2 f_z)_x \cdot \frac{h}{1} \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial^3 f_z \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots.$$

Vergleicht man aber diese beiden Resultate für $f_{x+h,z+k}$ mit einander, so findet man noch

$$\partial(\partial f_x)_z = \partial(\partial f_z)_x; \quad \partial^2(\partial f_x)_z = \partial(\partial^2 f_z)_x; \quad \text{u. s. f.}$$

d. h. es ist einerlei, ob man jedes Glied von $f_{x,z}$, zuerst mit dem Exponenten von x multiplicirt und 1 vom Exponenten subtrahirt, und dann erst mit dem Exponenten von z multiplicirt und 1 an diesem Exponenten subtrahirt, oder ob man dasselbe in umgekehrter Ordnung thut; — was sich freilich bei der bloßen Ansicht eines solchen Gliedes z. B. $A_{\mu,\nu} \cdot x^\mu z^\nu$ von selbst versteht. — Deshalb könnte man auch $\partial^{1,1} f_{x,z}$ statt $\partial(\partial f_x)_z$ oder statt $\partial(\partial f_z)_x$ schreiben, desgleichen $\partial^{2,1} f_{x,z}$ statt $\partial^2(\partial f_z)_x$ oder statt $\partial(\partial^2 f_x)_z$; ferner $\partial^{1,2} f_{x,z}$ statt $\partial^2(\partial f_x)_z$ oder statt $\partial(\partial^2 f_z)_x$; u. s. w. f.

§. 61.

Sollen nun aber die Werthe von x und z gefunden werden, welche $f_{x,z}$ größer machen, als alle durch $f_{x+ph,z+qh}$ ausgedrückten, für ein unendlich-kleines h und für alle denkbaren Werthe von p und q sich ergebenden nächsten Nachbar-Werthe von $f_{x,z}$, so darf man nur in dem vorstehenden Ausdruck für $f_{x+h,z+k}$ statt h jetzt ph, und qh statt k schreiben, und man erhält sogleich $f_{x+ph,z+qh}$ nach Potenzen von h geordnet, so daß man

1) $f_{x+ph,z+qh}$

$$=f_{x,z}+(\partial f_x\cdot p+\partial f_z\cdot q)\cdot h+(\partial^2 f_x\cdot p^2+2\cdot\partial^{1,1} f_{x,z}\cdot pq+\partial^2 f_z\cdot p^2)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots$$

erhält. Dann darf man nur die Schlüsse des §. 58.) wiederholen, und man findet sogleich wieder, daß $f_{x,z}$ nicht ein solches Maximum werden kann, wenn nicht der Koefficient von h^1 für alle denkbaren Werthe von p und q der Null gleich wird, also wenn nicht für alle Werthe von p und q

2) $$\partial f_x\cdot p+\partial f_z\cdot q=0$$

wird, welches nur dann der Fall seyn kann, wenn einzeln

3) $$\partial f_x=0 \quad \text{und} \quad \partial f_z=0,$$

ist, weil außerdem die Gleichung 2.) nicht existiren würde, wenn $q=0$ und p beliebig, und auch nicht, wenn $p=0$ und q beliebig genommen wird.

Ganz dasselbe muß aber gesagt werden, wenn $f_{x,z}$ kleiner werden soll, als $f_{x+ph,z+qh}$ für alle denkbaren Werthe von p und q und für einen unendlich-kleinen Werth von h gedacht. Immer müssen die beiden Gleichungen 2.) zu gleicher Zeit statt finden.

Es machen aber die Werthe von x und z, welche aus den Gleichungen 2.) für x und z sich ergeben, den Werth $f_{x,z}$ zu einem Größten (Maximum), wenn der Koefficient von h^2 in 1.) für alle denkbaren reellen Werthe von p und q negativ wird. Wird dagegen derselbe Koefficient unter denselben Voraussetzungen immer fort positiv, so hat $f_{x,z}$ (gegen alle nächsten Nach-

bar-Werthe $f_{x+ph,z+qh}$) einen kleinsten Werth (Minimum). — Bezeichnet man aber durch

$$A, \quad B, \quad C$$

bezüglich die Werthe von

$$\partial^2 f_x, \quad \partial^{1,1} f_{x,z}, \quad \partial^2 f_z,$$

welche diese Ausdrücke für diejenigen Werthe von x und z annehmen, die den Gleichungen $\partial f_x = 0$ und $\partial f_z = 0$ genügen, so ist der Koefficient von h^2 dieser:

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2,$$

oder, wenn man $\frac{q}{p} = r$ setzt, dieser

$$p^2 \cdot (A + 2Br + Cr^2) \quad \text{oder} \quad Cp^2 \cdot \left[\left(r + \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{C^2}\right].$$

Folglich ist, da die Quadrate allemal positiv sind, so lange nur A, B, C so wie p und q reell gedacht werden, dieser Koefficient von h^2 offenbar immerfort negativ, wenn C negativ ist und $AC > B^2$; dagegen ist derselbe Koefficient allemal und immerfort positiv, wenn C positiv und wiederum $AC > B^2$ ist.

Ist daher nicht $AC > B^2$, und sind auch nicht zugleich A, B, C alle drei der Null gleich, so machen die Werthe von x und z, welche $\partial f_x = 0$ und $\partial f_z = 0$ machen, den Ausdruck $f_{x,z}$ weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum (in Bezug auf alle durch $f_{x+ph,z+qh}$ ausgedrückten nächsten Nachbar-Werthe). — Wird aber $AC > B^2$ gefunden (und in diesem Falle sind A und C beide zugleich positiv, oder beide zugleich negativ), so ist $f_{x,z}$ ein Maximum, wenn A oder C negativ gefunden wird; und ein Minimum, wenn A oder C positiv ist.

Nehmen wir als Beispiel

$$f_{x,z} = 2z^2 - 4xz + 3x^2 - 7z + 4x + 1,$$

so findet sich

$$\partial f_x = -4z + 6x + 4 \quad \text{und} \quad \partial f_z = 4z - 4x - 7.$$

Die Gleichungen $\partial f_x = 0$ und $\partial f_z = 0$ werden daher jetzt

$$-4z+6x+4=0 \quad \text{und} \quad 4z-4x-7=0,$$

und geben, wenn man solche nach x und nach z auflöst

$$x=\tfrac{3}{2} \quad \text{und} \quad z=\tfrac{13}{4}.$$

Ferner wird

$$\partial^2 f_x = 6 = A, \quad \partial^{1,1} f_{x,z} = -4 = B \quad \text{und} \quad \partial^2 f_z = 4 = C.$$

Folglich ist $AC > B^2$ und A und C positiv. Demnach nimmt $f_{x,z}$ für $x=\frac{3}{2}$ und $z=\frac{13}{4}$ einen kleinsten Werth an, welcher $=-7\frac{3}{8}$ ist. Wie man auch x oder z oder beide, um unendlich wenig vergrößern oder verkleinern möge, — immer wird der zugehörige Werth von $f_{x,z}$ größer als $-7\frac{3}{8}$ werden.

Nimmt man als zweites Beispiel

$$f_{x,z} = 1 - 12x - 27z + x^3 + z^3,$$

so findet sich

$$\partial f_x = -12 + 3x^2; \qquad \partial f_z = -27 + 3z^2;$$

$$\partial^2 f_x = 6x; \qquad \partial^{1,1} f_{x,z} = 0; \qquad \partial^2 f_z = 6z.$$

Die Gleichungen $\partial f_x = 0$ und $\partial f_z = 0$ geben jetzt

$$x = \pm 2 \quad \text{und} \quad z = \pm 3$$

für $x=+2$ und $z=+3$, wird $AC > B^2$ und A (oder C) positiv; folglich hat $f_{x,z}$ für diese Werthe von x und z einen kleinsten Werth. — Für $x=-2$ und $z=-3$ wird $AC > B^2$ und A (oder C) negativ; also hat für dieses Paar Werthe von x und z, die Funktion $f_{x,z}$ einen größten Werth. — Für $x=+2$ und $z=-3$, oder $x=-2$ und $z=+3$ endlich, wird $AC < B^2$; also hat dasmal (in beiden letztern Fällen) $f_{x,z}$ weder einen größesten noch einen kleinsten Werth. —

Sie=

Siebentes Kapitel.

Von den natürlichen Potenzen und Logarithmen. Von den künstlichen Potenzen und Logarithmen. Von den natürlichen Sinus und Kosinus.

Einleitung.

§. 62.

In der gesammten Analysis spielen die **Sinus** und **Kosinus**, d. h. *sin* x und *cos* x, eine wichtige Rolle. Man kann aber zu ihnen auf zweifache Weise gelangen. Der eine (geschichtliche) Weg zeigt die Sinus und Kosinus in der Geometrie zuerst vor, als Linien in dem Kreise, dessen Radius 1 ist, und welche von dem Bogen x dieses Kreises auf die (geometrisch sichtbare) Weise abhängen, daß anfänglich *sin* x mit x zugleich aber nicht proportional wächst, während *cos* x gleichzeitig abnimmt. Beobachtet man aber diese Abhängigkeit der (Kreis-) Sinus und Kosinus von dem (Kreis-) Bogen, so muß man sich bald sagen, daß alle diese Linien nebst den zugehörigen Bogen bestimmte Ziffern-Werthe sind oder vorstellen, daß dagegen ein **allgemeiner Ausdruck**, der x enthält, existiren muß, welcher für die verschiedenen Werthe, die der Bogen x annehmen kann, die verschiedenen (Ziffern-) Werthe liefert, welche *sin* x hat; und daß ein zweiter allgemeiner Ausdruck existiren müsse, welcher auf dieselbe Weise für alle Werthe des Bogens x die zugehörigen Werthe derjenigen andern Linien liefert, welche im Kreise unter dem Namen *cos* x vorkommen.

Betritt man diesen (geschichtlichen) Weg, so sucht und findet man (nach §. 47. III. u. IV.) die Reihen

$$1-\frac{c^2x^2}{2!}+\frac{c^4x^4}{4!}-\frac{c^6x^6}{6!}+\cdots \text{ oder } S\left[(-1)^a\cdot\frac{c^{2a}x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

und

$$cx-\frac{c^3x^3}{3!}+\frac{c^5x^5}{5!}-\frac{c^7x^7}{7!}+\cdots \text{ od. } S\left[(-1)^a\cdot\frac{c^{2a+1}x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

welche für jedes c bezüglich eine der Haupt-Eigenschaften der Kosinus und Sinus im Kreise haben. Dann sucht man den Werth von c, für welchen in einem einzigen Falle, z. B. wenn x unendlich-klein gedacht wird, die zweite dieser Reihen wirklich den Werth des *sin* x im Kreise liefert. Man findet (weil *sin* x dem Bogen x desto näher rückt, je kleiner x gedacht wird, die obige zweite Reihe aber dem cx desto näher rückt, je kleiner x gedacht wird) $c=1$. Man hofft dann, daß für $c=1$ die erstere Reihe

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, =\cos x,$$

und die andere Reihe

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots, =\sin x$$

seyn werde, d. h. daß diese Reihen, wenn man in sie statt x die verschiedenen Bogen-Längen substituirt, genau die Längen der geraden Linien geben werden, welche im Kreise den Namen der Sinus und Kosinus führen. — Diese beiden Reihen sind dann, wenn die Hoffnung nicht trügt, die eigentlichen und wahren Kosinus und Sinus, und was in der Elementar-Trigonometrie unter denselben Namen vorkam, das waren nur die, als Linien sichtbar gemachten, zu den verschiedenen Werthen des Bogens x gehörigen Ziffern-Werthe dieser allgemeinen Ausdrücke.

In so fern aber *cos* x und *sin* x nun so allgemein aufgefaßt werden, so hat man außer den Sinus- und Kosinus-Werthen in der Elementar-Trigonometrie, auch noch andere; in so fern man nach den Werthen fragen kann, welche diese Reihen annehmen, nicht bloß wenn man statt x negative Zahlen

oder Null setzt, sondern auch, wenn statt x etwa $q \cdot i$ oder $p + q \cdot i$ gesetzt wird; unter i die $\sqrt{-1}$ verstanden. Dies giebt $cos(qi)$, $sin(qi)$, auch $cos(p+q \cdot i)$ und $sin(p+q \cdot i)$, und man findet sogar nach dieser Substitution, daß $cos(qi)$ einen reellen Werth annimmt und $sin(qi)$ die Form $Q \cdot i$ erhält, während, weil

$$sin(p+qi) = sin\,p \cdot cos\,qi + cos\,p \cdot sin\,qi$$

und

$$cos(p+qi) = cos\,p \cdot cos\,qi - sin\,p \cdot sin\,qi \; ^{*)}$$

gefunden wird, sowohl $sin(p+qi)$ als auch $cos(p+qi)$ Werthe von der Form $P+Qi$ annehmen.

So einfach dieser Gang ist, um sich von den speciellen Sinus und Kosinus der Elementar-Trigonometrie zu den allgemeinen Ausdrücken zu erheben, deren Ziffern-Werthe jene nur sind, und deren Eigenschaften im Allgemeinen zugleich die wesentlichsten Eigenschaften jener Ziffern-Werthe enthalten, — so wird der geneigte Leser doch fühlen, daß er auch seine schwache Seite hat. Es ist namentlich gewagt anzunehmen, daß wenn in der Reihe

$$cx - \frac{c^3x^3}{3!} + \frac{c^5x^5}{5!} - \cdots$$

c für irgend einen Werth von x so bestimmt worden ist, daß die Reihe selbst für diesen Werth von x mit dem elementaren $sin\,x$ zusammenfällt — daß dieser Werth von c für alle übrigen Werthe von x denselben Werth behalte, — wenn wir auch annehmen können, daß derselbe Werth von c für eine unendlich-

---

*) Da dies die Formeln sind

$$sin(x+z) = sin\,x \cdot cos\,z + cos\,x \cdot sin\,z$$

und

$$cos(x+z) = cos\,x \cdot cos\,z - sin\,x \cdot sin\,z,$$

solche aber in den Elementen nur für reelle (eigentlich nur für positive) Werthe von x und z erwiesen werden, so kann man diese Formeln eigentlich nicht so allgemein gelten lassen, als dies oben geschehen ist; und es müssen daher dieselben Formeln eigentlich vorher noch einmal bewiesen werden, daß sie nämlich für jedes allgemeine x und z gelten.

große Anzahl von Werthen von x derselbe bleibe, die dem ersteren näher anliegen. — Auch fragt es sich, ob überhaupt eine nach x fortlaufende Reihe existirt, welche alle Werthe des Elementar-Sinus von x auszudrücken im Stande ist; denn daraus, daß die im §. 47. III.) und IV.) gefundenen Reihen eine Eigenschaft der Kosinus und Sinus enthalten, folgt noch nicht nothwendig, daß sie nun alle Eigenschaften von Kosinus und Sinus, d. h. daß sie jene Kosinus und Sinus selbst alle enthalten werden.

In dieser letztern Beziehung ist der andere Weg vorzuziehen, der nun näher bezeichnet werden mag. Man braucht nämlich Elementar-Trigonometrie gar nicht vor der Analysis zu betreiben, und wenn man sie schon getrieben hat, so kann man sie doch ignoriren, und kann hier (in der Analysis), wo ohnedieß von den unendlichen Reihen gesprochen wird, diese beiden Reihen

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

und

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

unter irgend einem Namen, wozu man die Namen und Zeichen $\cos x$ und $\sin x$ wählen kann, einer näheren Betrachtung unterziehen, ihre Eigenschaften näher kennen lernen, und es späterem Unterrichte in der Geometrie überlassen, nachzuweisen, daß die Ziffern-Werthe, welche sie für die positiven Werthe von x annehmen, allemal die Längen gewisser Linien im Kreise ausdrücken, wenn x die Länge eines Kreisbogens vorstellt.

Dieser Weg, der vom Allgemeinen ausgeht und zu den besonderen Fällen erst später gelangt, ist ganz gründlich, läßt nirgends etwas zu wünschen übrig, und kann in den Augen des Anfängers nur das Unangenehme haben, daß ihm diese Reihen wie vom Himmel gefallen erscheinen, während sie auf dem erstern (geschichtlichen) Wege aus dem Bedürfnisse hervorgegangen

sind, die geometrisch anschaulichen Gesetze des Fortschreitens der Werthe von *sin* x und *cos* x, in allgemeinen (analytischen) Ausdrücken nachzuweisen. Allein diese beiden Reihen $1-\frac{x^2}{2!}+\cdots$ und $x-\frac{x^3}{3!}+\cdots$ erscheinen ja nicht bloß in der Geometrie (im Kreise), sondern in analytischen Untersuchungen selbst, wie wir bald zeigen werden. So wie sie aber erscheinen, kann man solche sogleich einer nähern Betrachtung unterziehen, und zwar zeigt die Art der Erscheinung sogleich ganz einfach auch die Art der Behandlung, der sie unterworfen werden müssen, um ihre allgemeinen Eigenschaften auszumitteln.

So viel vorläufig über Sinus und Kosinus. Wir bemerken hier nur noch daß, nachdem in dem vorstehenden der geschichtliche Gang hinreichend anschaulich gemacht worden ist, wir in dem gegenwärtigen Kapitel absichtlich den zweiten Gang einschlagen, also **Elementar-Trigonometrie gar nicht voraussetzen, sondern später erst die Anwendung unserer Reihen auf Geometrie und auf den Kreis uns vorbehalten.**

§. 63.

Ganz anders ist es mit den Potenzen. — Setzt man $b=a-1$, so daß $a=1+b$ ist, so ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$a^x=(1+b)^x=1+xb+x(x-1)\cdot\frac{b^2}{2!}+x(x-1)(x-2)\cdot\frac{b^3}{3!}+\cdots.$$

Multiplicirt man nun hier $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$, u. s. f., d. h. verwandelt man diese Produkte bezüglich in die algebraischen Summen $-x+x^2$, $2x-3x^2+x^3$, u. s. f., so bekommt man sogleich, wenn diese Werthe in obige Reihe substituirt werden, und wenn man die Glieder ordnet, eine Doppel-Reihe, welche entweder nach Potenzen von b fortlaufend geordnet werden kann, so daß die Koefficienten (endliche oder unendliche) Reihen nach x sind, — welche aber auch nach Potenzen von x geordnet werden kann,

so daß die Koefficienten Reihen nach b sind. Hier weiß man also, daß die Elementar-Pótenzen, die man früher kennen gelernt hat, sich wirklich durch eine, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe ausdrücken lassen. Wenn man daher im §. 47. I.) alle nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen gefunden hat, welche mit der Potenz a^x die Eigenschaft gemein haben, nach welcher $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ ist, und wenn diese alle in der einzigen

$$(R_x) \ldots \quad 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{2!} + \frac{A^3x^3}{3!} + \frac{A^4x^4}{4!} + \ldots$$

stecken und aus dieser einzigen für die verschiedenen Werthe, die man statt A setzen mag, hervorgehen, so muß die obige, mittelst des binomischen Lehrsatzes für a^x erhaltene, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, ebenfalls darunter mit begriffen seyn, und man kann sich daher die Frage stellen: „Welchen „Werth muß A annehmen, damit die Reihe R_x den Werth „der elementaren Potenz a^x (wo a beliebig, aber x positiv oder „negativ ganz, oder wo x beliebig reell, aber a positiv ganz „oder gebrochen ist) erhalte, welchen der Werthe von x man auch „immer statt x setzen möge." — Für jedes andere a wird auch A anders werden müssen, und nimmt man A zuerst an, so wird sich a dazu finden lassen, und so, daß der Werth der Reihe R_x mit dem Werthe der elementaren Potenz a^x zusammenfällt, so oft statt x einer der Werthe gesetzt wird, für welchen a^x einen Werth hat.

Es geht aber die Gleichung zwischen A und a, aus der Gleichung

$$1) \quad a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{2!} + \frac{A^3x^3}{3!} + \ldots = S\left[\frac{A^a x^a}{a!}\right]$$

hervor, wenn man 1 statt x setzt. Sie wird daher diese:

$$2) \quad a = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = S\left[\frac{A^a}{a!}\right].$$

Bezeichnen wir nun den zu $A=1$ hieraus sich ergebenden Werth von a durch e, so geht die Gleichung 1.) über in

$$3)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = S\left[\frac{x^a}{a!}\right],$$

während e selbst gegeben ist durch die Gleichung

$$4)\qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = S\left[\frac{1}{a!}\right].$$

Berechnet man sich diesen Werth von e in Form eines Decimalbruches, so erhält man näherungsweise

$$5)\qquad e = 2{,}7182818\cdots.$$

Hat man aber den Werth A zu einem gegebenen Werthe von a dergestalt bestimmt, daß die Reihe R_x mit dem Werthe der elementaren Potenz a^x für alle die Werthe von x zusammenfällt, für welche a^x in den Elementen eine Bedeutung erhalten hat, — so ist die Reihe R_x allgemeiner als a^x, weil R_x der wirkliche Ausdruck, d. h. die wirkliche Folge der angezeigten Operationen ist, welche mit x im Allgemeinen vorgenommen sind, — weil daher R_x für jeden, also auch für jeden imaginären Werth von x, seine bestimmte Bedeutung hat, während das, was man in den Elementen unter a^x verstand, bloß einige der Werthe dieser Reihe sind, für einige (nämlich höchstens für alle reellen) Werthe von x. Wir erblicken also in der Reihe R_x in Bezug auf die Potenz das, wonach wir im §. 11.) strebten und können vielleicht die Reihe R_x als die allgemeine Potenz hinstellen, d. h. wir können vielleicht unter dem Namen der allgemeinen Potenz diese Reihe R_x einer nähern Betrachtung unterziehen, während alle frühern in den Elementen bekannt gewordenen Potenzen in dieser allgemeinen enthalten sind.

Verfolgt man diesen Weg, so findet man eine kleine Schwierigkeit, welche sich der Ausführung dieser Idee hemmend entgegen zu setzen scheint, und welche darin besteht, daß man nicht weiß, ob und wie zu jedem a auch allemal das zugehörige A

wirklich gefunden werden könne. Dies ist der Grund, **warum** wir in dem Folgenden die Reihe R_x einstweilen bloß in **dem** Falle einer nähern Betrachtung unterziehen, in welchem $A = 1$ genommen wird.

Diese in dem vorhergehenden und dem gegenwärtigen Paragraphen eingeleiteten Untersuchungen mögen nun selbst folgen.

Erste Abtheilung.

Von den natürlichen und künstlichen Potenzen und Logarithmen.

§. 64.

Von den natürlichen Potenzen.

Die obige Reihe R_x für den Fall, daß $A = 1$ ist, also die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{oder} \quad S\left[\frac{x^a}{a!}\right]$$

mag durch e^x bezeichnet und *natürliche* Potenz genannt werden, während e die Bedeutung des §. 63. N. 4.) hat.

Hieraus folgt sogleich:

1) Die *natürliche* Potenz e^x fällt mit der in den Elementen definirten *reellen* Potenz a^x für $a = e$ zusammen, ist aber allgemeiner als letztere, weil in der gedachten Reihe das x auch einen imaginären Werth haben kann, oder besser, weil eben jetzt erst unter e^x ein allgemeiner Ausdruck, d. h. eine Reihe *angezeigter* Operationen verstanden wird.

2) Da die Reihe R_x (nach §. 47. I.) für jeden Werth von A die Eigenschaft hat, daß

$$R_x \cdot R_z = R_{x+z}$$

ist, so hat sie dieselbe auch für $A = 1$. — Also ist für jedes reelle oder imaginäre, nämlich für jedes allgemeine x und z,

$$\text{I.} \qquad e^x \cdot e^z = e^{x+z},$$

woraus sogleich auch noch folgt

$$\text{II.}\qquad e^x : e^z = e^{x-z} \text{ *)}.$$

Ferner folgt noch aus I.):

$$e^x \cdot e^x \cdot e^x \cdot e^x \cdots = e^{x+x+x+x+\cdots}$$

oder

$$\text{III.}\qquad (e^x)^m = e^{mx},$$

wenn nur m eine positive ganze Zahl vorstellt. — Zuletzt ist aber auch noch

$$(e^x)^{-m} = \frac{1}{(e^x)^m} = \frac{1}{e^{mx}} = (\text{nach I.})\, e^{-mx};$$

also gilt die Formel III.) auch noch, wenn m eine negative ganze Zahl vorstellt.

§. 65.

Von den natürlichen Logarithmen im Allgemeinen.

Jeder reelle oder imaginäre Ausdruck x, welcher die Eigenschaft hat, daß er e^x, $= a$ macht, mag hier und in der Folge immer durch *log* a bezeichnet und dieses Zeichen *log* a der natürliche Logarithme von a genannt werden **).

I. Da die Gleichung $e^x = a$, aus welcher dieser, durch *log* a oder x bezeichnete Ausdruck gefunden werden soll (nach §. 64.), keine andere als diese ist:

$$(-a+1) + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 0,$$

folglich die Form einer höhern Gleichung hat, die gleichsam vom unendlichen Grade ist, so können (und werden) mehrere,

*) Multiplicirt man nämlich e^{x-z} mit e^z, so erhält man (nach I.) sogleich e^{x-z+z} oder e^x.

**) In andern Schriften sieht man denselben auch durch *log.nat.* a oder doch durch *logn.* a bezeichnet, was natürlich eben so gut ist. Da man in der ganzen Analysis fast nie andere als natürliche Logarithmen gebraucht, so ist es am bequemsten gerade diese durch das einfachste Zeichen auszudrücken.

ja unendlich viele Werthe von x existiren, die alle einander nicht gleich sind, welche aber die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß sie e^x, $= a$ machen.

II. Giebt man dem x nach und nach alle stetig wachsenden positiven Werthe, von 0 an bis in's Unendliche, so wächst e^x von 1 an stetig bis in's Unendliche, und ist und bleibt immer positiv, weil alle Glieder der Reihe e^x positiv sind, und für jedes größere x selbst größer werden. — Giebt man nachher dem x alle durch $-y$ vorgestellten negativen Werthe von 0 bis in's (negative) Unendliche, so erhält man $\left(\text{wegen } e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}\right)$ für e^x abermals lauter positive Werthe, welche von 1 an bis zu Null hin ohne Ende fort abnehmen. — Hieraus folgt:

1) Eine negative Zahl $-a$ hat keinen reellen Werth des natürlichen Logarithmen, weil, wenn x derselbe wäre, dann $e^x = -a$ seyn müßte, während e^x für jeden reellen Werth von x immer positiv wird. Jeder natürliche Logarithme einer negativen Zahl ist also immer imaginär.

2) Eine positive Zahl $+a$ hat immer einen, aber auch nur einen einzigen reellen Werth ihres natürlichen Logarithmen, welcher 0 ist für $a = 1$, welcher positiv ist für $a > 1$, dagegen negativ für $a < 1$. — Hat daher ein natürlicher Logarithme einer positiven Zahl mehr als einen einzigen Werth, so sind die übrigen alle imaginär.

§. 66.

Von den reellen natürlichen Logarithmen (der positiven Zahlen).

Wird a positiv vorausgesetzt und bezeichnet man durch La den, allemal existirenden und einzigen reellen Werth des natürlichen Logarithmen von a, so fällt La mit dem in den Elementen betrachteten reellen Logarithmen, für den Fall zusammen, daß bei letzterem die Zahl e (§. 69.) zur Basis genommen wird.

Für diese reellen natürlichen Logarithmen gelten daher die aus den Elementen bekannten Sätze der Logarithmen, nämlich

1) $L(\mathrm{ab}) = L\mathrm{a} + L\mathrm{b}$;

2) $L\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right) = L\mathrm{a} - L\mathrm{b}$;

3) $L(\mathrm{a}^{\mathrm{b}}) = \mathrm{b} \cdot L\mathrm{a}$;

und 4) $L(\sqrt[\mathrm{b}]{\mathrm{a}}) = \frac{L\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$.

Sie können hier auch augenblicklich, so wie dort, erwiesen werden.

§. 67.

Berechnung der reellen natürlichen Logarithmen.

Sucht man (nach §. 63.) den Werth von A, damit die Reihe

$$1 + \frac{\mathrm{Ax}}{1} + \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3\mathrm{x}^3}{3!} + \frac{\mathrm{A}^4\mathrm{x}^4}{4!} + \cdots$$

der reellen Potenz a^{x} gleich werde (wo a positiv gedacht ist), so findet man für $\mathrm{x} = 1$,

$$1 + \frac{\mathrm{A}}{1} + \frac{\mathrm{A}^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3}{3!} + \cdots = \mathrm{a},$$

oder $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{a}$, d. h. $\mathrm{A} = L\mathrm{a}$,

so daß für jedes positive a und reelle x allemal

$$\text{I.}\quad \mathrm{a}^{\mathrm{x}} = 1 + \frac{\mathrm{x} \cdot L\mathrm{a}}{1} + \frac{\mathrm{x}^2 \cdot (L\mathrm{a})^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^3 \cdot (L\mathrm{a})^3}{3!} + \cdots$$

wird. — Subtrahirt man von jeder Seite dieser Gleichung I.) die Einheit, dividirt man durch x und wird zuletzt 0 statt x gesetzt, so erhält man

$$\text{II.}\quad L\mathrm{a} = \frac{\mathrm{a}^{\mathrm{x}} - 1}{\mathrm{x}} \text{ (für } \mathrm{x} = 0\text{)}.$$

Setzt man nun $1 + \mathrm{b} = \mathrm{a}$, also $\mathrm{b} = \mathrm{a} - 1$, so wird noch nach dem binomischen Lehrsatze

$$\mathrm{a}^{\mathrm{x}} = (1+\mathrm{b})^{\mathrm{x}} = 1 + \mathrm{x} \cdot \mathrm{b} + \frac{\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)}{2!} \cdot \mathrm{b}^2 + \frac{\mathrm{x}^{3|-1}}{3!} \cdot \mathrm{b}^3 + \frac{\mathrm{x}^{4|-1}}{4!} \cdot \mathrm{b}^4 + \cdots$$

Diese Reihe zur Rechten muß also der I.) zur Rechten gleich

seyn. Zieht man die Einheit von beiden ab, dividirt man beide durch x, und setzt man dann in beiden Null statt x, so müssen die Resultate, die aus beiden hervorgehen, noch einander gleich seyn. Dies giebt aber (wenn man noch statt b seinen Werth a—1 setzt) augenblicklich die Gleichung

$$La = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \cdots,$$

oder, wenn statt a sein Werth 1+b gesetzt wird,

$$\text{III.} \qquad L(1+b) = b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{4}b^4 + \cdots.$$

Setzt man hier —b statt b und subtrahirt man beide Resultate, so findet man noch

$$\text{IV.} \qquad L\frac{1+b}{1-b} = 2(b + \tfrac{1}{3}b^3 + \tfrac{1}{5}b^5 + \tfrac{1}{7}b^7 + \cdots).$$

Nach diesen Formeln könnte man zur Noth den reellen natürlichen Logarithmen von 1+b und von $\frac{1+b}{1-b}$ Näherungs-Weise berechnen, wenn $b < 1$ ist. Wollte man aber von einer beliebigen positiven Zahl p den reellen natürlichen Logarithmen berechnen, und könnte man sich die absolute Wurzel $\sqrt[m]{p} = w$ verschaffen, für den Fall, daß die Zahl m beliebig und ziemlich groß genommen wird, so ist w allemal von der 1 sehr wenig verschieden. Setzt man dann

$$1+b = w, \qquad \text{also} \qquad b = w-1$$

oder

$$\frac{1+b}{1-b} = w, \qquad \text{also} \qquad b = \frac{w-1}{w+1},$$

so wird in beiden Fällen b sehr klein, und man bekommt dann aus III.) oder IV.) den Werth von Lw jedesmal mittelst einer sehr schnell convergirenden Reihe. Weil aber

$$\sqrt[m]{p} = w \qquad \text{ist, so ist auch} \qquad p = w^m,$$

also (nach §. 66. N. 4.)

$$Lp = m \cdot Lw;$$

und so hat man auch Lp gefunden. Dabei könnte man m so nehmen, daß man $\sqrt[m]{p}$ durch auf einander folgendes Quadrat-

Wurzel-Ausziehen erhalten kann, z. B. wenn $m = 4$, oder $m = 8$, oder $m = 16$, oder überhaupt $m = 2^n$ genommen wird.

Setzt man $\frac{1}{z}$ statt b in III.), so erhält man links $L\left(1+\frac{1}{z}\right)$ d. h. $L\frac{z+1}{z}$ d. h. $L(z+1)-Lz$. Die Gleichung selbst wird dann

$$\text{V.} \quad L(z+1) = Lz + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4z^4} + \cdots.$$

Diese Reihe ist sehr bequem, um, wenn man bereits die Logarithmen größerer Zahlen z gefunden hat, die der nächst größeren Zahlen $z+1$ zu berechnen. Ist z. B. $z > 10000$, so haben die Glieder mit z^2, z^3 etc. etc. im Nenner keinen Einfluß mehr auf die 7te Decimalstelle, so daß man dann bloß

$$L(z+1) = Lz + \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad L(z+1) - Lz = \frac{1}{z}$$

nehmen kann.

Man kann viele solche Gleichungen construiren, durch welche die Logarithmen der folgenden Zahlen in die Logarithmen der vorhergehenden ausgedrückt werden. Um nur noch ein Beispiel zu geben, setzen wir in der Gleichung IV.)

$$\frac{1+b}{1-b} = \frac{n+z}{n}, \quad \text{also} \quad b = \frac{z}{2n+z}.$$

Dann erhält man

$$\text{VI.} \quad L(n+z) =$$

$$Ln + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \cdots\right].$$

Dies ist eine Formel, durch welche man, wenn n schon recht groß und Ln schon berechnet ist, sogleich den Logarithmen $L(n+z)$ *) einer jeden von n um z entfernten Zahl bequem

---

*) Wir brauchen kaum besonders darauf aufmerksam zu machen, daß man bloß die Logarithmen der Primzahlen zu haben braucht; da der Logarithme jeder zusammengesetzten Zahl $a \cdot b$ gefunden wird, wenn man La und Lb zu einander addirt.

berechnen kann, wenn nur z viel kleiner als n ist, damit $\frac{z}{2n+z}$ sehr klein werde.

Da $c^x = \left(\frac{1}{c}\right)^{-x}$ ist, letztere Potenz aber, wenn man ihr die Form $(1+y)^{-x}$ giebt, wo $y = \frac{1}{c} - 1 = \frac{1-c}{c}$ ist, nach dem binomischen Lehrsatze ebenfalls in eine Reihe nach y verwandelt werden kann, so kann man auch 1 von dieser neuen Form für c^x subtrahiren, durch x dividiren und zuletzt Null statt x schreiben. Man erhält dann (aus II.)

$$\text{VII.}\quad Lc = \frac{c-1}{c} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c-1}{c}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{c-1}{c}\right)^4 + \cdots,$$

wo man wieder $\sqrt[m]{a}$ statt c schreiben kann, um $L(\sqrt[m]{a})$ d. h. $\frac{1}{m} \cdot La$, also La auch in dem Falle, wo a etwas groß seyn sollte, bequemer zu erhalten, weil dann m immer groß genug genommen werden kann, daß $\sqrt[m]{a} - 1$ sehr klein wird.

Anmerkung. In der neueren Zeit hat man zur Berechnung von Logarithmen-Tafeln noch viel bequemere Formeln construirt, worüber man La croix Traité du calcul diff. et intégr. T. III. Chap. I., so wie noch den 2ten Band dieses gegenwärtigen Werkes Kap. 13. nachlesen kann.

§. 68.

Von der künstlichen Potenz.

Da (nach §. 67. I.) die Reihe

$$1 + \frac{x \cdot La}{1} + \frac{x^2 \cdot (La)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (La)^3}{3!} + \cdots$$

für jedes positive a und für jedes reelle x allemal der reellen Potenz a^x (wie solche in den Elementen definirt worden ist) gleich ist, so wollen wir künftighin diese Reihe für jedes reelle oder imaginäre x d. h. für jedes allgemeine x, aber für ein positives a, durch a^x

bezeichnen, und dies nun allgemeiner aufgefaßte Zeichen eine künstliche Potenz nennen. — Danach ist die reelle Potenz in der künstlichen, als ein besonderer Fall enthalten, nämlich wenn x reell ist.

Weil aber die gedachte Reihe (nach §. 64.) nichts weiter ist als $e^{x \cdot La}$, so sieht sich die künstliche Potenz sogleich auf die natürliche zurückgebracht und zwar mittelst der Gleichung

$$(\odot) \cdots \qquad a^x = e^{x \cdot La}.$$

Daraus folgt sogleich

$$1) \quad a^x \cdot a^z = a^{x+z}$$

$$2) \quad a^x : a^z = a^{x-z}$$

$$3) \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$4) \quad a^x : b^x = (a:b)^x,$$

wenn nur die Dignanden a, b positiv sind, während x und z ganz allgemein gedacht werden und daher auch reell oder imaginär seyn können.

Die Formel 1.), also auch die 2.) folgt auch unmittelbar aus §. 47. I.). — Die 3.) beweist sich so: Es ist $a^x = e^{x \cdot La}$, $b^x = e^{x \cdot Lb}$; also $a^x \cdot b^x = e^{x(La+Lb)} = e^{x \cdot L(ab)} = (ab)^x$. — Die 4.) folgt dann wieder aus der 3.), indem man beide Seiten der Gleichung mit b^x multiplicirt.

§. 69.

Von dem künstlichen Logarithmen.

Mit der künstlichen Potenz ist der künstliche Logarithme $\overset{a}{log}\, b$ zugleich gegeben, wenn man darunter jeden reellen oder imaginären Ausdruck x versteht, welcher a^x, $= b$ macht, unter der Voraussetzung, daß a und b zugleich positiv sind, und a nicht $= 1$ ist.

Um x zu finden aus $a^x = b$, darf man nur statt a^x den gleichen Ausdruck $e^{x \cdot La}$ schreiben. Dann hat man

$$e^{x \cdot La} = b, \quad \text{also} \quad x \cdot La = log\, b, \quad \text{und} \quad x = \frac{log\, b}{La}.$$

Man hat also

$$(\odot)\cdots \qquad \overset{a}{log}\,b = \frac{log\,b}{La} = \frac{1}{La}\cdot log\,b;$$

d. h. man findet alle Werthe des künstlichen Logarithmen von b für die Basis a, wenn man alle Werthe des natürlichen Logarithmen von b durch den reellen Werth des natürlichen Logarithmen der Basis a dividirt, oder mit dem Faktor $\frac{1}{La}$ multiplicirt. -- Dieser Faktor $\frac{1}{La}$ wird dabei der Modul des künstlichen Logarithmen genannt.

Aus der Formel $\odot$.) in Verbindung mit §. 67. N. N. 1.) und 2.) geht aber sogleich noch hervor:

1) Eine negative Zahl $-b$ hat keinen reellen Werth des künstlichen Logarithmen; alle seine Werthe sind daher in diesem Falle imaginär.

2) Eine positive Zahl $+b$ hat allemal einen und nur einen einzigen reellen Werth ihres künstlichen Logarithmen, und dieser ist der in den Elementen unter dem Namen des reellen (und in anderen Schriften unter dem Namen des künstlichen) vorkommende Logarithme. — Hat daher der hier definirte künstliche Logarithme einer positiven Zahl mehr als einen Werth, so sind die übrigen alle imaginär. — Diesen einzigen reellen Werth des künstlichen Logarithmen einer (positiven) Zahl b für die Basis a, könnte man durch $\overset{a}{L}b$ bezeichnen.

3) Für die künstlichen reellen Logarithmen gelten dieselben Formeln, welche §. 66. N. N. 1—4.) für die natürlichen reellen Logarithmen gegeben worden sind, wenn nur die Logarithmen alle für eine und dieselbe (versteht sich allemal positive, übrigens beliebige) Basis genommen sind. Außerdem findet man auch leicht noch

$$\frac{La}{Lc} = \frac{La}{Lb}\cdot\frac{Lb}{Lc} \text{ d. h. } \overset{c}{L}a = \overset{b}{L}a\cdot\overset{c}{L}b.$$

Alle

Alle diese Formeln sind aber auch schon in den Elementen (§. 12.) für dieselben (reellen) Logarithmen entwickelt.

4) Multiplicirt man die Reihen rechts in den Gleichungen §. 67. III., IV. und VII.) mit dem Modul $\frac{1}{La}$, so hat man Reihen, welche bezüglich die reellen Werthe der künstlichen Logarithmen von $1+b$, $\frac{1+b}{1-b}$ und c, für die Basis a, geben. — Die Gleichungen V.) und VI.) des §. 67.) gehen aber, wenn man sie mit $\frac{1}{La}$ multiplicirt und wenn wir statt $\overset{a}{L}$ lieber *Log* schreiben, für die reellen künstlichen Logarithmen in folgende über:

$$Log(z+1) = Log\,z + \frac{1}{La}\cdot\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4z^4} + \cdots\right]$$

und

$$Log(n+z) =$$

$$Log\,n + 2\frac{1}{La}\cdot\left[\frac{z}{2n+z} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \cdots\right],$$

so daß man mittelst dieser Reihen auch die reellen Werthe der künstlichen, durch *Log* bezeichneten Logarithmen, auseinander berechnen kann.

5) Setzt man in der Formel §. 67. N. III.) $\frac{z}{n}$ statt b, und multiplicirt man solche noch mit $\frac{1}{La}$, so erhält man, weil $1+\frac{z}{n} = \frac{n+z}{n}$ ist,

$$Log(n+z) - Log\,n = \frac{1}{La}\cdot\left(\frac{z}{n} - \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{n^3} - \tfrac{1}{4}\frac{z^4}{n^4} + \cdots\right).$$

Nimmt man nun n so groß, daß $\frac{z}{n}$ und $\frac{z'}{n}$ so klein werden, daß für den Zweck der Rechnung die zweiten und höhern Po-

tenzen von $\frac{z}{n}$ und $\frac{z'}{n}$ außer Acht gelassen werden können, so hat man, aus vorstehender Gleichung, genähert

$$Log(n+z) - Log\,n = \frac{1}{La} \cdot \frac{z}{n}$$

und

$$Log(n+z') - Log\,n = \frac{1}{La} \cdot \frac{z'}{n};$$

folglich ist, wenn man diese beiden Gleichungen durch einander dividirt, (genähert)

$$\frac{Log(n+z) - Log\,n}{Log(n+z') - Log\,n} = \frac{z}{z'};$$

d. h. „die Differenzen der reellen Logarithmen sehr großer aber „nicht zu viel von einander verschiedener Zahlen verhalten sich „zu einander, wie die Differenzen dieser Zahlen selbst." —

Denkt man sich $z'=10$, und $z=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ oder 9, so giebt die letztere Gleichung (genähert)

$$Log(n+z) = Log\,n + z \cdot \frac{Log(n+10) - Log\,n}{10}.$$

Darauf gründet sich aber die Einrichtung der Differenz-Theile in den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln. Kennt man nämlich die reellen Logarithmen zweier nächst auf einander folgenden fünfziffrigen Zahlen, z. B. der Zahlen 34296 und 34297, so kennt man auch, wenn $a=10$ ist (die Logarithmen also Brigg'sche sind), die Logarithmen der beiden sechsziffrigen Zahlen 342960 und 342970, welche letzteren Zahlen um 10 von einander verschieden sind, so daß man

$$n = 342960 \qquad \text{und} \qquad n+10 = 342970$$

nehmen kann. Zieht man daher diese beiden Logarithmen von einander ab, und dividirt man den Ueberschuß des einen über den andern, durch 10, so hat man den Werth von $\frac{Log(n+10) - Log\,n}{10}$, wenn wir für den Augenblick unter Log die Brigg'schen Logarithmen verstehen; und multiplicirt man dieses Resultat nach und nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, so hat man den Werth von $z \cdot \frac{Log(n+10) - Log\,n}{10}$ für $z=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9, und diese Resultate stehen in den Tafeln als die Differenz-Theile ausgerechnet, welche man zu $Log\,n$ d. h. zu $Log\,342960$ nach und nach addiren muß, um nach und nach $Log(n+z)$ d. h. die Logarithmen von 342961, 342962, 342963, 342964, 342965, 342966, 342967,

342968 und 342969 ziemlich schnell und bis auf 7 Decimalstellen richtig zu haben, letzteres weil $\frac{z}{n}$ dasmal höchstens $\frac{9}{342960}$ ist, die weggelassenen 2ten und höhern Potenzen dieses Bruches also auf die 7te Decimalstelle noch keinen merklichen Einfluß äußern.

Anmerkung. Es ist nun Zeit, daß wir daran denken, alle Werthe des natürlichen (und daher auch nach §. 69. ⊙.) die des künstlichen) Logarithmen jeder reellen und jeder imaginären Zahl von der Form $p+q\cdot i$ zu finden.

Sollen aber alle Werthe von der Form $\alpha+\beta\cdot i$ gefunden werden, welche statt x gesetzt $e^x = p+q\cdot i$ machen, so muß

$$e^{\alpha+\beta\cdot i} = p+q\cdot i \quad \text{d. h.} \quad e^\alpha\cdot e^{\beta i} = p+q\cdot i$$

werden. — Nun wird aber (nach §. 64.), wenn man $\beta\cdot i$ statt x setzt, weil

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = +1,\ i^5 = +i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = +1,$$

etc. etc. ist, sogleich

$$e^{\beta i} = \left\{\begin{array}{l} 1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\cdots \\ +i\left(\frac{\beta}{1}-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\frac{\beta^7}{7!}+\cdots\right)\end{array}\right\}.$$

Die obere Reihe mit e^α multiplicirt muß daher $=p$, die untere mit e^α multiplicirt muß dagegen $=q$ werden, und aus diesen beiden Gleichungen muß man nun die Werthe von α und β finden, und die reellen darunter statt der gesuchten nehmen. So kommen wir zu diesen beiden neuen Reihen

$$1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\cdots$$

und

$$\beta-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\cdots,$$

welche wir zuvor und zunächst ausführlicher betrachten wollen. — Die gegenwärtige Aufgabe wird dann im §. 82.) ihre Lösung finden.

Zweite Abtheilung.

Von den natürlichen Sinus und Kosinus.

§. 70.

Die beiden unendlichen Reihen, welche sich in der Potenz-Reihe e^{xi} dadurch absondern lassen, daß man alle Glieder ohne i zusammenfaßt, und dann auch alle mit i behafteten Glieder zusammennimmt, bezeichnen wir von nun an bezüglich durch $cos\,x$ und $sin\,x$ *), und sprechen diese Zeichen aus: „Kosinus von x“ und „Sinus von x“.

Nach dieser Definition hat man also

$$\text{I.}\qquad cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\text{II.}\qquad sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

und auch

$$\text{III.}\qquad e^{xi} = cos\,x + i \cdot sin\,x,$$

woraus noch, wenn man —i statt i setzt,

$$\text{IV.}\qquad e^{-xi} = cos\,x - i \cdot sin\,x$$

hervorgeht. — Löst man aber die III.) und IV.) nach $cos\,x$ und $sin\,x$ algebraisch auf, d. h. addirt oder subtrahirt man sie, um abwechselnd $sin\,x$ oder $cos\,x$ zu eliminiren, und dividirt man einmal durch 2, das anderemal durch 2i, — so erhält man noch:

$$\text{V.}\quad cos\,x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad \text{und} \quad \text{VI.}\quad sin\,x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

---

*) Wir befolgen hier den zweiten der im §. 62.) bezeichneten Wege, ignoriren die Elementar-Trigonometrie gänzlich, verstehen unter $cos\,x$ und $sin\,x$ diese beiden unendlichen Reihen nach x, und zeigen dann später (in der Geometrie), wie die Werthe dieser Reihen jene Linien im Kreise sind, in Zahlen ausgedrückt.

§. 71.

Will man Eigenschaften dieser Kosinus- und Sinus-Reihen ausmitteln, so darf man nur von den Eigenschaften der Potenzen ausgehen, nach welchen

$$e^{xi} \cdot e^{-xi} = e^0 = 1$$

und

$$e^{(x+z)i} = e^{xi} \cdot e^{zi}; \quad \text{so wie} \quad e^{(x-z)i} = e^{xi} \cdot e^{-zi}$$

ist, — und in diese Gleichungen statt der Potenzen die ihnen (nach III. und IV.) gleichen Kosinus- und Sinus-Ausdrücke substituiren. Dann erhält man sogleich

$$(\odot)\cdots \qquad \sin x^2 + \cos x^2 = 1;$$

$$\text{VII.} \quad \sin(x+z) = \sin x \cdot \cos z + \cos x \cdot \sin z;$$

$$\text{VIII.} \quad \cos(x+z) = \cos x \cdot \cos z - \sin x \cdot \sin z;$$

$$\text{IX.} \quad \sin(x-z) = \sin x \cdot \cos z - \cos x \cdot \sin z;$$

$$\text{X.} \quad \cos(x-z) = \cos x \cdot \cos z + \sin x \cdot \sin z.$$

Diese 11 Formeln enthalten die Grundlage aller Eigenschaften der Sinus- und Kosinus-Reihen, also der sogenannten analytischen Trigonometrie. Man kann aber noch damit in Verbindung bringen

$$\text{XI.} \quad \sin 0 = 0; \qquad \text{XII.} \quad \cos 0 = 1;$$

$$\text{XIII.} \quad \sin(-x) = -\sin x; \qquad \text{XIV.} \quad \cos(-x) = \cos x,$$

welche vier Gleichungen aus der bloßen Ansicht der Sinus- und Kosinus-Reihen ohne weitere Rechnung hervorgehen, sobald man nur unter $\sin 0$, $\sin(-x)$ das versteht, was aus $\sin x$ hervorgeht, wenn 0 oder $-x$ statt x gesetzt wird; u. s. w.

Außerdem findet sich noch aus VII.) und VIII.), wenn x statt z gesetzt wird,

$$\text{XV.} \quad \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$\text{XVI.} \quad \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2 = 1 - 2\sin x^2 = 2\cos x^2 - 1.$$

§. 72.

Soll die Summe oder die Differenz zweier Sinus oder zweier Kosinus in ein Produkt verwandelt werden, so darf man nur die Formeln VII.—X.) paarweise addiren und subtrahiren, dabei aber noch a statt $x+z$ und b statt $x-z$ setzen, und man erhält sogleich

1) $\sin a + \sin b = 2\sin \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a-b)$;
2) $\sin a - \sin b = 2\cos \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b)$;
3) $\cos a + \cos b = 2\cos \frac{1}{2}(b+a) \cdot \cos \frac{1}{2}(b-a)$;
4) $\cos a - \cos b = 2\sin \frac{1}{2}(b+a) \cdot \sin \frac{1}{2}(b-a)$.

Und weil man statt 1 auch $\cos 0$ setzen kann, so erhält man (aus 3. und 4.) auch noch

5) $1+\cos b = 2(\cos \frac{1}{2} b)^2$ und 6) $1-\cos b = 2(\sin \frac{1}{2} b)^2$.

Diese letztern beiden Formeln sind übrigens von der XVI.) nicht verschieden.

§. 73.

Will man die Werthe der Sinus- und Kosinus-Reihen für die auf einander folgenden positiven Werthe von x, von $x=0$ an bis zu irgend einem Werthe von x hin berechnen, so braucht man die Glieder dieser Reihen nur für einen sehr kleinen Werth z von x wirklich zu berechnen (in welchem Falle die Reihen äußerst schnell convergiren, so daß zuweilen ein einziges Glied ausreicht, um $\sin z$ und $\cos z$ bis auf 7 Decimalstellen genau zu haben). — Dann aber kann man die Formeln VII.—X.) des §. 71.) zu Hilfe nehmen, um mittelst eines recurrenten Gesetzes die folgenden Werthe der Sinus und Kosinus aus den vorhergehenden abzuleiten. — Addirt man z. B. die Formeln VII.) und IX.), desgleichen die Formeln VIII.) und X.) zu einander, so erhält man sogleich

1) $\sin(x+z) = 2\cos z \cdot \sin x - \sin(x-z)$;
2) $\cos(x+z) = 2\cos z \cdot \cos x - \cos(x-z)$ *).

*) Bei wirklichen Berechnungen von Sinus- und Kosinus-Tafeln,

§. 74.

Geht man von den Betrachtungen der Elementar-Trigonometrie aus, so weiß man, daß die dortigen $sin\,x$ mit dem Bogen x zugleich wachsen bis x dem Quadranten gleich wird, während unterdessen die Kosinusse abnehmen. Weil wir aber hier die Elementar-Trigonometrie gänzlich ignoriren, so müssen wir die analytischen Hilfsmittel anwenden, um den Gang der Werthe von $sin\,x$ und $cos\,x$ für alle, nach und nach von 0 bis in's positive Unendliche hin wachsenden Werthe von x, auszumitteln.

Zu dem Ende seyen x und x+h zwei nächst auf einander folgende Werthe von x, deren zugehörigen Werthe von $sin\,x$ und $cos\,x$, nämlich $sin\,x$ und $sin(x+h)$, desgleichen $cos\,x$ und $cos(x+h)$, wir nun mit einander vergleichen wollen.

Zuvörderst geht aus der Definition des §. 54.) unmittelbar und ohne Weiteres hervor:

I. $\partial(sin\,x)_x = cos\,x$; II. $\partial(cos\,x)_x = -sin\,x$.

Daraus folgert sogleich

$\partial^2 sin\,x = -sin\,x$; $\partial^3 sin\,x = -cos\,x$; $\partial^4 sin\,x = sin\,x$; etc.
$\partial^2 cos\,x = -cos\,x$; $\partial^3 cos\,x = +sin\,x$; $\partial^4 cos\,x = cos\,x$; etc.

Mithin ist nach dem allgemeinern binomischen Lehrsatze (§. 54. ☉.)

III. $sin(x+h) =$

$$sin\,x + cos\,x \cdot h - sin\,x \cdot \frac{h^2}{2!} - cos\,x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

IV. $cos(x+h) =$

$$cos\,x - sin\,x \cdot h - cos\,x \cdot \frac{h^2}{2!} + sin\,x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots \text{*)}.$$

---

bedient man sich noch viel schneller zum Ziele führender und bequemerer Mittel. S. Lacroix Traité du calcul diff. et du calcul int. T. III. Chap. I.

*) Man kann diese Formeln auch erhalten, wenn man von den Formeln

$$sin(x+h) = sin\,x \cdot cos\,h + cos\,x \cdot sin\,h$$
$$cos(x+h) = cos\,x \cdot cos\,h + sin\,x \cdot sin\,h$$

ausgeht, statt $sin\,h$ und $cos\,h$ aber die Reihen setzt, die diese Zeichen vorstellen, und zuletzt das Ganze nach h ordnet.

Weil nun h unendlich-klein gedacht ist, so lassen diese Entwicklungen (III. und IV.) sehen (nach §. 58.):

1) Die Werthe von $sin\,x$ wachsen mit x zugleich unmerklich, so lange $cos\,x$ positiv ist; sie nehmen dagegen ab, während x wächst, so wie $cos\,x$ negativ wird; und es findet der Uebergang der Werthe $sin\,x$ vom Wachsen zum Abnehmen statt, so wie (zum ersten Male) $cos\,x = 0$ wird.

2) Die Werthe von $cos\,x$ dagegen nehmen ab, während x wächst, so lange $sin\,x$ positiv ist; sie wachsen dagegen mit x zugleich, so lange $sin\,x$ negativ ist; es findet endlich der Uebergang vom Abnehmen dieser Werthe zum Wachsen derselben statt, in dem Augenblicke, wo $sin\,x = 0$ seyn sollte.

Da nun $sin\,x$ für $x = 0$, selbst der Null gleich wird, und für sehr kleine (positive) Werthe von x positiv wird, und da $cos\,x$ für $x = 0$, der 1 gleich wird, so folgt noch:

3) Wenn x von 0 an bis in's positive Unendliche hinein stetig wachsend gedacht wird, so sind die $sin\,x$ und $cos\,x$ eine Zeitlang beide positiv; endlich aber hat nach und nach $cos\,x$ so lange abgenommen, daß $cos\,x = 0$ wird (daß dies letztere möglich sey, ist aus §. 59. zu entnehmen, wo der Werth von x bereits näherungsweise in die Form eines Decimalbruches ausgedrückt worden ist, für welchen $cos\,x = 0$ wird, und wo man $x = 1{,}5707963\cdots$ gefunden hat). — Für $cos\,x = 0$ wird $sin\,x = +1$; (nach VI. des §. 63.) — Von da ab findet (nach 1.) ein Uebergang vom Wachsen der Sinus zum Abnehmen derselben statt, während, da sie noch immer positiv bleiben und nur kleiner als 1 werden, $cos\,x$ noch immer (nach 2.) im Abnehmen bleibt, daher negativ wird. Dies dauert so lange, bis endlich $sin\,x$, immer fort abnehmend, zuletzt zum ersten Male der Null gleich wird, in welchem Falle $cos\,x = -1$ werden muß (nach §. 71. ⊙.). Nun tritt die dritte Periode ein. Die Kosinusse fangen nun wieder an zu wachsen, wachsen von -1 bis zu Null hin, während unterdessen (nach 1.) die Sinusse noch immer fort abnehmen, also negativ werden. — U. s. w. f.

4) Diese Betrachtungen lassen sehen, daß $cos x$ von $+1$ ab durch 0 hindurch bis zu -1 hin stetig abnimmt, um nachgehends von -1 an durch 0 hindurch bis zu $+1$ hin wiederum stetig zu wachsen; daß dabei $sin x$ von 0 an bis zu $+1$ hin wächst, um von da an durch 0 hindurch bis zu -1 hin stetig abzunehmen, worauf wiederum von -1 an ein Wachsen durch 0 hindurch bis zu $+1$ hin eintritt; u. s. w. f.; und daß alles dieses in (gleichen oder ungleichen) Perioden wiederkehren wird.

§. 75.

Um sich nun über die Dauer dieser Perioden und über deren Gleichheit oder Ungleichheit noch näheres Licht zu verschaffen, bezeichne man den kleinsten der Werthe von x, für welche $cos x = 0$ wird, und welcher im §. 58.)

$= 1{,}5707963\cdots$ gefunden ward, durch $\frac{1}{2}\pi$,

so daß π die Zahl $3{,}1415926\cdots$

bedeutet. Dann hat man

1) $sin \frac{1}{2}\pi = +1$; 2) $cos \frac{1}{2}\pi = 0$.

Hieraus berechnet man sich nun mittelst der recurrenten Gesetze §. 73. N. N. 1. und 2.) indem man statt z jetzt $\frac{1}{2}\pi$, statt x aber nach und nach $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ etc. etc. setzt, ohne weiteres

3) $sin \pi = 0$; 4) $cos \pi = -1$;

5) $sin \frac{3}{2}\pi = -1$; 6) $cos \frac{3}{2}\pi = 0$;

7) $sin 2\pi = 0$; 8) $cos 2\pi = 1$;

und allgemein, wenn n irgend eine positive ganze Zahl ist,

9) $sin 2n\pi = 0$; 10) $cos 2n\pi = 1$;

11) $sin (2n + \frac{1}{2})\pi = 1$; 12) $cos (2n + \frac{1}{2})\pi = 0$;

13) $sin (2n + 1)\pi = 0$; 14) $cos (2n + 1)\pi = -1$;

15) $sin (2n + \frac{3}{2})\pi = -1$; 16) $cos (2n + \frac{3}{2})\pi = 0$.

Und da (nach §. 71. XIII. und XIV.) die Formeln 9.) und 10.) auch noch gelten, wenn n negativ ganz ist, so gelten auch die daraus gefolgerten 11.—16.), es mag n positiv oder negativ ganz seyn.

Um sich zu überzeugen, wie es innerhalb dieser gleichen Perioden (von $x = 2n\pi$ bis zu $x = 2(n+1)\pi$, d. h. von $x = 0$ bis $x = 2\pi$, dann von $x = 2\pi$ bis zu $x = 4\pi$, dann wieder von $x = 4\pi$ bis zu $x = 6\pi$, u. s. w. f.) aussieht, suche man noch mittelst der Gleichungen VII. und VIII. des §. 71.), indem man $2n\pi$ statt x, und φ statt z setzt,

17) $sin(2n\pi + \varphi) = sin\varphi$ und 18) $cos(2n\pi + \varphi) = cos\varphi$, wo n jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt; woraus hervorgeht, daß für alle Werthe von x, welche um 2π, 4π, 6π etc. etc., also allgemein um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden sind, sowohl $sin x$ als auch $cos x$ (jeder für sich) einen und denselben Werth annimmt, während unter π das Doppelte des Kleinsten der positiven Werthe von x verstanden worden ist, für welche $cos x, = 0$ wird.

Die Sinus- und Kosinus-Werthe kehren also in den einzelnen Perioden, deren Weite 2π ist, genau immer in derselben Ordnung wieder.

§. 76.

Um diese Resultate in denselben Worten ausdrücken zu können, deren man sich in der Elementar-Trigonometrie bedient (die wir hier gänzlich ignoriren), so kann man die Werthe von x, Bogen-Werthe nennen, und die ganze stetige Reihe derselben von 0 bis in's positive Unendliche hinein in lauter gleiche Abtheilungen zertheilt sich denken, deren Grenzen um die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ von einander verschieden sind, und jede solche Abtheilung einen Quadranten nennen. Dann kann man sagen: der Bogen-Werth x liege z. B. im 11ten Quadranten, wenn er $> \frac{10}{2}\pi$, aber $< \frac{11}{2}\pi$ ist.

Nach §. 75.) kehren nun die Werthe von $sin x$ und $cos x$ im 5ten, 9ten, 13ten und allgemein im $(4n+1)^{ten}$ Quadranten ganz genau in derselben Ordnung wieder, wie sie im 1ten Quadranten sind. Desgleichen kehren dieselben im 6ten, 10ten, 14ten $(4n+2)^{ten}$ Quadranten genau so wieder, wie sie im 2ten Qua-

dranten sich zeigen. Desgleichen ist im $(4n+3)^{ten}$ Quadranten alles genau so wie im 3ten, und im $(4n+4)^{ten}$ oder $4n^{ten}$ Quadranten alles genau so, wie im 4ten, wenn nur hier n eine ganze positive Zahl vorstellt.

Jetzt dürfen wir nur noch untersuchen, wie es innerhalb der 4 ersten Quadranten aussieht. — Zu dem Ende stelle z jede (positive) Zahl im 1ten Quadranten vor; dann drückt $\pi-z$ jede Zahl im 2ten Quadranten, so wie $\pi+z$ jede Zahl im 3ten Quadranten aus, während $2\pi-z$ jede Zahl im 4ten Quadranten bezeichnet. — Wird nun in den Formeln VII.—X.) statt x bald π bald 2π gesetzt, und berücksichtigt man die Resultate 3. 4. 7. u. 8. des §. 75.), so erhält man sogleich außer

1) $sin\,z = +sin\,z$ und 2) $cos\,z = +cos\,z$;

noch

3) $sin(\pi-z) = +sin\,z$;	4) $cos(\pi-z) = -cos\,z$;
5) $sin(\pi+z) = -sin\,z$;	6) $cos(\pi+z) = -cos\,z$;
7) $sin(2\pi-z) = -sin\,z$;	8) $cos(2\pi-z) = +cos\,z$.

Es sind danach

im 1ten Quadranten $sin\,x$ und $cos\,x$ zugleich positiv;
im 2ten " $sin\,x$ positiv, $cos\,x$ negativ;
im 3ten " $sin\,x$ und $cos\,x$ zugleich negativ;
im 4ten " $sin\,x$ negativ und $cos\,x$ positiv.

Liegt daher φ innerhalb der 4 ersten Quadranten und ist nicht bloß $sin\,\varphi$ sondern zu gleicher Zeit auch $cos\,\varphi$ gegeben, so weiß man sogleich — daran, daß beide positiv oder beide negativ sind, oder daß der eine positiv, der andere negativ ist, — in welchem der 4 ersten Quadranten der Bogen-Werth φ selbst liegt. Außerdem zeigen die Formeln (3.—8.) wie $sin\,x$ und $cos\,x$ zurückgeführt werden auf $sin\,z$ und $cos\,z$, sobald x im 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten liegt, so daß bloß die Sinus und Kosinus aller Bogen-Werthe z die im 1ten Quadranten liegen, tabellarisch ausgewerthet zu werden brauchen, um alle Werthe von $sin\,x$ und $cos\,x$ sogleich berechnet zu haben, so lange x positiv ist.

Weil aber, wenn x negativ wird, $=-y$, (nach §. 7 XIII. u. IV.) allemal

$$\sin(-y) = -\sin y \quad \text{und} \quad \cos(-y) = \cos y$$

ist, so sind mit den Werthen von $\sin x$ und $\cos x$ für jed positive x, zugleicher Zeit auch die Werthe von $\sin x$ und $\cos$ für jedes negative x ausgerechnet *).

§. 77.

Wünscht man jedoch die Werthe von $\sin x$ und $\cos x$ aus zurechnen, wenn qi statt x gesetzt wird, wo q beliebig positi oder negativ ist, während i die $\sqrt{-1}$ vorstellt, so geben di Definitionen I. und II. des §. 70.) so wie die Formeln V.) un VI.) daselbst sogleich

$$\text{I.} \quad \cos(qi) = 1 + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} + \frac{q^6}{6!} + \cdots = \frac{e^q + e^{-q}}{2};$$

$$\text{II.} \quad \sin(qi) = i \cdot (q + \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} + \cdots) = i \cdot \frac{e^q - e^{-q}}{2},$$

so daß man nur die Werthe der Potenz-Reihen e^q und e^{-q} (nach §. 64.) zu berechnen braucht, um sogleich $\cos(qi)$ und $\sin(qi)$ zu haben; wobei man sieht, daß $\cos(qi)$ allemal einen reellen und positiven Werth, $\sin(qi)$ aber allemal einen Werth

---

*) In einem späteren Kapitel, welches die Elemente der Geometrie fortsetzt, werden wir zeigen: 1) daß die hier betrachteten $\sin x$ und $\cos x$, d. h. diese Reihen, allemal jene in der Elementar-Trigonometrie unter denselben Namen betrachteten Linien im Kreise liefern, so oft statt x der Bogen des Kreises gesetzt wird, wenn nur der Radius des Kreises $=1$ ist; 2) daß die Zahl $\frac{1}{2}\pi$, welche wir hier als die kleinste gefunden haben, die, statt x gesetzt, $\cos x$, $=0$ macht, allemal die Länge des 4ten Theils derselben Kreislinie ausdrückt; 3) daß man daher für jeden Elementar-Sinus oder Elementar-Kosinus eines in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückten Winkels oder Bogens, aus den hiesigen $\sin x$ und $\cos x$ d. h. aus den unendlichen Reihen seinen Werth erhält, wenn man das Längen-Maaß des Bogens findet und solches statt x in die Reihen $\sin x$ und $\cos x$ substituirt.

von der Form $Q \cdot i$ hat, wo Q mit q zugleich positiv oder zugleich negativ sich ausrechnet.

Setzt man aber in den Formeln 1. und 2. des §. 73.) statt x und z bezüglich xi und zi, so bekommt man

$$\text{III.} \quad \sin(x+z)i = 2\cos(zi)\cdot\sin(xi) - \sin(x-z)i;$$
$$\text{IV.} \quad \cos(x+z)i = 2\cos(zi)\cdot\cos(xi) - \cos(x-z)i.$$

Danach könnte man wieder, wenn für ein sehr kleines z die Werthe von $\sin(zi)$ und $\cos(zi)$ direkt aus den Reihen berechnet sind, auch nach und nach die Werthe von $\sin(qi)$ und $\cos(qi)$ für die größer werdenden Werthe von q, aus einander, und somit bequemer berechnen.

Am besten ist es, wenn man Tabellen berechnet, aus welchen die Werthe von $\sin(qi)$ und $\cos(qi)$ für jedes positive q, so weit als man solches braucht, ohne weiteres entnommen werden können. Die Tafeln von Gudermann leisten dies und es sind durch sie erst die sogenannten trigonometrischen Tafeln gehörig vervollständigt.

Hat man aber $\sin(p+qi)$ und $\cos(p+qi)$ zu berechnen, so entnimmt man die Werthe derselben aus den Gleichungen VII.) und VIII.) des §. 71.), nach welchen man hat:

$$1) \quad \sin(p+qi) = \sin p\cdot\cos(qi) + \cos p\cdot\sin(qi),$$
$$2) \quad \cos(p+qi) = \cos p\cdot\cos(qi) - \sin p\cdot\sin(qi).$$

§. 78.

Zu jedem (reellen oder imaginären) Bogen-Werth x, gehört allemal nur ein einziger Werth von $\sin x$, und auch nur ein einziger Werth von $\cos x$. — Umgekehrt aber: zu einem gegebenen Werth p von $\sin x$ gehören **unendlich viele** Werthe des Bogens x. —

I. Ist nämlich p **positiv**, so findet sich zunächst ein Werth $z < \frac{1}{2}\pi$ von x; dann ist (nach §. 76. N. 3.) $\pi - z$ wiederum ein Werth von x, so daß $\sin x = p$ wird, und dann sind $\quad 2n\pi + z \quad$ und $\quad 2n\pi + (\pi - z),$

wo n jede positive und jede negative ganze Zahl oder Null v-
stellt, unendlich viele Werthe von x, alle so, daß $sin\,x = p$ wi-

II. Ist aber p negativ, so giebt es einen Werth $\varphi <$
so, daß $sin\,\varphi = -p$ ist, wo $-p$ das positive Glied
negativen Zahl p vorstellt. Dann sind (nach §. 76. N. 5. u.

$$\pi + z \quad \text{und} \quad 2\pi - z$$

zwei Werthe von x so, daß $sin\,x = p$ wird, und

$$2n\pi + (\pi + z) \quad \text{so wie} \quad 2n\pi + (2\pi - z)$$

d. h. $\quad (2n+1)\pi + z \quad$ und $\quad 2n\pi - z$

sind dann die unendlich vielen Werthe von x, alle so, daß $sin\,x =$
wird, wenn nur n jede positive und jede negative ganze Za
oder Null vorstellt.

Hat man eben so $cos\,x = q$ gegeben, so gehören aberma
unendlich viele Werthe von x dazu.

III. Ist nämlich $cos\,x = q$ und ist q positiv, so bekom
man zuerst einen Werth $z < \frac{1}{2}\pi$ von x, dann den Werth $2\pi -$
(nach §. 76. N. 8.); zuletzt aber die unendlich vielen Werthe

$$2n\pi + z \quad \text{und} \quad 2n\pi + 2\pi - z$$

d. h. $\quad 2n\pi + z \quad$ und $\quad 2n\pi - z$

von x, alle so, daß $cos\,x = q$ wird, wenn nur n jede positive un
auch jede negative ganze Zahl oder Null vorstellt. — Und ist zulet

IV. noch $cos\,x = q$, aber q negativ, so sucht man zu
erst $z < \frac{1}{2}\pi$ so, daß $cos\,z = -q$ wird, wo $-q$ das positiv
Glied der negativen Zahl q vorstellt. Hernach sind

$$\pi - z \quad \text{und} \quad \pi + z$$

die zwei nächsten Werthe von x, und

$$2n\pi + (\pi - z) \quad \text{und} \quad 2n\pi + (\pi + z)$$

d. h. $\quad (2n+1)\pi - z \quad$ und $\quad (2n+1)\pi + z$

sind dann alle Werthe von x, so daß $cos\,x = q$ wird.

V. Wie zu imaginären Werthen $P + Qi$ von $sin\,x$ ode
$cos\,x$, die zugehörigen, ebenfalls imaginären Werthe des Bogen
x von der Form $p + qi$, gefunden werden können, geht zulet
noch aus den Formeln 1. und 2. des §. 77.) hervor.

§. 79.

Ist aber nicht bloß $\sin x$, sondern zugleich auch $\cos x$ gegeben, so erhält man für x, so zu sagen, nur halb so viele (wenn auch immer noch unendlich viele) Werthe des Bogens x. Es findet sich nämlich dann innerhalb der vier ersten Quadranten, wenn wir $\sin x = p$ und $\cos x = q$, also $p^2 + q^2 = 1$ und p und q reell voraussetzen, nur ein einziger Werth von x, der beiden Bedingungen genügt, der nämlich nicht bloß diesen gegebenen Sinus, sondern zugleich auch den gegebenen Kosinus hat. Wird dieser einzige Werth φ genannt, so enthält die Formel

$$2n\pi + \varphi,$$

in welcher n beliebig positiv oder negativ ganz gedacht wird, alle übrigen Werthe von x, für welche $\sin x = p$ und $\cos x = q$ wird.

§. 80.

Man bezeichnet die 4 Quotienten

$$\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin x}$$

bezüglich durch die Zeichen

$$tg\,x, \quad cotg\,x, \quad sec\,x \quad \text{und} \quad cosec\,x$$

und nennt diese letzteren bezüglich die Tangente, Kotangente, Sekante und Kosekante von x.

Aus diesen Definitionen, welche diesen Ausdrücken eine Bedeutung zusichern für jedes reelle, wie auch für jedes imaginäre x, geht sogleich, mit Zuziehung des §. 71.) noch hervor:

1) $tg(x+z) = \dfrac{tg\,x + tg\,z}{1 - tg\,x \cdot tg\,z};$

2) $tg(x-z) = \dfrac{tg\,x - tg\,z}{1 + tg\,x \cdot tg\,z};$

3) $cotg(x+z) = \dfrac{cotg\,x \cdot cotg\,z - 1}{cotg\,z + cotg\,x};$

4) $cotg(x-z) = \dfrac{cotg\,x \cdot cotg\,z + 1}{cotg\,z - cotg\,x};$

$$5) \qquad tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1 - tg\,x^2}$$

und
$$cotg\,2x = \frac{cotg\,x^2 - 1}{2cotg\,x}.$$

$$6) \qquad tg\,\tfrac{1}{4}\pi = cotg\,\tfrac{1}{4}\pi = 1,$$

weil $sin\,\frac{1}{4}\pi = cos\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist (aus §. 67. N.N. 5. 6., wenn $\frac{1}{2}\pi$ statt b gesetzt wird).

Zu jedem gegebenen Bogen-Werth hat die Tangente oder Kotangente etc. etc. jedesmal nur einen einzigen Werth; dagegen gehören zu einer gegebenen Tangente, oder Kotangente etc. etc., wiederum unendlich viele Bogen-Werthe. Namentlich ist

$$7) \qquad tg(n\pi + \varphi) = tg\,\varphi$$

und
$$8) \qquad cotg(n\pi + \varphi) = cotg\,\varphi$$

eben weil, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade, übrigens positive oder negative Zahl ist,

$$sin(n\pi + \varphi) = \pm sin\,\varphi \quad \text{und} \quad cos(n\pi + \varphi) = \pm cos\,\varphi$$

sich findet, wo die beiden (+) Zeichen zugleich gelten, wenn n eine gerade Zahl ist, wo aber die beiden (—) Zeichen zugleich gelten, wenn n eine ungerade Zahl ist *).

§. 81.

Die Bogen-Werthe, deren Sinus, Kosinus, Tangente oder Kotengente gegeben und jedesmal $= z$ seyn mögen, bezeichnet man bezüglich durch

$$\frac{1}{sin}z, \quad \frac{1}{cos}z, \quad \frac{1}{tg}z \quad \text{und} \quad \frac{1}{cotg}z \text{ **)}.$$

Die

---

*) Der Anfänger halte sich nur bei allen solchen Formeln, deren Grund und Herleitung er nicht sogleich übersehen sollte, allemal zunächst an die Formeln VII.—X. des §. 71.). Sowie man diese Formeln angewandt hat, wird man dann leicht weiter sehen, was jetzt zu thun ist.

**) Gewöhnlicher findet man das, was hier durch $\frac{1}{sin}z$ bezeichnet wird, durch $arc\,sin\,z$ oder auch durch $arc\,sin\,(=z)$ bezeichnet. Die Bedeutungen von $arc\,cos\,(=z)$, $arc\,tg\,(=z)$, $arc\,cotg\,(=z)$, fallen dabei von selbst in die Augen.

Die beiden Gleichungen

$$x = \frac{1}{sin} z \quad \text{und} \quad sin\, x = z,$$

oder $$x = \frac{1}{cos} z \quad \text{und} \quad cos\, x = z,$$

oder $$x = \frac{1}{tg} z \quad \text{und} \quad tg\, x = z,$$

oder $$x = \frac{1}{cotg} z \quad \text{und} \quad cotg\, x = z$$

sind daher jedesmal gleichbedeutend.

I. Ist ferner $sin\, x = z$, so ist $cos\, x = \sqrt{1 - z^2}$, $tg\, x = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$ und $cotg\, x = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$; daher kann man statt $sin\, x = z$ auch schreiben

$$x = \frac{1}{sin} z = \frac{1}{cos} \sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{tg} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{cotg} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}.$$

II. Ist aber $cos\, x = z$, so ist $sin\, x = \sqrt{1 - z^2}$, $tg\, x = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$ und $cotg\, x = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$; also kann man statt $cos\, x = z$ auch schreiben

$$x = \frac{1}{cos} z = \frac{1}{sin} \sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{tg} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z} = \frac{1}{cotg} \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

III. Ist $tg\, x = z$, so ist $sin\, x = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, $cos\, x = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$, $cotg\, x = \frac{1}{z}$; und man kann daher statt $tg\, x = z$ auch schreiben

$$x = \frac{1}{tg} z = \frac{1}{cotg} \frac{1}{z} = \frac{1}{sin} \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{cos} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

IV. Ist endlich $cotg\, x = z$, so ist $tg\, x = \frac{1}{z}$, $sin\, x = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$, $cos\, x = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$; und man kann daher statt $cotg\, x = z$ auch schreiben

$$\mathrm{x} = \frac{1}{cotg}\mathrm{z} = \frac{1}{tg}\frac{1}{\mathrm{z}} = \frac{1}{sin}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{z}^2}} = \frac{1}{cos}\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{1+\mathrm{z}^2}}.$$

V. Die Gleichung $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$ läßt sich, wenn man $tg\,\alpha = \mathrm{x}$ und $tg\,\beta = \mathrm{z}$ setzt, auch so schreiben

1) $$\frac{1}{tg}\mathrm{x} + \frac{1}{tg}\mathrm{z} = \frac{1}{tg}\frac{\mathrm{x}+\mathrm{z}}{1-\mathrm{xz}}.$$

Eben so schreibt sich die Gleichung $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$ noch so:

2) $$\frac{1}{tg}\mathrm{x} - \frac{1}{tg}\mathrm{z} = \frac{1}{tg}\frac{\mathrm{x}-\mathrm{z}}{1+\mathrm{xz}}.$$

Die Gleichung $cotg(\alpha+\beta) = \frac{cotg\,\alpha \cdot cotg\,\beta - 1}{cotg\,\beta + cotg\,\alpha}$ läßt sich ferner auch noch so schreiben:

3) $$\frac{1}{cotg}\mathrm{x} + \frac{1}{cotg}\mathrm{z} = \frac{1}{cotg}\frac{\mathrm{xz}-1}{\mathrm{z}+\mathrm{x}}.$$

Und die Gleichung

4) $$\frac{1}{cotg}\mathrm{x} - \frac{1}{cotg}\mathrm{z} = \frac{1}{cotg}\frac{\mathrm{xz}+1}{\mathrm{z}-\mathrm{x}}$$

stimmt mit der Gleichung $cotg(\alpha-\beta) = \frac{cotg\,\alpha \cdot cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cogt\,\alpha}$ überein.

Anmerkung. Man darf jedoch nicht übersehen, daß $\frac{1}{sin}\mathrm{x}$, $\frac{1}{cos}\mathrm{x}$, $\frac{1}{tg}\mathrm{x}$, etc. etc. unendlich=vieldeutige Zeichen sind, und daß die Gleichungen zwischen ihnen meist nur von einem ihrer Werthe, oder doch nur von zusammengehörigen ihrer Werthe gelten. — In den Anwendungen muß man hierauf mit großer Sorgfalt Rücksicht nehmen, wenn man nicht unrichtige Resultate erhalten will.

§. 82.

Jeden imaginären Ausdruck von der Form $\mathrm{p}+\mathrm{q}\cdot i$ kann

man allemal auf die Form $r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ bringen. Man setzt zu dem Ende

1) $$p+q\cdot i=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$$

und erhält durch Vergleichung

$$p=r\cdot\cos\varphi \quad \text{und} \quad q=r\cdot\sin\varphi;$$

und aus diesen Gleichungen geht

2) $$r=+\sqrt{p^2+q^2} \quad \text{und} \quad \cos\varphi=\frac{p}{r},\ \sin\varphi=\frac{q}{r}$$

hervor. — Da hieraus für φ unendlich viele Werthe sich ergeben, die durch $2n\pi+\varphi$ ausgedrückt sind, wenn φ den einzigen, allemal innerhalb der vier ersten Quadranten liegenden Werth bedeutet, so hat man noch (aus 1.)

3) $$p+q\cdot i=r\cdot[\cos(2n\pi+\varphi)+i\cdot\sin(2n\pi+\varphi)],$$

wo n Null und jede positive, wie auch jede negative ganze Zahl bedeutet, wo $\pi=3,14159\cdots$ ist, und wo φ den einzigen innerhalb der vier ersten Quadranten liegenden Bogen-Werth bedeutet, welcher aus $\cos\varphi=\frac{p}{r}$ und $\sin\varphi=\frac{q}{r}$ hervorgehen, während r den positiven Werth der Quadrat-Wurzel $\sqrt{p^2+q^2}$ vorstellt.

Cauchy nennt r den Modul des Ausdrucks $p+q\cdot i$; den andern Faktor $\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$ oder $\cos(2n\pi+\varphi)+i\cdot\sin(2n\pi+\varphi)$ dagegen nennt derselbe den reducirten imaginären Ausdruck.

Anmerkung. Diese Reduktion der imaginären Ausdrücke ist deshalb so äußerst wichtig, weil man dadurch das Rechnen mit beliebigen imaginären Ausdrücken sogleich auf das Rechnen mit Ausdrücken von der Form $\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$ zurückführen kann, während letztere Form (nach §. 70. III.) nichts anders als die Potenz $e^{\varphi i}$ ist. — Wir werden sogleich (in der nächsten Abtheilung) die hohe Wichtigkeit dieser Betrachtungen näher erkennen.

Dritte Abtheilung.

Berechnung der Werthe einer allgemeinen Wurzel und der unendlich vielen Werthe eines natürlichen und künstlichen Logarithmen. Von den allgemeinen Potenzen und Logarithmen.

§. 83.

Ist m eine positive ganze Zahl, a dagegen ganz allgemein, so verstehen wir unter $\sqrt[m]{a}$ jeden reellen oder imaginären Ausdruck, welcher so ist, daß $x^m = a$ wird. — Dieses so allgemein aufgefaßte Zeichen nennen wir dann eine allgemeine mte Wurzel.

In dieser Definition stecken die in den Elementen (§§. 17. 19. 21.) bereits definirten allgemeinen Quadrat-, Kubik- und vierten Wurzeln, je nachdem $m = 2$, $= 3$, oder $= 4$ gedacht wird.

§. 84.

I. Will man alle Werthe von $\sqrt[m]{p + q \cdot i}$ berechnen, (d. h. in dieselbe Form $\alpha + \beta \cdot i$ ausdrücken), so muß man damit beginnen, daß man alle Werthe der mten Wurzel aus dem reducirten imaginären Ausdruck $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ oder $\cos(2n\pi + \varphi) + i \cdot \sin(2n\pi + \varphi)$ berechnet (§. 82.). Zu dem Ende geht man von der Formel der (natürlichen) Potenzen aus, nach welcher (§. 64. III.)

$$(e^{xi})^m = e^{mxi}$$

d. h. (nach §. 70. III.)

$$1) \qquad (\cos x + i \cdot \sin x)^m = \cos mx + i \cdot \sin mx$$

ist. Setzt man hier herein φ statt mx, also $\frac{\varphi}{m}$ statt x, so ergiebt sich

$$2) \qquad \left(\cos\frac{\varphi}{m} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{m}\right)^m = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

oder, wenn man $2n\pi + \varphi$ statt φ setzt

$$3)\quad \left(\cos\frac{2n\pi+\varphi}{m}+i\cdot\sin\frac{2n\pi+\varphi}{m}\right)^m=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$$

oder, wenn m eine positive ganze Zahl ist,

$$4)\quad \cos\frac{2n\pi+\varphi}{m}+i\cdot\sin\frac{2n\pi+\varphi}{m}=\sqrt[m]{\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}.$$

Diese Formel giebt unendlich viele Werthe von $\sqrt[m]{\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}$, in so fern statt n zur Linken 0 und jede positive oder negative ganze Zahl gesetzt werden kann und muß. Weil aber $\frac{2n\pi+\varphi}{m}=2\frac{n}{m}\pi+\frac{\varphi}{m}$ ist, und alle Kosinus und Sinus dieselben Werthe behalten, so oft der Bogen um eine gerade Anzahl von π vermehrt oder vermindert wird, so folgt, daß der Ausdruck links in der Formel 4.) für $n=m$, $2m$, $3m$, etc. etc. dasselbe giebt, was für $n=0$, und daß er für $n=m+\nu$, $2m+\nu$, $3m+\nu$, etc. etc. dasselbe giebt, was für $n=\nu$.

Um daher alle aus 4.) hervorgehenden Werthe der $\sqrt[m]{\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}$ zu erhalten, darf man in der Formel 4.) statt n bloß die m Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ m—1 setzen. Will man es mit den negativen Werthen von n versuchen, so wird man finden, daß der Ausdruck in 4.) zur Linken genau dasselbe liefert, man mag $n=m-1$ oder bloß $=-1$, oder man mag $n=m-\nu$ oder bloß $=-\nu$ nehmen, eben weil in dem letztern Falle der Bogen nur um eine gerade Anzahl von π kleiner genommen ist.

Im Ganzen findet man also hieraus für die m[te] Wurzel $\sqrt[m]{\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}$ genau m verschiedene Werthe, nicht mehr und nicht weniger, und diese gehen aus der 4.) hervor

entweder wenn man statt n die m Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ m—1 setzt,

oder auch, wenn man statt n die m Werthe 0, —1, +1, —2, +2, —3, und so lange fort setzt, bis man gerade m verschiedene Werthe hat.

Will man z. B. alle 7 Werthe der $\sqrt[7]{\cos\pi + i\cdot\sin\pi}$ d. h. von $\sqrt[7]{-1}$ finden, so ist $\varphi = \pi$, und solche sind daher

1) $\cos\frac{\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{\pi}{7}$ (für $n = 0$)

2) $\cos\frac{\pi}{7} - i\cdot\sin\frac{\pi}{7}$ (für $n = -1$)

3) $\cos\frac{3\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$ (für $n = +1$)

4) $\cos\frac{3\pi}{7} - i\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$ (für $n = -2$)

5) $\cos\frac{5\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{7}$ (für $n = +2$)

6) $\cos\frac{5\pi}{7} - i\cdot\sin\frac{5\pi}{7}$ (für $n = -3$)

7) $\cos\frac{7\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{7}$ d. h. -1, (für $n = +3$).

II. Sollen nun die Werthe der m^{ten} Wurzel aus $p + q\cdot i$ gefunden werden, so bestimme man r und φ aus den Gleichungen (§. 82.)

1) $r = +\sqrt{p^2 + q^2}$, und $\cos\varphi = \frac{p}{r}$, $\sin\varphi = \frac{q}{r}$,

so daß man r positiv und statt φ den einzigen (nach §. 79.) allemal existirenden, innerhalb der 4 ersten Quadranten liegenden Bogen nimmt *). Dann hat man $p = r\cdot\cos\varphi$ und $q = r\cdot\sin\varphi$ und

$$\sqrt[m]{p + q\cdot i} = \sqrt[m]{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = \sqrt[m]{r}\cdot\sqrt[m]{\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi},$$

wenn man statt $\sqrt[m]{r}$ ihren absoluten Werth nimmt, wie solcher in den Elementen unter dem Namen der absoluten Wurzel vorkommt, und wenn man statt $\sqrt[m]{\cos\varphi + i.\sin\varphi}$ ihre im vorhergehenden Paragraphen gefundenen m Werthe setzt **). — Auf diese Weise findet man

---

*) Derselbe liegt im 1ten Quadranten, wenn p und q beide positiv, im 3ten, wenn beide letzteren negativ sind; im 2ten, wenn p negativ und q positiv ist, im 4ten endlich, wenn p positiv, aber q negativ seyn sollte.

**) Daß der Ausdruck zur Rechten wirklich die Eigenschaft der m^{ten}

2) $\sqrt[m]{p+q\cdot i} = \sqrt[m]{r}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi+\varphi}{m} + i\cdot\sin\frac{2n\pi+\varphi}{m}\right)$,

wo statt n nach und nach 0, 1, 2, 3, ⋯ m—1 gesetzt wird, oder wo man auch statt n nach und nach 0, —1, +1, —2, +2, —3, +3, etc. etc. so lange setzt, bis man m von einander verschiedene Werthe hat.

Anmerkung 1. In der Folge werden wir noch zeigen, daß wenn man $\sqrt[m]{a} = x$ setzt, so daß $a = x^m$ oder $x^m - a = 0$ wird, dieser höheren Gleichung vom m^{ten} Grade nur durch m Werthe von x genügt werden kann. Dann folgt erst, daß die m Werthe von $\sqrt[m]{p+q\cdot i}$, welche wir hier finden, wirklich alle Werthe dieser m^{ten} Wurzel sind.

Anmerkung 2. Wir haben in den Elementen (§. 19.) gesehen, daß die reducirte kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0,$$

nach x aufgelöst, giebt

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

daß man aber diese Formel nicht mehr bequem zum Berechnen der Werthe von x gebrauchen kann, wenn $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negativ, also $-(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ positiv wird, in so fern dann die Kubikwurzel aus Ausdrücken von der Form $P + Q\cdot i$ gezogen werden muß. Durch das vorstehende ist man aber nun in den Stand gesetzt, diese Rechnung bequem durchzuführen. Man berechnet nämlich

$\sqrt{-(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = Q$, so daß $Q^2 = -(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$

ist, und hat dann, wenn $-\frac{1}{2}q = P$ gesetzt wird

$$x = \sqrt[3]{P+Q\cdot i} + \sqrt[3]{P-Q\cdot i}.$$

Wurzel hat, geht daraus hervor, daß er, wenn man ihn mit m potenzirt, genau

$$r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \text{ d. h. } p+q\cdot i$$

wieder giebt, so daß wir kein Gesetz der Wurzeln anzuwenden brauchen, welches selbst noch nicht erwiesen wäre.

Hiernach berechnet man

$$r = +\sqrt{P^2+Q^2} = +\sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3},$$

und den Bogen φ aus den Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{P}{r} = \frac{-\frac{1}{2}q}{r} \text{ und } \sin\varphi = \frac{Q}{r} \text{ oder } tg\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{-\frac{1}{2}q}$$

und hat dann (nach §. 84. II. N. 2.), weil $\sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{1}{3}p}$ wird,

$$\sqrt[3]{P+Q\cdot i} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi+\varphi}{3} + i\cdot\sin\frac{2n\pi+\varphi}{3}\right)$$

und

$$\sqrt[3]{P-Q\cdot i} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\cdot\left(\cos\frac{2n'\pi+\varphi}{3} - i\cdot\sin\frac{2n'\pi+\varphi}{3}\right) \text{*)},$$

wo statt n und n', unabhängig von einander, die Werthe 0, —1 und +1 zu setzen sind, während $\sqrt{-\frac{1}{3}p}$ den absoluten Werth dieser Wurzel vorstellen soll.

Da nun in dem Ausdrucke für x, diejenigen Werthe der beiden Kubikwurzeln zusammengehören (nach §. 19.), deren Produkt $= -\frac{1}{3}p$ ist, dies aber hier allemal der Fall ist, so oft man $n' = n$ nimmt, so folgt

$$x = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{3}p}\cdot\cos\frac{2n\pi+\varphi}{3};$$

und man erhält hieraus mittelst einer sehr einfachen Rechnung alle 3 Werthe von x, wenn man nur nach und nach 0, —1 und +1 statt n schreibt, oder auch wenn man $n=0$, $n=1$ und $n=2$ nimmt. **)

---

*) Diese Gleichung folgt aus der vorhergehenden am einfachsten, wenn man links und rechts $-i$ statt i schreibt, was deshalb erlaubt ist, weil i jede beliebige der beiden Formen von $\sqrt{-1}$ vorstellt.

**) Das einzige, was noch zu beachten bleibt, ist — daß, wenn man sich der gewöhnlichen Tabellen bedient, φ allemal in Bogen-Graden, Minuten, Sekunden etc. etc. gefunden wird (aus der Tafel) und daß man daher solche erst in Längen-Maaß verwandeln muß, nach der Proportion $180^\circ : \pi =$ wie die gefundenen Grade zu dem gesuchten Bogen-Werth φ.

§. 85.

Aus der Formel §. 84. II. N. 2.) folgen nun auch alle m Werthe der m^{ten} Wurzel aus einer positiven Zahl $+a$, oder auch aus einer negativen Zahl $-a$.

Um die ersteren zu finden setzt man $p=+a$, $q=0$, hat dann $r=+a$, $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$, also $\varphi=0$; und man erhält

$$1)\qquad \sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{+a}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi}{m}+i\cdot\sin\frac{2n\pi}{m}\right),$$

wo das Zeichen links mdeutig ist, während das Zeichen $\sqrt[m]{+a}$ zur Rechten den einzigen absoluten Werth dieser Wurzel vorstellen soll, wie solcher in den Elementen unter dem Namen der absoluten Wurzel gefunden wird, während statt n zur Rechten nach und nach 0, 1, 2, 3, ⋯ $m-1$, oder 0, -1, $+1$, -2, $+2$, etc. etc. so lange gesetzt wird, bis man m verschiedene Werthe hat.

Um die m Werthe von $\sqrt[m]{-a}$ zu finden, setzt man $p=-a$, $q=0$, also $r=+a$, und $\cos\varphi=\frac{-a}{+a}=-1$, $\sin\varphi=0$; mithin $\varphi=\pi$. Die Gleichung §. 84. II. N. 2.) giebt nun

$$2)\qquad \sqrt[m]{-a}=\sqrt[m]{+a}\cdot\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+i\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}\right),$$

wo das Zeichen $\sqrt[m]{-a}$ links mdeutig, das Zeichen $\sqrt[m]{+a}$ dagegen nur eindeutig genommen ist, während statt n nach und nach 0, 1, 2, 3, ⋯ $m-1$, oder 0, -1, $+1$, -2, $+2$, etc. etc. gesetzt wird, bis man m verschiedene Werthe hat.

§. 86.

Auch hat man nun die m Werthe von $\sqrt[m]{1}$ und von $\sqrt[m]{-1}$ gefunden. Solche sind nämlich ausgedrückt in den Gleichungen

1) $$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{2n\pi}{m} + i\cdot\sin\frac{2n\pi}{m}$$

und

2) $$\sqrt[m]{-1} = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + i\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{m},$$

wenn man statt n nach und nach die m Werthe 0, 1, 2, 3, ... m—1, oder 0, —1, +1, —2, +2, etc. etc. setzt.

§. 87.

Für diese m^{ten} Wurzeln aus +1 oder —1 gehen aber noch folgende Resultate hervor:

I. Einige Eigenschaften der $\sqrt[m]{+1}$.

1) Jede ganze Potenz eines Werthes von $\sqrt[m]{1}$, und jedes Produkt, so wie auch jeder Quotient zweier oder mehrerer Werthe von $\sqrt[m]{1}$, ist allemal wieder ein Werth derselben $\sqrt[m]{1}$, aber nicht immer ein neuer Werth dieser Wurzel.

2) Nimmt man in §. 86. N. 1.) $n=1$, und bezeichnet man den Werth $\cos\frac{2\pi}{m} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{m}$ durch α, so sind (nach §. 84. I. N. 1.) α, α^2, α^3, α^4, ... α^{m-1} und α^m (oder 1 selbst) alle von einander verschieden, und alle obigen Werthe der $\sqrt[m]{1}$.

3) Ist m gerade, so sind unter den Werthen von $\sqrt[m]{1}$ zwei reelle, nämlich +1, und —1 (der erstere für $n=0$, der andere für $n=\pm\frac{1}{2}m$); die m—2 übrigen Werthe sind aber alle imaginär.

4) Ist m ungerade, so ist nur ein einziger Werth von $\sqrt[m]{1}$ reell, nämlich +1 (für $n=0$); die übrigen m—1 Werthe sind dann alle imaginär.

5) Man erhält alle m Werthe von $\sqrt[m]{a}$, wenn man einen

einzigen beliebigen der Werthe dieser m^{ten} Wurzel nach und nach mit den m Werthen von $\sqrt[m]{1}$ multiplicirt.

II. Einige Eigenschaften der $\sqrt[m]{-1}$.

1) Ist m gerade, so sind alle Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ imaginär. — Ist aber m ungerade, so ist einer der Werthe reell und $= -1$, die übrigen alle dagegen sind imaginär.

2) Jede gerade Potenz eines der Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ ist allemal einer der Werthe der $\sqrt[m]{+1}$. — Desgleichen ist jedes Produkt und jeder Quotient je zweier Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ allemal einer der Werthe von $\sqrt[m]{+1}$.

3) Jedes Produkt aus 3, 5, 7, überhaupt einer ungeraden Anzahl von Werthen der $\sqrt[m]{-1}$, ist dagegen allemal selbst wieder einer der Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ *).

§. 88.

Suchen wir jetzt alle Werthe von der Form $\alpha + \beta \cdot i$, welche der natürliche Logarithme von $p + q \cdot i$ hat. Soll aber

1) $$\alpha + \beta \cdot i = log(p + q \cdot i)$$

seyn, so muß (s. Anmerkung zu §. 69.)

2) $e^{\alpha + \beta \cdot i} = p + q \cdot i$, d. h. 3) $e^{\alpha} \cdot e^{\beta \cdot i} = p + q \cdot i$

werden. Weil aber (nach §. 70. III.)

$$e^{\beta \cdot i} = cos\beta + i \cdot sin\beta$$

ist, so geht letztere Gleichung über in

4) $$e^{\alpha} \cdot (cos\beta + i \cdot sin\beta) = p + q \cdot i.$$

Diese zerfällt dann (nach §. 18.) in die beiden Gleichungen

5) $e^{\alpha} \cdot cos\beta = p$ und $e^{\alpha} \cdot sin\beta = q$.

*) Noch mehr Eigenschaften der m^{ten} Wurzeln findet man im „System d. Mathem." Th. II. 2te Aufl. §§. 536. 537.).

Eliminirt man hieraus β, d. h. $sin\beta$ und $cos\beta$, indem man die dritte Gleichung (§. 71. O.), nämlich $sin\beta^2 + cos\beta^2 = 1$, zu Hilfe nimmt, so erhält man

6) $e^{2\alpha} = p^2 + q^2$, also 7) $e^\alpha = +\sqrt{p^2+q^2}$;

und, wenn man $+\sqrt{p^2+q^2} = r$ setzt (nach §§. 65. 66.)

I. $\alpha = Lr$, wenn $r = +\sqrt{p^2+q^2}$

ist, und wo Lr den einzigen reellen Werth des natürlichen Logarithmen der positiven Zahl r vorstellt. Die Gleichungen 5.) geben nun

II. $cos\beta = \frac{p}{r}$ und $sin\beta = \frac{q}{r}$,

wo der Nenner r immer positiv ist, so daß $cos\beta$ mit p zugleich, und $sin\beta$ mit q zugleich positiv oder negativ seyn wird. — Zu diesen jetzt bekannten Kosinus und Sinus findet sich nun (nach §. 79.)

III. $\beta = 2n\pi + \varphi$,

wo n Null und jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt, während φ der einzige, innerhalb der 4 ersten Quadranten liegende, durch die Gleichungen II.) gegebene Werth von β ist, der nach Anleitung der §§. 78. und 79.) (mittelst einer sogenannten trigonometrischen oder Sinus-Tafel) gefunden wird.

Man hat also, unter der Voraussetzung der aus I.) und II.) berechneten Werthe von r und φ und der im §. 75.) bestimmten Zahl π, allemal

IV. $log(p+q\cdot i) = Lr + (2n\pi+\varphi)\cdot i$.

Hieraus finden sich aber die Werthe des künstlichen Logarithmen von $p+q\cdot i$ für die (positive) Basis c (nach §. 69.) ohne Weiteres, nämlich

V. $\overset{c}{log}(p+q\cdot i) = \frac{Lr}{Lc} + \frac{2n\pi+\varphi}{Lc}\cdot i$,

wo Lc den einzigen reellen Werth des natürlichen Logarithmen der Basis c vorstellt, während $\frac{Lr}{Lc} = \overset{c}{L}r$ (nach §. 69.) der reelle Werth des künstlichen Logarithmen von r für die Basis c ist.

§. 89.

In diesen Formeln stecken auch alle Werthe des natürlichen und künstlichen Logarithmen irgend einer positiven Zahl a, oder irgend einer negativen Zahl —a. — Man setzt, soll $p+q\cdot i=a$ werden, $q=0$, $p=a$, hat dann $r=a$, $Lr=La$, $cos\beta=1$, $sin\beta=0$, also $\varphi=0$, und die Formel §. 88. IV.) giebt

$$1)\qquad log\,a=La+2n\pi\cdot i.$$

Soll aber $p+q\cdot i=-a$ werden, so hat man $q=0$, $p=-a$, $r=+a$, $cos\beta=-1$, $sin\beta=0$, also $\varphi=\pi$, und die Formel §. 88. IV.) giebt

$$2)\qquad log(-a)=La+(2n+1)\pi\cdot i,$$

wo jedesmal n jede positive und jede negative ganze Zahl und die Null vorstellt, während $\pi=3,14159\cdots$ ist.

Setzt man in 1.) und 2.) noch $a=1$, so bekommt man alle Werthe des natürlichen Logarithmen von 1 und von —1, nämlich

$$3)\qquad log\,1=2n\pi\cdot i$$

$$4)\qquad log(-1)=(2n+1)\pi\cdot i,$$

wo n Null und jede ganze (positive oder negative) Zahl vorstellt.

Aus diesen natürlichen Logarithmen gehen aber die künstlichen für die Basis c, hervor, wenn man die ersteren noch mit Lc dividirt, oder mit dem Modul $\frac{1}{Lc}$ multiplicirt.

Anmerkung. Es hat also jeder natürliche Logarithme wirklich unendlich viele Werthe, wie wir solches schon früher (§. 65. I.) vermuthet haben; d. h. es giebt jedesmal unendlich viele Ausdrücke, welche einander nicht gleich sind, welche aber die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß wenn man e mit ihnen potenzirt, jedesmal ein und dasselbe Resultat heraus kommt. — Setzt man z. B. in obiger Formel 3.) statt n zuerst 6, dann —2, so erhält man $12\pi\cdot i$ und $-4\pi\cdot i$ als zwei

der Werthe von $log\,1$. Und in der That wird $e^{12\pi \cdot i} = 1$ u
auch $e^{-4\pi \cdot i} = 1$. Denn es ist (nach §. 70. III.)

$$e^{12\pi \cdot i} = cos\,12\pi + i \cdot sin\,12\pi \qquad = 1$$

und

$$e^{-4\pi \cdot i} = cos(-4\pi) + i \cdot sin(-4\pi) = cos\,4\pi - i \cdot sin\,4\pi =$$

in so fern $cos\,12\pi = cos\,4\pi = 1$ und $sin\,12\pi = sin\,4\pi = 0$ i

§. 90.

Für diese unendlich-vieldeutigen Logarithmen gelten noc
immer die Formeln

$$log(ab) = log\,a + log\,b,$$

$$log\frac{a}{b} = log\,a - log\,b,$$

$$log\,a^b \quad = b \cdot log\,a,$$

$$log\sqrt[b]{a} \quad = \frac{1}{b} \cdot log\,a,$$

letztere beiden in allen den Fällen, wo a^b und $\sqrt[b]{a}$ eine Bedeu-
tung haben; allein sie gelten nur in dem Sinne, in welchem
sie erwiesen werden, nämlich: wenn statt der (mehrdeutigen) Lo-
garithmen rechts irgend bestimmte, übrigens beliebige ihrer un-
endlich vielen Werthe gesetzt werden, so erhält man allemal einen
Werth des Logarithmen zur Linken, oder: die Gleichungen sind
richtig unter der Voraussetzung, daß statt aller vieldeutigen Lo-
garithmen zusammengehörige ihrer Werthe gesetzt werden *).

---

*) Die Nichtbeachtung der Vieldeutigkeit der Logarithmen ist die
Quelle eines langen Streites gewesen, der anfänglich zwischen Leibnitz
und Bernoulli geführt, und später zwischen d'Alembert und Euler
fortgesetzt wurde. Die eine Parthei suchte auf verschiedenen Wegen zu
beweisen, daß die Logarithmen der negativen Zahlen reell und denen
der positiven Zahlen gleich sind; während die andere Parthei ihrerseits
nicht unbewiesen ließ, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen allemal
imaginär sind. — Die letztere Ansicht behielt die Oberhand, als es
Eulern gelang die Formeln §. 89. N. N. 1.) und 2.) festzustellen.

§. 91.

Wir können jetzt den allgemeinsten Begriff der Potenz a^x feststellen, für jedes reelle und imaginäre a und für jedes reelle und imaginäre x. — Es ist nämlich im §. 63.) bereits gefunden worden, daß man A allemal so bestimmen kann, daß

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{2!} + \frac{A^3x^3}{3!} + \frac{A^4x^4}{4!} + \cdots$$

ist in allen den Fällen, in welchen a^x früher eine Bedeutung hatte, und daß man die Gleichung

$$a = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

erhält, wenn $x = 1$ gesetzt wird. — Diese letztere Gleichung giebt aber (nach §. 64.)

$$a = e^A, \qquad \text{also} \qquad A = \mathit{log}\, a,$$

wo $\mathit{log}\, a$ unendlich viele Werthe hat. Substituirt man diesen Werth statt A in die erstere Gleichung, so erhält man für jedes a und für ein positives oder negatives ganzes x, — oder für ein positives a und reelles x,

$$(\odot)\cdots \begin{cases} a^x = 1 + \dfrac{x\cdot \mathit{log}\, a}{1} + \dfrac{x^2\cdot(\mathit{log}\, a)^2}{2!} + \dfrac{x^3\cdot(\mathit{log}\, a)^3}{3!} + \cdots \\ \text{oder} \\ a^x = e^{x\cdot \mathit{log}\, a}; \end{cases}$$

und diese Gleichung kann man nun als Definition der allgemeinsten Potenz a^x gelten lassen, für den Fall, daß a und x ganz allgemein gedacht sind. Diese jetzige Potenz enthält nämlich die Differenz-Potenz eben so wie die reelle Potenz, endlich auch die natürliche und künstliche Potenz als besondere Fälle und Werthe in sich.

§. 92.

Man kann sogleich die Werthe von a^x berechnen, für den Fall, daß $a = p + q\cdot i$ und $x = \alpha + \beta\cdot i$, also a und x beliebig reell oder imaginär sind; d. h. man kann die Werthe von

$e^{x \cdot log a}$ auf die gewöhnliche Rechnungs-Form $P + Q \cdot i$ bringen, und zwar wie folgt:

Es ist

1) $\quad log\, a = log(p + q \cdot i) = Lr + (2n\pi + \varphi) \cdot i,$

wenn man

2) $\quad r = +\sqrt{p^2 + q^2}, \qquad cos\varphi = \frac{p}{r}, \qquad sin\varphi = \frac{q}{r}$

und φ innerhalb der 4 ersten Quadranten nimmt. Es ist daher

$$e^{x \cdot log a} = e^{(\alpha + \beta \cdot i) \cdot [Lr + (2n\pi + \varphi) \cdot i]}$$
$$= e^{\alpha \cdot Lr - \beta(2n\pi + \varphi) + i \cdot [\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi + \varphi)]}$$
$$= e^{\alpha \cdot Lr - \beta(2n\pi + \varphi)} \times e^{i \cdot [\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi + \varphi)]}.$$

Der erstere dieser beiden Faktoren ist allemal reell und wird für jeden Werth von n nach §. 64.) berechnet. Der zweite Faktor hat die Form $e^{z \cdot i}$, läßt sich daher (nach §. 70. III.) auf die Form $cos z + i \cdot sin z$ bringen; und so erhält man

3) $\quad a^x = e^{\alpha . Lr - \beta(2n\pi + \varphi)} \times$
$\quad (cos[\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi + \varphi)] + i \cdot sin[\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi + \varphi)]),$

d. h. man hat nun a^x in die gewöhnliche Rechnungsform ausgedrückt, wenn $a = p + q \cdot i$ und $x = \alpha + \beta \cdot i$ ist.

Ist $\beta = 0$, d. h. ist der Exponent x reell und $= \alpha$, so hat der erstere Faktor (in 3.) nur einen einzigen Werth $e^{\alpha . Lr}$ oder r^α (nach §. 68.), wo r^α die künstliche, d. h. in so fern α reell ist, die in den Elementen schon betrachtete reelle Potenz vorstellt; und die Potenz a^x, d. h. $(p + q \cdot i)^\alpha$ hat dann nur so viele Werthe als der zweite Faktor, der jetzt bloß

4) $\cdots \qquad = cos\, \alpha(2n\pi + \varphi) + i \cdot sin\, \alpha(2n\pi + \varphi)$

wird, Werthe hat.

Dieser Faktor (in 4.) und folglich die Potenz $(p + q \cdot i)^\alpha$ hat aber (nach der vorstehenden zweiten Abtheilung dieses Kapitels) nur einen einzigen Werth, so oft α positiv oder negativ ganz ist; sie haben beide gerade ν Werthe, nicht mehr und nicht

nicht weniger, so oft $\alpha = \frac{\mu}{v}$, und μ positiv oder negativ ganz, $\frac{\mu}{v}$ aber in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist; und sie haben unendlich viele verschiedene Werthe, so oft α irrational ist*).

§. 93.

Setzt man $\frac{1}{m}$ statt α, und $\beta = 0$, während m eine positive ganze Zahl ist, so findet man (direkt nach §. 92. verfahrend, oder aus dem Resultate §. 92. N. 3.)

$$1) \quad (p + q \cdot i)^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\cos \frac{2n\pi + \varphi}{m} + i \cdot \sin \frac{2n\pi + \varphi}{m}\right),$$

wo $r = +\sqrt{p^2 + q^2}$, $\cos\varphi = \frac{p}{r}$, $\sin\varphi = \frac{q}{r}$ ist, und wo $r^{\frac{1}{m}}$ die reelle Potenz vorstellt, welche (nach den Elementen) mit der absoluten Wurzel $\sqrt[m]{r}$ übereinstimmt, auch immer nur eindeutig ist.

Vergleicht man aber dieses Resultat mit der N. 2.) des §. 84. II.), so findet man, daß $(p + q \cdot i)^{\frac{1}{m}}$ genau eben so viele und genau dieselben Werthe hat als $\sqrt[m]{p + q \cdot i}$. — Also ist

$$2) \qquad (p + q \cdot i)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{p + q \cdot i}$$

eine vollständige Gleichung **). — Dies gilt, es mag $p + q \cdot i$

*) Diese Untersuchungen sind zwar aus den Eigenschaften der Sinus und Kosinus sehr leicht zu führen; wir verweisen aber doch den Leser, welcher sie nicht selbst anstellen will, auf das „System der Mathem." Bd. II. (2te Auflage) Kap. XXVI.

**) Bei den mehrdeutigen Ausdrücken ist ein Unterschied in den Gleichungen zu machen. Zuweilen stellt nämlich die eine Seite der Gleichung genau eben so viele und genau dieselben Werthe vor wie die andere Seite. Eine solche Gleichung möchte der Vfr. eine vollständige nennen. Zu-

eine imaginäre, oder eine reelle Zahl vorstellen, und im letztern Falle eine positive oder eine negative.

§. 94.

Außer diesem Gesetze §. 93. N. 2.) gelten aber noch alle die übrigen aus den Elementen schon bekannten Gesetze der Potenzen, namentlich auch:

1) $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$; 2) $a^x : a^z = a^{x-z}$;

3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$; 4) $a^x : b^x = (a:b)^x$

und 5) $(a^x)^z = a^{xz}$,

auch für diese allgemeinen Potenzen. Dies geht hervor, wenn man statt a^x, a^z, a^{x+z}, b^x, $(ab)^x$ und a^{xz}, die ihnen gleichen natürlichen Potenzen $e^{x \cdot log\, a}$, $e^{z \cdot log\, a}$, $e^{(x+z) \cdot log\, a}$, $e^{x \cdot log\, b}$, $e^{x \cdot log(ab)}$ und $e^{xz \cdot log\, a}$ setzt, und die Gesetze der natürlichen Potenzen des §. 64.), so wie die der natürlichen Logarithmen des §. 90.) in Anwendung bringt.

Man findet aber, daß im Allgemeinen in der Gleichung 1.) der Ausdruck zur Linken viel, viel mehr Werthe hat, als der Ausdruck zur Rechten, und daß das Produkt $a^x \cdot a^z$ nur dann einen der Werthe von a^{x+z} liefert, wenn statt a^x und a^z gerade solche ihrer Werthe $e^{x \cdot log\, a}$ und $e^{z \cdot log\, a}$ gesetzt werden, welche zu einem und demselben Werthe des $log\, a$ gehören. — Die Gleichungen 1.) und 2.) sind daher (im Allgemeinen) unvollständige Gleichungen. — Dagegen sind die Gleichungen 3.) und 4.) vollständige, d. h. ihre beiden Seiten enthalten genau

---

weilen aber ist die Gleichung nur in so fern gültig, als die eine Seite der Gleichung weniger Werthe hat als die andere Seite; z. B. wenn man schreibt $\sqrt{9} = -3$, wo links zwei Werthe stehen, rechts aber nur ein einziger, und wo man zwar statt des weniger umfassenden (—3), den umfassenderen ($\sqrt{9}$), aber nicht umgekehrt, statt des letztern überall den erstern setzen kann, weil der letztere gerade diejenigen seiner Werthe vorstellen könnte (z. B. +3), welche der andere nicht hat. — Solche Gleichungen möchte der Vfr. unvollständige nennen. — Letztere Gleichungen sind eben so richtig als die erstern, in so fern beide Seiten der Gleichung ein und dasselbe ausdrücken. Allein die ersteren sind ohne besondere Sorgfalt zu gebrauchen.

gleich viele und genau dieselben Werthe. — Die Gleichung 5.) ist wieder eine vollständige. — (Näheres hierüber findet man im Kap. XXVI. d. II. Th. des „Systems der Mathem." 2[te] Auflage.).

§. 95.

Eben so gilt auch noch der binomische Lehrsatz, nämlich der Satz:

$$(1+b)^x = 1 + x \cdot b + \frac{x^{2|-1}}{2!} \cdot b^2 + \frac{x^{3|-1}}{3!} \cdot b^3 + \cdots$$

ganz allgemein, es mag x reell oder imaginär seyn, jedoch auch mit der Beschränkung, daß zur Rechten dieser Gleichung nur ein eindeutiger Ausdruck steht, während zur Linken die allgemeine Potenz $(1+b)^x$ unendlich viele Werthe haben kann. Setzt man aber in der obigen Gleichung lieber $\frac{b}{a}$ statt b, und multiplicirt man dann beide Seiten mit a^x, so erhält man links $(a+b)^x$, rechts aber nun, wegen des Faktors a^x, ebenfalls genau so viele Werthe, als der Faktor links deren hatte.

Der Grund, warum der binomische Lehrsatz auch jetzt noch gilt, ist aber im „System d. Mathem." II. Th. 2[te] Aufl. §. 684.) nachzulesen, in so fern uns hier die uns vorgesteckte Kürze verbietet, irgend etwas weitläufiger zu behandeln, was nur theoretisches und nicht zu gleicher Zeit ein praktisches Interesse hat. Wir begnügen uns hier damit, (im §. 48.) die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes für positive Dignanden und reelle Exponenten gründlich nachgewiesen und überhaupt in Allem, wo wir nicht bestimmt das Gegentheil sagen, nach der größten Gründlichkeit gestrebt zu haben.

§. 96.

Den allgemeinen Potenzen stehen auch allgemeinere Logarithmen gegenüber, die mit den Potenzen zugleich vorhanden und gegeben sind. Weil aber solche mehr in theoretischer als in praktischer Beziehung von Interesse sind, so mag von diesen allgemeinsten Logarithmen hier gar nicht weiter die Rede seyn. Die Leser, welche Näheres darüber zu erfahren wünschen,

werden solches im Kap. XXVI. des II. Th. d. „Systems d. Mathem.“ entwickelt finden.

Anmerkung 1. Am Schlusse dieses Kapitels, wo fast alle mehrdeutigen und unendlich-vieldeutigen Ausdrücke eingeführt worden sind, müssen wir aber ausdrücklich die Warnung wiederholen: 1) „nie ein vieldeutiges Zeichen, wenn es mehrere „Male erscheint, jedesmal als einen und denselben Ausdruck „anzusehen, weil es jedesmal einen andern seiner Werthe vorstellen kann“; 2) in einer Gleichung zwischen vieldeutigen Ausdrücken nur dann unbedingt die eine Seite statt der andern zu setzen, wenn beide Seiten gleich viele und dieselben Werthe haben; außerdem aber statt des weniger umfassenden Ausdruckes zwar den umfassenderen unbedingt zu setzen, aber nicht umgekehrt zu verfahren, d. h. nicht unbedingt für einen Ausdruck, der mehrere Werthe hat, einen andern zu setzen, der von diesen Werthen nur einen einzigen, oder nur einige derselben vorstellt, weil man sonst fürchten muß, daß der erstere allgemeinere Ausdruck gerade solche Werthe vorstellte, welche der andere gar nicht enthält.

In allgemeinen analytischen Untersuchungen kann man sich diese Regeln nicht tief genug einprägen, weil ihre Vernachlässigung (welche sich früher die größten Analysten haben zu Schulden kommen lassen) bereits zu den unrichtigsten, und dabei lange Zeit für wahr gehaltenen Resultaten geführt hat. (Man vgl. hierüber die „Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik“ Berlin 1823.)

Anmerkung 2. Wir stehen aber jetzt in Bezug auf die drei letztern Operationen auf derselben Stufe, auf welcher wir in den §§. 9. und 10.) in Bezug auf die vier erstern Operationen uns gestellt sahen. — Wir dürfen jetzt nur noch einige Betrachtungen über die höheren Gleichungen hinzufügen, um die Lücken auszufüllen, die wir hier und da noch stehen lassen mußten; z. B. 1) ob die m^{te} Wurzel nicht noch mehr als die m Werthe hat, die wir gefunden haben, und ob alle ihre Werthe

von der Form $p+q\cdot i$ sind; 2) ob die Werthe des natürlichen Logarithmen, die wir gefunden haben, alle seine Werthe sind, oder ob er noch mehrere Werthe hat, die vielleicht nicht die Form $p+q\cdot i$ haben; endlich 3) ob es überhaupt imaginäre Ausdrücke geben kann, die sich nicht auf die Form $p+q\cdot i$ bringen lassen.

Wir werden aber im nächsten Kapitel nachweisen, 1) daß es keine andern imaginären Werthe giebt, als nur solche, die sich auf die Form $p+q\cdot i$ bringen lassen; und 2) daß wir alle Werthe der m^{ten} Wurzel und auch alle Werthe des natürlichen Logarithmen bereits gefunden haben.

Achtes Kapitel.

Von den höhern Gleichungen.

Einleitung.

Aufzählung der Wahrheiten, welche das gegenwärtige Kapitel zunächst außer Zweifel zu setzen hat.

Das gegenwärtige Kapitel hat zunächst folgendes außer Zweifel zu setzen:

1) Jeder höheren Gleichung mit reellen oder imaginären Koefficienten, die aber von der Form $p+q\cdot i$ sind, kann allemal durch einen Werth des Unbekannten genügt werden, welcher selber von der Form $p+q\cdot i$ ist, also reell (wenn $q=0$ sich findet) oder imaginär. (Man vgl. §. 97.)

2) Für jede solche höhere Gleichung vom m^{ten} Grade giebt es immer genau m (nicht mehr und nicht weniger) Ausdrücke von der Form $p+q\cdot i$, welche, statt des Unbekannten gesetzt, der höheren Gleichung genügen. — Diese m Werthe nennt man die Wurzel-Werthe der höhern Gleichung, und solche können in besonderen Fällen zum Theil oder alle einander gleich seyn. (Man vgl. §. 98.)

3) Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \mu, \nu$ die m Wurzel-Werthe einer höhern Gleichung vom m^{ten} Grade, welche durch $f_x=0$ ausgedrückt seyn mag; und hat man in $f_x=0$ mit dem Koefficienten der höchsten (m^{ten}) Potenz von x dividirt, so daß die Gleichung $f_x=0$ die Form

$$(\odot)\cdots \qquad x^m+A_1\cdot x^{m-1}+A_2\cdot x^{m-2}+\cdots+A_{m-1}x+A_m=0$$

angenommen hat, so ist allemal für jeden Werth von x

$$f_x=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\mu)(x-\nu);$$

und der Ausdruck f_x läßt sich nur auf diese einzige Art in solche einfache Faktoren (oder Faktoren vom ersten Grade) zerlegen. (Man vgl. §. 99.)

4) Da zu diesem Produkte jeder Faktor gerade so viel beiträgt wie der andere, so müssen die Koefficienten $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots A_{m-1}, A_m$ aus den Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \mu, \nu$ auf eine völlig symmetrische Weise zusammengesetzt seyn; und in der That ist

$-A_1$ die Summe aller Wurzel-Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \nu$;

$+A_2$ die Summe der Produkte je zweier dieser Wurzel-Werthe;
$-A_3$ die Summe der Produkte je dreier dieser Wurzel-Werthe;
$+A_4$ die Summe der Produkte von je vier der Wurzel-Werthe;
und allgemein ist

$\mp A_n$ die Summe der Produkte von je n der Wurzel-Werthe, wo das obere (—) Zeichen gilt, wenn n ungerade ist, das unter (+) dagegen, wenn n gerade. — Zuletzt ist

A_m das Produkt aller m Wurzel-Werthe, und zwar, so oft m ungerade seyn sollte, noch mit dem (—) Zeichen versehen. (M. vgl. §. 100.)

5) Ohne die Wurzel-Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ einer höheren Gleichung vom m^{ten} Grade zu kennen, kann man doch immer aus den Koefficienten der gegebenen Gleichung eine neue Gleichung bilden,

1') deren Wurzel-Werthe bezüglich $\alpha \pm a$, $\beta \pm a$, $\gamma \pm a$, $\delta \pm a, \cdots \mu \pm a$, $\nu \pm a$ sind, und jede dieser beiden neuen Gleichungen ist wieder vom m^{ten} Grade; oder

2') deren Wurzel-Werthe bezüglich

$$\alpha a, \quad \beta a, \quad \gamma a, \quad \delta a, \quad \cdots \quad \mu a, \quad \nu a$$

oder

$$\frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta}{a}, \quad \frac{\gamma}{a}, \quad \frac{\delta}{a}, \quad \cdots \quad \frac{\mu}{a}, \quad \frac{\nu}{a}$$

oder

$$\frac{a}{\alpha}, \quad \frac{a}{\beta}, \quad \frac{a}{\gamma}, \quad \frac{a}{\delta}, \quad \cdots \quad \frac{a}{\mu}, \quad \frac{a}{\nu}$$

sind; und jede dieser neuen Gleichungen ist wieder vom m^{ten} Grade; oder

3') deren Wurzel-Werthe die Summe je zweier Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung, oder die Differenz je zweier Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung, oder irgend eine Verbindung aus je zwei, oder je drei, oder je vier etc. etc. der Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung sind; und die neue Gleichung ist allemal vom sovielten Grade, als sich aus den m Wurzel-Werthen der gegebenen Gleichung solche Verbindungen zu zweien, zu dreien, zu vieren (mit oder ohne Wiederholung, wie es die Aufgabe gerade verlangen sollte) bilden lassen. (§§. 101.—104.)

6) Man kann die Summe der 2ten, 3ten, 4ten, ... n^{ten} Potenzen der Wurzel-Werthe einer jeden gegebenen höheren Gleichung mittelst eines sehr einfachen (des Newton'schen) Lehrsatzes in die Koefficienten dieser Gleichung ausdrücken (vgl. §. 105.).

7) Aus einer jeden höheren Gleichung, welche gleiche Wurzel-Werthe hat, (z. B. wo $\alpha = \beta = \gamma$, dann wieder $\delta = \varepsilon$, u. s. f., ist) kann man immer eine andere höhere Gleichung vom niedrigern Grade ableiten, welche alle Wurzel-Werthe der vorigen hat, aber jeden nur einmal, wenn derselbe in der vorigen Gleichung auch 2, 3, 4mal u. s. w. vorgekommen

seyn sollte; und das wieder, ohne daß man die Wurzel-Werthe kennt, bloß aus den Koefficienten der gegebenen Gleichung.

Dieses alles gilt, die Koefficienten der Gleichung mögen reell oder imaginär seyn. Hat aber die Gleichung bloß reelle Koefficienten, so ist für selbige noch folgendes besonders zu merken:

8) Hat eine höhere Gleichung $f_x = 0$ mit reellen Koefficienten den Wurzel-Werth $p + q \cdot i$, wo q nicht Null ist, so ist auch $p - q \cdot i$, wo p und q dieselben Werthe haben, ein zweiter Wurzel-Werth derselben Gleichung (§. 107.).

9) Eine höhere Gleichung $f_x = 0$ mit reellen Koefficienten hat also entweder gar keine imaginären Wurzel-Werthe, oder sie hat solche doch immer paarweise. — Ist sie daher von einem ungeraden Grade, so hat sie mindestens einen reellen Wurzel-Werth. (Vgl. §. 108.)

10) Hat eine höhere Gleichung vom geraden Grade den letzten Koefficienten (der mit x^0 multiplicirt erscheint, d. h. der x gar nicht zum Faktor hat) negativ, so hat dieselbe Gleichung wenigstens zwei reelle Wurzel-Werthe. (Vgl. §. 108.)

11) Jede ganze Funktion von x von der Form

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

läßt sich allemal in lauter reelle einfache oder doch in reelle doppelte Faktoren zerlegen, welche letzteren die Form $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$ d. h. $(x-p)^2 + q^2$ haben, in so fern sie das Produkt der beiden imaginären Faktoren $x - (p + q \cdot i)$ und $x - (p - q \cdot i)$ sind. — Giebt man aber (nach §. 82.) dem Ausdrucke $p + q \cdot i$ die Form $r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, so daß $p - q \cdot i = r(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$ wird, so ist der reelle doppelte Faktor $= x^2 - 2rx \cdot \cos\varphi + r^2$. Man kann daher einen reellen doppelten Faktor, dessen beide einfache Faktoren imaginär sind, in dieser letztern Form ebenfalls hinstellen. (Vgl. §. 108.)

12) Diese Zerlegung in reelle doppelte oder einfache Faktoren, für die sehr einfachen Funktionen $x^m \pm a^m$ ausgeführt, giebt den Lehrsatz des Cotes. Dehnt man aber diese Zerlegung auch auf die Funktion

$$x^{2n} - 2a^n x^n \cdot \cos\varphi + a^{2n}$$

aus, so hat man die zu dem Lehrsatz des Cotes gehörige Erweiterung des Moivre.

Außer diesen theoretischen Sätzen müssen wir aber in diesem Kapitel auch noch eine bequeme und sichere praktische Methode zur Auffindung der Näherungswerthe einer höhern Gleichung mittheilen.

Wir haben nämlich bereits im ersten Kapitel gesehen, daß man bis jetzt noch keine Methode aufgefunden hat, durch welche die allgemeinen höheren Gleichungen, d. h. diejenigen, welche nicht lauter bestimmt gegebene Ziffern-Koefficienten haben, aufgelöst werden könnten, sobald solche den vierten Grad übersteigen; und daß die allgemeine Auflösung der

Gleichungen vom vierten Grade selbst, die man noch nachweisen kann, durchaus nicht zur praktischen numerischen Auflösung dieser Gleichungen vom vierten Grade benutzt werden kann.

Auf der andern Seite haben wir im §. 59.) das Newton'sche Verfahren durchblicken lassen, nach welchem man für jede reelle numerische Gleichung, d. h. für jede Gleichung, deren Koefficienten reelle und wirklich gegebene Ziffern-Werthe sind, den Wurzel-Werth der Gleichung in Grenzen einschließen und diese Grenzen selbst einander näher rücken lassen kann, Versuchsweise; so daß man zuletzt einen Näherungs-Werth für den Unbekannten hat, der vielleicht dem gesuchten so nahe gefunden werden kann, als der Fall der Anwendung es nur immer wünschenswerth macht. Es kommt also jetzt alles darauf an, diese Methode hier gehörig zu vervollkommnen, so daß sie mit möglichster Schnelligkeit die möglichste Genauigkeit liefert. Zu dieser Vervollkommnung gehören folgende Punkte:

13) Wenn die zu lösende numerische Gleichung gegeben ist, möglichst schnell für jede der reellen Wurzel-Werthe zwei Grenzen zu finden, zwischen denen sie liegt, und zugleich genau angeben zu können, wieviel imaginäre, also wie viele reelle Wurzel-Werthe die gegebene Gleichung hat.

14) Wenn dies erledigt ist, die Grenzen irgend eines der Wurzel-Werthe, die man schon hat, möglichst schnell enger und enger zu ziehen, so daß man möglichst bald zwei Grenzen dieses Wurzel-Werthes habe, welche selbst nur noch weniger von einander verschieden sind, als der Fehler beträgt, den man in der gerade vorhabenden Anwendung machen darf. – Dann kann man nämlich jede dieser beiden Grenzen selbst statt des gesuchten Wurzel-Werthes nehmen.

Alle diese Punkte sollen nun durch die nächstfolgenden Paragraphen vorzugsweise erledigt werden.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Eigenschaften der höhern Gleichungen mit beliebigen reellen oder imaginären Koefficienten von der Form $p+q\cdot i$.

§. 97.

Welche endliche Reihe oder ganze Funktion von x auch immer durch f_x vorgestellt seyn mag, d. h. wie auch ihre Koefficienten reell oder imaginär aber von der Form $p+q\cdot i$, nur immer seyn mögen, so giebt es doch immer einen reellen oder

imaginären Werth von der Form $p+q\cdot i$, welcher statt x gesetzt die Funktion f_x der Null gleich macht.

Substituirt man nämlich überhaupt $p+q\cdot i$ statt x, und läßt man dabei p und q noch ganz unbestimmt, so wird sich f_x in die Form $\varphi_{p,q}+i\cdot\psi_{p,q}$ verwandeln lassen, wo $\varphi_{p,q}$ und $\psi_{p,q}$ (endliche) Doppel-Reihen, d. h. ganze Funktionen von p und von q sind. Es kommt nun darauf an nachzuweisen, daß es reelle Werthe von p und q giebt, welche $\varphi=0$ und $\psi=0$, oder was dasselbe ist, welche $\varphi^2+\psi^2=0$ machen; denn da φ und ψ für reelle Werthe von p und q, selbst nur reelle Werthe annehmen, so werden φ^2 und ψ^2 nur positiv, wenn nicht Null; also kann $\varphi^2+\psi^2$ nicht der Null gleich seyn, ohne daß φ und ψ einzeln der Null gleich sind.

Bezeichnen wir nun

1) $\varphi^2+\psi^2$ durch $F_{p,q}$ oder F,

so sieht man wenigstens soviel ein, daß F für alle reellen Werthe von p und q immerfort positiv und höchstens $=0$ ist, daß daher F einen kleinsten Werth haben wird. Es giebt also ganz gewiß reelle Werthe von p und q, welche F zu einem Kleinsten machen. Diese letzteren werden (nach §. 61.) gefunden, wenn man die beiden Gleichungen

2) $\partial F_p=0$ und $\partial F_q=0$

nach p und q auflöst. Nun ist aber (nach §§. 55. und 56.)

3) $\partial F_p=2\varphi\cdot\partial\varphi_p+2\psi\cdot\partial\psi_p$ und $\partial F_q=2\varphi\cdot\partial\varphi_q+2\psi\cdot\partial\psi_q$;

folglich gehen die Gleichungen 2.) über in

4) $\varphi\cdot\partial\varphi_p+\psi\cdot\partial\psi_p=0$ und $\varphi\cdot\partial\varphi_q+\psi\cdot\partial\psi_q=0$.

Diese Gleichungen geben, wenn man abwechselnd ψ oder φ auf dem gewöhnlichen algebraischen Wege eliminirt,

5) $\varphi=0$ und $\psi=0$,

wenn nicht

6) $\partial\varphi_p\cdot\partial\psi_q-\partial\psi_p\cdot\partial\varphi_q=0$.

Würde nun die Gleichung 6.) wirklich Werthe von p und q liefern, für welche F ein Minimum wird, so würde, da diese einzige Gleichung den Werth von p ganz unbestimmt läßt und nur q zu p bestimmt, F ein Minimum seyn für eine unendliche Anzahl stetig neben einander liegender Werthe von p, welche den übrigen Bedingungen des Minimums genügen*).

---

*) Dies läßt sich auch noch strenger beweisen. M. vgl. „Syst. d. Math. Th. II. 2te Aufl. §. 481.). Man kann nämlich durch Rechnung nachweisen, daß die aus der Gleichung 6.) hervorgehenden Werthe von p und q den Bedingungen, daß ∂^2F_p und $\partial^2F_p\cdot\partial^2F_q-(\partial^{1,1}F_{p,q})^2$ positiv werden müssen, nicht genügen; folglich enthält diese Gleichung 6.) die

Da dies nicht seyn kann, so sind die allemal existirenden reellen Werthe von p und von q, welche F zu einem Minimum machen, allemal nur aus den Gleichungen 5.) herzuholen. Weil es aber immer reelle Werthe von p und q giebt, welche F zu einem Minimum machen, so giebt es reelle Werthe von p und von q, welche $\varphi_{\prime}=0$ und $\psi_{\prime}=0$ machen, und welche daher so sind, daß wenn $p+q\cdot i$ statt x in f_x gesetzt wird, dann auch f_x der Null gleich werden muß.

Anmerkung. Der vorliegende Beweis behält seine volle Gültigkeit, wenn auch f_x eine unendliche Reihe nach x seyn sollte, so daß φ und ψ unendliche Doppel-Reihen sind, sobald wir nur voraussetzen dürfen, daß φ und ψ für alle reellen Werthe von p und q convergiren, d. h. daß, obgleich $\varphi_{p,q}$ eben so wie $\psi_{p,q}$ aus unendlich vielen unendlichen Reihen bestehen, jede dieser letztern convergent ist, und die durch die Summen dieser letztern Reihen gebildete Reihe abermals zu den convergenten gehört.

Dies ist aber namentlich allemal der Fall, sobald wir uns unter f_x eine der nachstehenden fünf unendlichen Reihen denken, nämlich entweder die Potenz-Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

oder diejenigen Reihen, welche aus dieser hervorgehen, wenn man die Summe der geraden, oder die Summe der ungeraden Glieder dieser Reihe nimmt, und zwar mit dem eigenen (+) Zeichen, oder mit abwechselnden (+ und —) Zeichen. — Setzt man nämlich (nach §. 82.) $r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ statt $p+q\cdot i$, so geht die obige Reihe vermöge der Formel des §. 84.) über in

$$1+\cos\varphi\cdot\frac{r}{1}+\cos 2\varphi\cdot\frac{r^2}{2!}+\cos 3\varphi\cdot\frac{r^3}{3!}+\cdots$$
$$+i\cdot\left(\sin\varphi\cdot\frac{r}{1}+\sin 2\varphi\cdot\frac{r^2}{2!}+\sin 3\varphi\cdot\frac{r^3}{3!}+\cdots\right),$$

welche beide Reihen für jeden Werth von r und φ, convergent

Werthe von p und q nicht, welche $F_{p,q}$ zu einem Minimum machen (nach §. 61.).

sind. — Aehnliches giebt sich für die übrigen vier Reihen, welche aus diesen Gliedern der Potenz-Reihe gebildet sind.

§. 98.

I. Jede ganze Funktion f_x von x, vom m^{ten} Grade läßt sich allemal und nur auf eine einzige Art in ein Produkt von m Faktoren zerlegen von der Form $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\mu)(x-\nu)$, wenn die Koefficienten derselben beliebig reell oder imaginär aber von der Form $p+q\cdot i$ sind, sobald nur der Koefficient der höchsten m^{ten} Potenz von x, der 1 gleich ist. — Ist aber A_0 der Koefficient dieser höchsten Potenz x^m, so läßt sich doch f_x allemal auf die Form

$$A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\mu)(x-\nu)$$

bringen, während $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ reell oder imaginär aber von der Form $p+q\cdot i$ sind.

II. Es giebt daher im Allgemeinen m, nicht mehr und nicht weniger, einander nicht gleiche Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, welche reell oder imaginär aber von der Form $p+q\cdot i$ sind, und welche statt des Unbekannten x der höhern Gleichung $f_x=0$ gesetzt, letztere identisch machen. Diese nennt man die Wurzel-Werthe der höhern Gleichung. — In besonderen Fällen können 2, 3 und mehrere, ja alle dieser m Wurzel-Werthe einander gleich werden.

Wir wollen diese Behauptungen bloß für eine ganze Funktion vom 5ten Grade nachweisen, nämlich

$$f_x = A_0\cdot x^5 + A_1\cdot x^4 + A_2\cdot x^3 + A_3\cdot x^2 + A_4\cdot x + A_5.$$

Es läßt sich erstlich A_0 als ein gemeinschaftlicher Faktor heraussetzen, nämlich so

1) $$f_x = A_0\cdot\left(x^5 + \frac{A_1}{A_0}x^4 + \frac{A_2}{A_0}x^3 + \frac{A_3}{A_0}x^2 + \frac{A_4}{A_0}x + \frac{A_5}{A_0}\right);$$

und, waren vorher die Koefficienten reell oder imaginär aber von der Form $p+q\cdot i$, so sind die jetzigen Koefficienten (nach §. 18.) wiederum von dieser Form. Diese neuen Koefficienten mögen der Ordnung nach durch B_1, B_2, B_3 B_4 und B_5 bezeichnet seyn.

Dividirt man nun die ganze Funktion

2) $$x^5 + B_1\cdot x^4 + B_2\cdot x^3 + B_3\cdot x^2 + B_4\cdot x + B_5,$$

welche durch φ_x bezeichnet werden mag, durch $x-\alpha$, wo α ganz beliebig gedacht ist, so lange fort (nach den Regeln der gemeinen Buchstaben-Rechnung), bis man einen Rest bekommt, welcher gar kein x mehr hat, so findet sich (nach dem Schema des §. 20. II., woselbst der Leser nachzusehen hier ausdrücklich gebeten wird) dieser letzte Rest so:

$$\alpha^5+B_1\cdot\alpha^4+B_2\cdot\alpha^3+B_3\cdot\alpha^2+B_4\cdot\alpha+B_5 \quad \text{oder} \quad \varphi_\alpha$$

d. h. dieser letzte Rest ist das, was aus φ_x wird, wenn man α statt x setzt. Ist daher α der (nach §. 97.) allemal existirende Ausdruck, welcher φ_x zu Null macht, so ist dieser letzte Rest der Null gleich und φ_x ist dann durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar, und der Quotient ist vom $m-1^{ten}$ d. h. in unserem Falle, vom 4ten Grade *). Wird letzterer durch φ'_x bezeichnet, so hat man

3) $$\varphi_x=(x-\alpha)\cdot\varphi'_x,$$

während (nach §. 18.) die Koefficienten von φ'_x nothwendig wieder reell oder imaginär aber von der Form $p+q\cdot i$ sind. Ganz auf dieselbe Weise folgert man aber, daß

4) $\varphi'_x=(x-\beta)\cdot\varphi''_x$; 5) $\varphi''_x=(x-\gamma)\cdot\varphi'''_x$; u. s. w. f.

ist, während die Quotienten φ'_x, φ''_x, φ'''_x, etc. etc. nach der Ordnung um einen Grad niedriger werden, so daß der letzte Quotient nur noch vom 1ten Grade, etwa $=x-\varepsilon$ wird. Dann hat man also

$$\varphi_x=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)$$

und

$$f_x=A_0\cdot\varphi_x=A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon);$$

und so ist der eine Theil unserer Behauptungen außer Zweifel gesetzt.

Daß aber nun jeder der fünf Werthe von x, welcher nach und nach einen jeden einzelnen der fünf Faktoren von f_x der Null gleich macht, auch f_x selbst der Null gleich machen müsse, fällt in die Augen.

Jeder Werth ζ endlich, welcher statt x gesetzt, unsere Funktion f_x der Null gleich macht, muß einen der obigen fünf Faktoren der Null gleich machen, muß also einer der vorigen fünf Werthe α, β, γ, δ oder ε seyn.

---

*) Daß φ_x durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar ist, so oft α derjenige Werth von x ist, welcher φ_x der Null gleich macht, sieht man noch bequemer ein, wenn man $\varphi_\alpha=0$ von φ_x subtrahirt, so daß man $\varphi_x=\varphi_x-\varphi_\alpha$ erhält. Diese letztere Form hat dann lauter Glieder von der Form $B_c\cdot(x^b-\alpha^b)$ und $x^b-\alpha^b$ ist allemal durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar. Sind aber alle Glieder von $\varphi_x-\varphi_\alpha$ (d. h. von φ_x, aber in dieser neuen Form) durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar, so ist φ_x selbst durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar.

Denn man dividire $f_x = 0$ so lange mit denjenigen der fünf Faktoren $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, etc. etc. die für $x=\zeta$ nicht Null werden, so ergiebt sich doch der letzte der Null gleich für $x=\zeta$.

Daraus folgt aber, daß sich f_x nur auf eine einzige Art in fünf solche einfache Faktoren zerlegen läßt. Denn wäre $x-\zeta$ irgend ein neuer Faktor von φ_x, so würde $x=\zeta$ die Funktion φ_x der Null gleich machen, folglich mit einem der übrigen fünf Werthe zusammenfallen.

Was aber von einer ganzen Funktion vom 5ten Grade hier so eben gezeigt ist, kann jeder Leser auf jede ganze Funktion von jedem m^{ten} Grade ausdehnen.

So sind die Nummern 1.)—3.) der Einleitung außer Zweifel gesetzt.

§. 99.

Nimmt man umgekehrt ein Produkt

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)(x+\varepsilon)$$

von beliebig vielen solcher einfachen Faktoren, so giebt die gemeine Multiplikation augenblicklich

$$(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta;$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) =$$
$$x^3 + (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x + \alpha\beta\gamma;$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta) =$$
$$x^4 + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2$$
$$+ (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x + \alpha\beta\gamma\delta;$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)(x+\varepsilon) =$$
$$x^5 + \left|\begin{array}{r} \alpha \\ +\beta \\ +\gamma \\ +\delta \\ +\varepsilon \end{array}\right| \cdot x^4 + \left|\begin{array}{r} \alpha\beta \\ +\alpha\gamma \\ +\alpha\delta \\ +\alpha\varepsilon \\ +\beta\gamma \\ +\beta\delta \\ +\beta\varepsilon \\ +\gamma\delta \\ +\gamma\varepsilon \\ +\delta\varepsilon \end{array}\right| \cdot x^3 + \left|\begin{array}{r} \alpha\beta\gamma \\ +\alpha\beta\delta \\ +\alpha\beta\varepsilon \\ +\alpha\gamma\delta \\ +\alpha\gamma\varepsilon \\ +\alpha\delta\varepsilon \\ +\beta\gamma\delta \\ +\beta\gamma\varepsilon \\ +\beta\delta\varepsilon \\ +\gamma\delta\varepsilon \end{array}\right| \cdot x^2 + \left|\begin{array}{r} \alpha\beta\gamma\delta \\ +\alpha\beta\gamma\varepsilon \\ +\alpha\beta\delta\varepsilon \\ +\alpha\gamma\delta\varepsilon \\ +\beta\gamma\delta\varepsilon \end{array}\right| x + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.$$

Hat man daher z. B. die höhere Gleichung vom 5ten Grade

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)(x+\varepsilon) = 0,$$

so sind $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-\varepsilon$ die 5 Wurzel-Werthe derselben und so sieht man, wie die Koefficienten des Produkts

nicht bloß ganz symmetrische Zusammensetzungen aus diesen Wurzel-Werthen sind, sondern auch gerade die wohlgeordneten Verbindungen (Combinationen) aus je 1, je 2, je 3, je 4, und allen 5 Wurzel-Werthen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-\varepsilon$, letztere als Produkte angesehen, die alle zu einander addirt werden müssen, und mit dem entgegengesetzten oder eigenen Vorzeichen ($-$ oder $+$), je nachdem es der 1te, 3te, 5te etc. etc. oder der 2te, 4te etc. etc. Koefficient ist, d. h. je nachdem die einzelnen Produkte aus einer ungeraden oder aus einer geraden Anzahl von Faktoren bestehen.

Dasselbe erstreckt sich offenbar auf jede beliebige Anzahl solcher einfachen Faktoren; und so sieht sich die N. 4.) der Einleitung in's gehörige Licht gestellt.

Anmerkung. Schreibt man die Funktion f_x in umgekehrter Ordnung, nämlich

$$f_x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots A_m x^m$$

und sind $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ die m Wurzel-Werthe der Gleichung $f_x = 0$, so ist allemal auch

$$(\odot) \cdots f_x = A_0\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\left(1-\frac{x}{\nu}\right).$$

Es ist nämlich (nach §. 99.) $\pm\frac{A_0}{A_m}$ das Produkt $\alpha\beta\gamma\cdots\mu\nu$ aller m Wurzel-Werthe, wo das (+) oder (−) Zeichen gilt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Nimmt man daher die Gleichung des §. 98. I.) nämlich

$$f_x = A_m(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\mu)(x-\nu),$$

und dividirt man rechts durch das Produkt $\alpha\beta\gamma\cdots\mu\nu$, während man zu gleicher Zeit mit dem, diesem Produkt gleichen Ausdruck $\pm\frac{A_0}{A_m}$ wiederum multiplicirt, so hat man immer noch f_x unverändert, nämlich

$$f_x = \pm A_0\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\beta}-1\right)\left(\frac{x}{\gamma}-1\right)\cdots\left(\frac{x}{\mu}-1\right)\left(\frac{x}{\nu}-1\right);$$

und daraus folgt die zu erweisende Gleichung ($\odot$) augenblicklich.

Man hat dies auf den Fall ausgedehnt wo f_x eine unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

vorstellt. Man behauptet: Wenn man alle unendlich-vielen Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. etc. hat, welche diese Reihe f_x, wenn sie statt x gesetzt werden, der Null gleich macht, so müsse sich f_x in ein Produkt von unendlich-vielen Faktoren zerlegen lassen, nämlich

$$f_x = A_0\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

So plausibel dies aber seyn mag, so unwahr ist es doch im Allgemeinen, und dürfte höchstens nur von den Reihen nach x wahr seyn, welche für jeden reellen oder imaginären Werth von x, der die Form $p+q\cdot i$ hat, convergent sind. — Und in den Fällen, wo der Satz wahr seyn mag, ist er doch nur dann anzuwenden, wenn man überzeugt ist, alle (unendlich-vielen) Wurzel-Werthe von $f_x = 0$ wirklich zu haben, welche Ueberzeugung nicht immer leicht zu erlangen seyn dürfte.

Namentlich zerlegt man auf solche Weise die Sinus- und Kosinus-Reihen in Produkte von unendlich-vielen Faktoren; nämlich

$$1)\quad \sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

$$= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots \text{ in inf.};$$

$$2)\quad \cos x = \left(1-\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{5}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{5}{2}\pi}\right)\cdots$$

$$= \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

Alle Folgerungen, die man bis jetzt aus diesen beiden Zerlegungen gezogen hat, lassen sich auch auf anderen Wegen erhalten, und dies spricht mehr als alles Uebrige für die Richtigkeit dieser beiden Zerlegungen.

§. 100.

Ohne die Wurzel-Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots \mu, \nu$ einer höhern Gleichung vom m^{ten} Grade

$$1)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

zu

zu kennen, kann man doch aus ihr leicht neue Gleichungen bilden, deren Wurzel-Werthe das $a$fache, oder der a^{te} Theil der Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung 1.) sind, oder deren Wurzel-Werthe alle um a größer oder kleiner sind als bezüglich die Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung.

I. Setzt man nämlich $z = ax$, also $x = \frac{z}{a}$ und substituirt man diesen Werth $\frac{z}{a}$ statt x in die gegebene Gleichung 1.), so erhält man, wenn noch mit a^m wegmultiplicirt wird,

$$2)\quad z^m + A_1 a z^{m-1} + A_2 a^2 z^{m-2} + \cdots A_{m-1} a^{m-1} z + A_m a^m = 0;$$

und die Wurzel-Werthe dieser Gleichung 2.) sind bezüglich

$$a\alpha,\quad a\beta,\quad a\gamma,\quad \cdots\quad a\mu \text{ und } a\nu.$$

II. Setzt man aber $u = \frac{x}{a}$, also $x = au$, und substituirt man diesen Werth au statt x in die gegebene Gleichung 1.), so erhält man

$$3)\quad u^m + \frac{A_1}{a}\cdot u^{m-1} + \frac{A_2}{a^2}\cdot u^{m-2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{a^{m-1}}\cdot u + \frac{A_m}{a^m} = 0\text{*)};$$

und die Wurzel-Werthe dieser Gleichung sind bezüglich

$$\frac{\alpha}{a},\quad \frac{\beta}{a},\quad \frac{\gamma}{a},\quad \cdots\quad \frac{\mu}{a} \text{ und } \frac{\nu}{a}.$$

III. Sollte aber eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzel-Werthe bezüglich

$$\frac{a}{\alpha},\quad \frac{a}{\beta},\quad \frac{a}{\gamma},\quad \cdots\quad \frac{a}{\mu} \text{ und } \frac{a}{\nu}$$

sind, so dürfte man nur $v = \frac{a}{x}$, also $x = \frac{a}{v}$ setzen, und diesen Werth $\frac{a}{v}$ statt x in die gegebene Gleichung 1.) substituiren.

---

*) Diese Gleichung 3.) geht auch aus der 2.) hervor, wenn man $\frac{1}{a}$ statt a und u statt z schreibt.

Man erhält dann

$$4)\ A_m v^m + A_{m-1} a v^{m-1} + A_{m-2} a^2 v^{m-2} + \cdots + A_1 a^{m-1} v + a^m = 0$$

für die gesuchte Gleichung.

Setzt man hier $a = 1$, so erhält man

$$5)\ A_m v^m + A_{m-1} v^{m-1} + A_{m-2} v^{m-2} + \cdots + A_1 v + 1 = 0;$$

und die Wurzel-Werthe dieser Gleichung sind bezüglich

$$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma},\ \ldots\ \frac{1}{\mu}\ \text{und}\ \frac{1}{\nu}.$$

Diese letzteren Wurzel-Werthe nennt man die **reciproken** der Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung, und letztere sind natürlich wieder die reciproken der erstern.

IV. Soll eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzel-Werthe von den Wurzel-Werthen der gegebenen Gleichung 1.) bezüglich um a verschieden sind, so setzt man

$$y = x - a, \qquad \text{also} \qquad x = y + a,$$

und substituirt diesen Werth $y + a$ statt x in die gegebene Gleichung 1.). Man erhält dann für die gesuchte Gleichung, wenn die gegebene durch $f_x = 0$ bezeichnet wird, die neue Gleichung $f_{y+a} = 0$, oder $f_{a+y} = 0$, oder $f_{x+y} = 0$, wenn zuletzt a statt x gesetzt wird. Dies giebt also die neue, nach y geordnete Gleichung (nach §. 54. ⊙)

$$6)\ f_x + \partial f_x \cdot y + \frac{\partial^2 f_x}{2!} \cdot y^2 + \frac{\partial^3 f_x}{3!} \cdot y^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\partial^{m-1} f_x}{(m-1)!} \cdot y^{m-1} + \frac{\partial^m f_x}{m!} \cdot y^m = 0,$$

wenn nur zuletzt überall a statt x gesetzt wird.

Dabei ist aber, weil man

$$f_x = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

hat, sogleich

$$\partial f_x = m x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} + \cdots + A_{m-1}$$
$$\partial^2 f_x = m^{2|-1} x^{m-2} + (m-1)^{2|-1} A_1 x^{m-3} + \cdots + 2^{2|-1} A_{m-2}$$
$$\partial^3 f_x = m^{3|-1} x^{m-3} + (m-1)^{3|-1} A_1 x^{m-4} + \cdots + 3^{3|-1} A_{m-3}$$

$$\partial^4 f_x = m^{4I-1} x^{m-4} + (m-1)^{4I-1} A_1 x^{m-5} + \cdots + 4^{4I-1} A_{m-4}$$

$$\vdots$$

$$\partial^{m-1} f_x = m^{m-1I-1} x + (m-1)^{m-1I-1} A_1 = m! x + (m-1)! A_1$$

und

$$\partial^m f_x = m!$$

so daß in der Gleichung 6.) der Koefficient von y^m bloß 1, der von y^{m-1} aber (in so fern a statt x gesetzt werden muß) bloß $ma + A_1$ ist, wie solches auch die direkte Substitution lehrt.

Die Wurzel-Werthe der Gleichung 6.) sind aber bezüglich

$\alpha - a$, $\beta - a$, $\gamma - a$, ⋯ $\mu - a$ und $\nu - a$.

V. Sollten solche bezüglich

$\alpha + a$, $\beta + a$, $\gamma + a$, ⋯ $\mu + a$ und $\nu + a$

werden, so dürfte man in der Gleichung 6.) nur $-a$ statt $+a$, d. h. $-a$ statt x (in 6.) schreiben.

Anmerkung 1. Wenn in einer höhern Gleichung vom m^{ten} Grade der Koefficient von x^{m-1} der Null gleich ist, so daß dieses Glied ganz fehlt, so nennt man solche eine reducirte höhere Gleichung. Man erhält diese reducirte aus der 6.), wenn man $ma + A_1 = 0$ setzt, d. h. wenn man $a = -\frac{A_1}{m}$ nimmt. — Kennt man aber die Wurzel-Werthe y der reducirten Gleichung, so darf man nur zu jedem derselben noch diesen Werth $-\frac{A_1}{m}$ von a addiren, und man hat die Wurzel-Werthe der gegebenen vollständigen Gleichung. Beispiele dazu liefern die §§. 17.), 19.) und 21.). Um nämlich die allgemeinen und vollständigen quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen aufzulösen, wurden sie jedesmal (in den angeführten Paragraphen) in reducirte verwandelt, und dann aus den Wurzel-Werthen der reducirten Gleichung erst die der vollständigen Gleichung abgeleitet.

Anmerkung 2. Man bedient sich dieser Umwandlungen der Gleichungen zu verschiedenen Zwecken, von denen wir hier noch einige hervorheben wollen.

I. Sind nämlich die Koefficienten der Gleichung

$$z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + B_3 z^{m-3} + \cdots + B_{m-1} z + B_m = 0,$$

ganze Zahlen, und ist der Koefficient der höchsten Potenz z^m der Einheit gleich, so kann keiner der reellen Wurzel-Werthe dieser Gleichung eine rationale gebrochene Zahl seyn, sondern diese reellen Wurzel-Werthe sind entweder ganze Zahlen, oder irrationale.

Denn setzt man irgend eine rationale, in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ statt z, so erhält man, wenn mit ν^{m-1} wegmultiplicirt wird,

$$\frac{\mu^m}{\nu} + B_1 \mu^{m-1} + B_2 \mu^{m-2} \nu + B_3 \mu^{m-3} \nu^2 + \cdots$$
$$+ B_{m-1} \mu \nu^{m-2} + B_m \nu^{m-1} = 0,$$

wo alle Glieder ganze Zahlen sind bis auf das erste, welches gebrochen ist, so daß die ganze Summe nie der Null gleich werden kann.

Wählt man daher in §. 100. I.) die Zahl a so, daß, wenn auch A_1, A_2, A_3, $\cdots$ A_m gebrochene Zahlen sind, doch die Koefficienten der neuen Gleichung (§. 100. I. 2.) nur ganze Zahlen werden*), so weiß man, daß die neue Gleichung nur ganze oder irrationale Wurzel-Werthe hat. — Man probirt nun die ganzen Zahlen, positiv und negativ genommen, durch, um diejenigen ε, ε', ε'', $\cdots$ darunter zu finden, welche der Gleichung 2.) wirklich genügen, — dividirt dann die Gleichung durch $(z-\varepsilon)(z-\varepsilon')(z-\varepsilon'')\cdots$ weg, und erhält so die neue Gleichung, welche bloß noch irrationale reelle Wurzel-Werthe, wenn nicht lauter imaginäre, hat.

II. Sollten die Koefficienten A_1, A_3, A_5, A_7, $\cdots$ eine und dieselbe Wurzel z. B. $\sqrt{3}$ als Faktor enthalten, so dürfte man in §. 100. I.) nur $a = \sqrt{3}$ nehmen, und die neue Gleichung §. 100. I. 2.) würde in ihren Koefficienten diese Wurzel nicht mehr enthalten.

---

*) Zu diesem Behufe dürfte man nur statt a den General-Nenner aller Brüche A_1, A_2, A_3, $\cdots$ A_m nehmen. Oft thut es eine noch kleinere Zahl.

III. Setzt man in §. 100. I.) $a = -1$, so ändert die gegebene Gleichung bloß ihre Vorzeichen in den ungeraden Gliedern; und die neue Gleichung hat dann die positiven Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung als negative, und die negativen von jener als positive.

IV. Bei der Umformung §. 100. V.) kann man a positiv und so groß nehmen, daß die neue Gleichung außer den imaginären Wurzel-Werthen nur noch lauter positive Wurzel-Werthe hat. Ob man aber bei irgend einer angenommenen Zahl a diesen Zweck wirklich erreicht habe, muß freilich noch besonders untersucht werden.

§. 101.

Sucht man, wenn die höhere Gleichung vom m^{ten} Grade

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

gegeben ist, deren m Wurzel-Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu$ und ν nicht bekannt sind, — eine neue Gleichung in z, deren Wurzel-Werthe die Summe je zweier Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung sind, — so bildet man sich aus den m unbekannten, aber durch $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ bezeichneten Wurzel-Werthen, diese Summen, deren Anzahl $\frac{m(m-1)}{2}$ ist, und dann die Faktoren

$$z-(\alpha+\beta),\ z-(\alpha+\gamma),\ \cdots\ z-(\alpha+\nu),\ z-(\beta+\gamma),\ \cdots$$
$$z-(\beta+\nu)\ \cdots\ \text{zuletzt}\ z-(\mu+\nu). \text{ —}$$

Hiernach multiplicirt man diese $\frac{m(m-1)}{2}$ Faktoren mit einander; und man wird, für die einzelnen Koefficienten der verschiedenen Potenzen von z, offenbar lauter symmetrische Zusammensetzungen aus den m Wurzel-Werthen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu$ und ν erhalten. Diese lassen sich dann allemal in $A_1, A_2, A_3, \cdots A_m$ (weil letztere alle elementaren symmetrischen Zusammensetzungen aus denselben Wurzel-Werthen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ sind) und zwar bloß mittelst der vier elementaren Operationen (darunter Produkte gleicher Faktoren, also ganze Potenzen) ausdrücken.

Und wird zuletzt das Produkt der Null gleich gesetzt, so hat man die gesuchte höhere Gleichung, welche vom $\frac{m(m-1)}{2}$ten Grade seyn wird.

Wir wollen diese Rechnungen bloß für $m=3$ durchführen. — Es sey nämlich

1) $x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0$

eine gegebene kubische Gleichung, deren drei Wurzel-Werthe α, β, γ unbekannt sind. Bildet man nun die Gleichung

2) $[z-(\alpha+\beta)]\cdot[z-(\alpha+\gamma)]\cdot[z-(\beta+\gamma)]=0,$

so wird solche, wenn man wirklich multiplicirt,

3) $z^3-2(\alpha+\beta+\gamma)z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma))\cdot z$
$+(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma)=0.$

Nun ist aber (nach §. 99.)

4) $\alpha+\beta+\gamma=-A_1$; 5) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=A_2$ und 6) $\alpha\beta\gamma=-A_3$.

Quadrirt man die 4.) und addirt man die 5.), so ergiebt sich der Koefficient von z in 3.), $=A_1^2+A_2$. — Multiplicirt man aber die 4.) mit der 5.), so erhält man den letztern Koefficienten in 3.), sobald man noch die Gleichung 6.) subtrahirt; daher wird solcher $=-A_1\cdot A_2+A_3$. — Die Gleichung 3.) wird daher jetzt

7) $z^3+2A_1\cdot z^2+(A_1^2+A_2)\cdot z+(A_3-A_1\cdot A_2)=0,$

und diese hat die drei Wurzel-Werthe

$\alpha+\beta,\quad \alpha+\gamma,\quad \beta+\gamma$ *).

Anmerkung. Sollte eine Gleichung zu Wurzel-Werthen die **Differenz** je zweier der m Wurzel-Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ der gegebenen Gleichung

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\cdots+A_{m-1}x+A_m=0$$

erhalten, so bekommt sie $m(m-1)$ Faktoren, also doppelt so viele als in der vorhergehenden Aufgabe, nämlich neben dem Faktor $z-(\alpha-\beta)$ auch noch den Faktor $z-(\beta-\alpha)$. — Weil aber diese beiden Faktoren, mit einander multiplicirt, $z^2-(\alpha-\beta)^2$ oder $u-(\alpha-\beta)^2$ geben, wenn man z^2 durch u bezeichnet, so wird die neue Gleichung in u doch wiederum nur vom

*) Diese gesuchte Gleichung wurde wieder vom 3ten Grade. Wäre aber die gegebene Gleichung (in x) vom 4ten Grade gewesen, so wäre die neue Gleichung (in z) vom $\frac{4\cdot 3}{2}$ d. h. vom 6ten Grade geworden. — Und wäre die gegebene Gleichung (in x) vom 7ten Grade gewesen, so wäre die neue Gleichung (in z) vom 21ten Grade geworden.

$\frac{m(m-1)}{2}$ten Grade, obgleich die in z vom doppelt so hohen Grade ist, aber nur gerade Potenzen von z enthält. — Das weitere Verfahren ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Und es ist nun nicht schwer zu erkennen, wie man verfahren müsse, um eine neue Gleichung in z zu finden, welche eine ganz beliebige Zusammensetzung aus je zwei, je drei, je vier etc. etc. der Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung zu Wurzel-Werthen hat. — Man bildet sich die Faktoren; man multiplicirt, d. h. man verwandelt das Produkt in eine ganze Funktion von z; die Koefficienten dieser ganzen Funktion sind symmetrische Zusammensetzungen aus den m Wurzel-Werthen α, β, $\gamma \cdots \mu$, ν und lassen sich daher allemal in die Koefficienten der gegebenen Gleichung A_1, A_2, $\cdots A_m$ (weil letztere die elementaren symmetrischen Zusammensetzungen aus denselben Wurzel-Werthen sind) ausdrücken, ohne daß man die Wurzel-Werthe selbst zu kennen braucht.

Das schwierigste Geschäft dabei ist das letztere; deshalb hat man sich mit den symmetrischen Funktionen (d. h. symmetrischen Zusammensetzungen) vielfach beschäftigt und Lehrsätze festgestellt, aus denen die Möglichkeit und die Art der Ausführung dieser Umformungen zugleich hervorgeht. Wir verweisen den geneigten Leser auf den II. Th. d. „Systems d. Mathem.“ wo diesen Funktionen ein eigenes Kapitel gewidmet ist, unterlassen aber hier jede weitere Betrachtung derselben, weil das Ganze mehr Gegenstand theoretischer Spekulationen als der eines praktischen Nutzens ist. Wir begnügen uns einen einzigen Lehrsatz herauszuheben, welcher der Newton'sche genannt wird, und welcher hier unmittelbar folgt.

§. 102.

Der Newton'sche Lehrsatz von den Potenz-Summen der Wurzel-Werthe.

Sind α, β, $\gamma \cdots \mu$, ν die m Wurzel-Werthe einer gegebenen Gleichung vom m^{ten} Grade

1) $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0,$

und bezeichnet man, wenn r irgend eine positive ganze Zahl vorstellt, die Potenz-Summe

2) $\alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \cdots + \mu^r + \nu^r$ durch S_r

so daß S_1 die bloße Summe der m Wurzel-Werthe, S_2 die Summe ihrer Quadrate u. s. w. f. vorstellt, so finden folgende Gleichungen statt:

$$3)\quad \begin{cases} S_1 + A_1 = 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0 \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0 \\ S_4 + A_1 S_3 + A_2 S_2 + A_3 \cdot S_1 + 4A_4 = 0 \end{cases}$$

und allgemein, wenn n positiv ganz und entweder gleich oder kleiner als m ist

$$\text{I. } S_n + A_1 \cdot S_{n-1} + A_2 \cdot S_{n-2} + A_3 \cdot S_{n-3} + \cdots + A_{n-1} \cdot S_1 + nA_n = 0.$$

Und die folgende Gleichung

$$\text{II. } S_n + A_1 S_{n-1} + A_2 S_{n-2} + A_3 S_{n-3} + \cdots + A_{m-1} S_{n-m+1} + A_m S_{n-m} = 0$$

gilt, man mag n gleich, kleiner oder größer als m nehmen, wenn nur ganz. Es enthält aber diese Gleichung II.), so oft $n < m$ gedacht wird, auch Summen negativer Potenzen der Wurzel-Werthe *).

Und zieht man in dem Falle, wo $n < m$, etwa $n + \mu = m$ ist, die Gleichung I.) von der Gleichung II.) ab, so bleibt, weil $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + \cdots + \mu^0 + \nu^0$ d. h. weil $S_0 = m$ ist,

$$\text{III. } \mu \cdot A_n + A_{n+1} \cdot S_{-1} + A_{n+2} \cdot S_{-2} + \cdots + A_m \cdot S_{-\mu} = 0.$$

Mittelst dieser Sätze kann man nun sehr leicht die Summen der Potenzen der Wurzel-Werthe in die Koefficienten der höhern Gleichung ausdrücken.

---

*) Bei der Anwendung dieser Formel II.) muß man ferner nicht übersehen, daß S_0 die Summe der nullten Potenzen der m Wurzel-Werthe $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu, \nu$ vorstellt, daß also

$$S_0 = m$$

ist.

Beweisen wir den Satz für den Fall wo $m=5$ ist. Man hat dann

$$f_x=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon);$$

folglich (nach Anmerkung zu §. 55.)

$$1') \qquad \partial f_x=\frac{f_x}{x-\alpha}+\frac{f_x}{x-\beta}+\frac{f_x}{x-\gamma}+\frac{f_x}{x-\delta}+\frac{f_x}{x-\varepsilon}.$$

Nun ist aber (wenn man das Verfahren §. 18. oder das der Note zu §. 98. anwendet)

$$\frac{f_x}{x-\alpha}=x^4+\left|\begin{matrix}\alpha\\+A_1\end{matrix}\right|x^3+\left|\begin{matrix}\alpha^2\\+A_1\alpha\\+A_2\end{matrix}\right|x^2+\left|\begin{matrix}\alpha^3\\+A_1\alpha^2\\+A_2\alpha\\+A_3\end{matrix}\right|x+\left|\begin{matrix}\alpha^4\\+A_1\alpha^3\\+A_2\alpha^2\\+A_3\alpha\\+A_4\end{matrix}\right|=0.$$

Setzt man in dieser Gleichung nach und nach β, γ, δ, ε statt α, und addirt man alle fünf Gleichungen, so erhält man zur Linken (nach 1'.) ∂f_x, also

$$2') \qquad \partial f_x=5x^4+\left|\begin{matrix}S_1\\+5A_1\end{matrix}\right|x^3+\left|\begin{matrix}S_2\\+A_1S_1\\+5A_2\end{matrix}\right|x^2+\left|\begin{matrix}S_3\\+A_1S_2\\+A_2S_1\\+5A_3\end{matrix}\right|x+\left|\begin{matrix}S_4\\+A_1S_3\\+A_2S_2\\+A_3S_1\\+5A_4\end{matrix}\right|.$$

Nimmt man aber aus

$$f_x=x^5+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5$$

∂f_x direckt (nach §. 54.), so erhält man

$$3') \qquad \partial f_x=5x^4+4A_1x^3+3A_2x^2+2A_3x+A_4.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen 2'.) und 3'.) von einander, so ergiebt sich

$$4') \qquad 0=\left|\begin{matrix}S_1\\+A_1\end{matrix}\right|x^3+\left|\begin{matrix}S_2\\+A_1S_1\\+2A_2\end{matrix}\right|x^2+\left|\begin{matrix}S_3\\+A_1S_2\\+A_2S_1\\+3A_3\end{matrix}\right|x+\left|\begin{matrix}S_4\\+A_1S_3\\+A_2S_2\\+A_3S_1\\+4A_4\end{matrix}\right|.$$

Und da diese Gleichung für jeden Werth von x statt finden muß, so müssen rechts die einzelnen Koefficienten der Null gleich seyn; und so sehen sich die Nummern 3.) und dann allgemein auch die I.) erwiesen, weil es leicht ist, diesen Beweis für jede ganze Zahl m geltend zu machen.

Multiplicirt man aber die Gleichung 1.) mit x^r, so erhält man

$$x^{m+r}+A_1x^{m+r-1}+A_2x^{m+r-2}+\cdots+A_{m-1}x^{r+1}+A_mx^r=0,$$

Setzt man dann hier statt x nach und nach alle m Wurzel-Werthe α, β, $\gamma\cdots\mu$, ν, und addirt man die m entstehenden Gleichungen, so erhält man, wenn $m+r=n$ gesetzt und dabei r positiv, negativ oder der Null gleich gedacht wird, sogleich die Gleichung II.).

vorstellt. Man behauptet: Wenn man alle unendlich-vielen Werthe α, β, γ, δ, ε etc. etc. hat, welche diese Reihe f_x, wenn sie statt x gesetzt werden, der Null gleich macht, so müsse sich f_x in ein Produkt von unendlich-vielen Faktoren zerlegen lassen, nämlich

$$f_x = A_0\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

So plausibel dies aber seyn mag, so unwahr ist es doch im Allgemeinen, und dürfte höchstens nur von den Reihen nach x wahr seyn, welche für jeden reellen oder imaginären Werth von x, der die Form $p+q\cdot i$ hat, convergent sind. — Und in den Fällen, wo der Satz wahr seyn mag, ist er doch nur dann anzuwenden, wenn man überzeugt ist, alle (unendlich-vielen) Wurzel-Werthe von $f_x = 0$ wirklich zu haben, welche Ueberzeugung nicht immer leicht zu erlangen seyn dürfte.

Namentlich zerlegt man auf solche Weise die Sinus- und Kosinus-Reihen in Produkte von unendlich-vielen Faktoren; nämlich

$$1)\ \sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

$$= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots \text{ in inf.;}$$

$$2)\ \cos x = \left(1-\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{5}{2}\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\frac{5}{2}\pi}\right)\cdots$$

$$= \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

Alle Folgerungen, die man bis jetzt aus diesen beiden Zerlegungen gezogen hat, lassen sich auch auf anderen Wegen erhalten, und dies spricht mehr als alles Uebrige für die Richtigkeit dieser beiden Zerlegungen.

§. 100.

Ohne die Wurzel-Werthe α, β, γ, $\delta \cdots \mu$, ν einer höhern Gleichung vom m^{ten} Grade

$$1)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

zu

zu kennen, kann man doch aus ihr leicht neue Gleichungen bilden, deren Wurzel-Werthe das a fache, oder der a^{te} Theil der Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung 1.) sind, oder deren Wurzel-Werthe alle um a größer oder kleiner sind als bezüglich die Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung.

I. Setzt man nämlich $z = ax$, also $x = \frac{z}{a}$ und substituirt man diesen Werth $\frac{z}{a}$ statt x in die gegebene Gleichung 1.), so erhält man, wenn noch mit a^m wegmultiplicirt wird,

$$2)\ z^m + A_1 a z^{m-1} + A_2 a^2 z^{m-2} + \cdots A_{m-1} a^{m-1} z + A_m a^m = 0;$$

und die Wurzel-Werthe dieser Gleichung 2.) sind bezüglich

$$a\alpha,\ a\beta,\ a\gamma,\ \cdots\ a\mu \text{ und } a\nu.$$

II. Setzt man aber $u = \frac{x}{a}$, also $x = au$, und substituirt man diesen Werth au statt x in die gegebene Gleichung 1.), so erhält man

$$3)\ u^m + \frac{A_1}{a} \cdot u^{m-1} + \frac{A_2}{a^2} \cdot u^{m-2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{a^{m-1}} \cdot u + \frac{A_m}{a^m} = 0\text{*)};$$

und die Wurzel-Werthe dieser Gleichung sind bezüglich

$$\frac{\alpha}{a},\ \frac{\beta}{a},\ \frac{\gamma}{a},\ \cdots\ \frac{\mu}{a} \text{ und } \frac{\nu}{a}.$$

III. Sollte aber eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzel-Werthe bezüglich

$$\frac{a}{\alpha},\ \frac{a}{\beta},\ \frac{a}{\gamma},\ \cdots\ \frac{a}{\mu} \text{ und } \frac{a}{\nu}$$

sind, so dürfte man nur $v = \frac{a}{x}$, also $x = \frac{a}{v}$ setzen, und diesen Werth $\frac{a}{v}$ statt x in die gegebene Gleichung 1.) substituiren.

---

*) Diese Gleichung 3.) geht auch aus der 2.) hervor, wenn man $\frac{1}{a}$ statt a und u statt z schreibt.

Werthe von p und q, ebenfalls interessante Resultate, welche wir jedoch hier der Kürze wegen nicht weiter verfolgen wollen.

§. 103.

Eine ganze Funktion φ_x heißt ein Theiler von einer andern f_x, wenn der Quotient $\frac{f_x}{\varphi_x}$ selbst wieder in eine ganze Funktion von x verwandelt werden kann (so daß kein Rest bleibt); sie heißt ein **gemeinschaftlicher Theiler** zweier andern ganzen Funktionen f_x und f'_x, wenn man mit ihr in jede dieser beiden zugleich ohne Rest dividiren kann, so daß die Quotienten in ganze Funktionen von x wieder übergehen; sie heißt endlich der **größeste gemeinschaftliche Theiler** von f_x und f'_x, wenn es keine ganze Funktion eines höhern Grades giebt, welche dieselbe Eigenschaft hat, d. h. welche f_x und f'_x zugleich ohne Rest theilt.

Der größeste gemeinschaftliche Theiler zweier ganzen Funktionen f_x und f'_x wird aber genau nach denselben Prinzipien gefunden, wie man in den Elementen (Lehrbuch für d. gesammten mathem. Elem.-Unterricht 2te Aufl. §. 49.) den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier ganzen Zahlen sucht. Man dividirt nämlich mit der einen in die andere (nachdem man sie vorher beide nach fallenden Potenzen von x geordnet hat), bis man im Quotienten eine ganze Funktion von x und dazu einen Rest erhalten hat, der wiederum eine ganze Funktion von x ist, aber von einem niedrigern Grade als der Divisor. — Dann dividirt man mit diesem Reste in den Divisor; mit dem neuen Reste in den neuen Divisor, u. s. w. f., bis zuletzt die Division aufgeht. — Der letzte Divisor ist dann der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler.

Es tritt aber hier gegen jenes Verfahren noch der Unterschied ein, daß wenn φ_x ein Theiler von f_x ist, dann diese Funktion φ_x noch mit jeder beliebigen constanten (von x unabhän-

gigen) Zahl multiplicirt (oder dividirt) werden kann, ohne die Eigenschaft des Theilers, und daher auch ohne die Eigenschaft des größten gemeinschaftlichen Theilers zu verlieren. Deshalb kann man bei diesem Auffinden des größten gemeinschaftlichen Theilers, jeden der einzelnen Divisoren (die unmittelbar vorher Reste gewesen sind) als auch jeden der einzelnen Dividenden (die unmittelbar vorher Divisoren gewesen sind) mit einer constanten Zahl multipliciren (oder dividiren), und diese selbst gewissen Zwecken gemäß nehmen, etwa so daß keine gebrochenen, sondern nur ganze Zahlen als Koefficienten in Rechnung kommen. — So könnte man also auch z. B. jeden einzelnen der Divisoren, unmittelbar vorher, ehe man mit ihm dividirt, mit —1 multipliciren, d. h. alle seine Glieder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nehmen, und dadurch würde das Geschäft des Auffindens des größten gemeinschaftlichen Theilers nicht gehindert, sondern der letzte Divisor, bei welchem die Division aufgeht, so daß kein Rest mehr bleibt, wäre ein solcher.

Und bleibt immer noch ein Rest, so daß der letzte Rest constant und von x unabhängig wird, so ist dieses ein Beweis, daß dasmal die beiden ganzen Funktionen f_x und f'_x keinen solchen gemeinschaftlichen Theiler haben.

§. 104.

1) Hat F_x den Faktor $(x-\alpha)^m$, so hat ∂F_x allemal den Faktor $(x-\alpha)^{m-1}$. — Und umgekehrt hat ∂F_x den Faktor $(x-\beta)^n$, so hat F_x den Faktor $(x-\beta)^{n+1}$.

Ist nämlich

$$F_x = (x-\alpha)^m \cdot \varphi_x,$$

so ist (nach §. 55. II.)

$$\partial F_x = (x-\alpha)^m \cdot \partial\varphi_x + \varphi_x \cdot \partial((x-\alpha)^m)_x.$$

Es ist aber (nach §. 56. V.). wenn $x-\alpha = z$ gesetzt wird,

$$\partial((x-\alpha)^m)_x = m(x-\alpha)^{m-1};$$

folglich ist, wenn man dies in die vorhergehende Gleichung substituirt,

$$\partial F_x = (x-\alpha)^m \cdot \partial\varphi_x + m(x-\alpha)^{m-1} \cdot \varphi_x;$$

und so steht sich unsere Behauptung außer Zweifel gesetzt.

2) Hat daher F_x den Faktor $(x-\alpha)^m(x-\beta)^n(x-\gamma)^p \cdots$, so hat ∂F_x den Faktor $(x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n-1}(x-\gamma)^{p-1} \cdots$; und aus demselben Grunde hat dann $\partial^2 F_x$ den Faktor $(x-\alpha)^{m-2}(x-\beta)^{n-2}(x-\gamma)^{p-2} \cdots$, und $\partial^3 F_x$ den Faktor $(x-\alpha)^{m-3}(x-\beta)^{n-3}(x-\gamma)^{p-3} \cdots$; u. s. w. f.

3) Und haben F_x und ∂F_x keinen gemeinschaftlichen Theiler, so hat die Gleichung $F_x = 0$ lauter ungleiche Wurzel-Werthe.

4) Haben aber F_x und ∂F_x einen gemeinschaftlichen Theiler φ_x, so läßt sich dieser durch $(x-\alpha)^\mu \cdot (x-\beta)^\nu \cdot (x-\gamma)^\varrho \cdots$ ausdrücken, wo μ, ν, ϱ, etc. etc. positive ganze Zahlen oder die Einheit oder die Null vorstellen; und dann hat $F_x = 0$ gleiche (vielfache) Wurzel-Werthe und zwar $(\mu+1)$ mal den Wurzel-Werth α, und $(\nu+1)$ mal den Wurzel-Werth β, und $(\varrho+1)$ mal den Wurzel-Werth γ; u. s. f. — Und dividirt man mit φ_x in F_x und wird der Quotient durch F'_x bezeichnet, so daß man $F_x = \varphi_x \cdot F'_x$ hat, so enthalten die beiden Gleichungen

$$\varphi_x = 0 \quad \text{und} \quad F'_x = 0$$

genau alle Wurzel-Werthe von $F_x = 0$; die zweite dieser Gleichungen $F'_x = 0$ hat aber lauter ungleiche Wurzel-Werthe, und außer diesen, welche der $F'_x = 0$ genügen, giebt es keinen andern, welcher der gegebenen $F_x = 0$ genügte, nur daß letztere Gleichung mehrere gleiche Wurzel-Werthe enthält.

Auf diese Weise sondert man also bequem alle Wurzel-Werthe ab, deren Berechnung wünschenswerth bleibt*), so daß man zuletzt nur noch die Wurzel-Werthe der Gleichung $F'_x = 0$ zu suchen braucht.

---

*) Es giebt auch ein Verfahren, wodurch man alle einfachen, alle doppelten, alle dreifachen u. s. w. Wurzel-Werthe einzeln und jedesmal als einfache Wurzel-Werthe einer neuen Gleichung absondert, welches sich ganz auf die oben stehenden Sätze stützt. Man sehe deshalb das „Syst. d. Mathem." 2ter Theil, 2te Aufl. pag. 132.

Zweite Abtheilung.

Eigenschaften der höhern Gleichungen mit reellen Koefficienten.

§. 105.

Hat eine höhere Gleichung mit reellen Koefficienten den imaginären Wurzel-Werth $p+q\cdot i$, so hat sie auch allemal den imaginären Wurzel-Werth $p-q\cdot i$, wo p und q dieselben reellen Werthe haben.

Denn findet man r und φ, so daß $p\pm q\cdot i = r\cdot(\cos\varphi \pm i\cdot \sin\varphi)$ wird, und substituirt man diesen Werth statt x in

$$f_x = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m,$$

so erhält man, wegen der reellen Koefficienten,

$$f_x = \begin{cases} r^m\cdot\cos m\varphi + A_1\cdot r^{m-1}\cdot\cos(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1}\cdot r\cdot\cos\varphi + A_m \\ \pm i\cdot(r^m\cdot\sin m\varphi + A_1\cdot r^{m-1}\cdot\sin(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1}\cdot r\cdot\sin\varphi). \end{cases}$$

Weil aber alle Glieder (in beiden endlichen Reihen nach r) reell sind, so wird dieser Ausdruck zur Rechten (nach §. 18.) nicht der Null gleich, wenn nicht jede Zeile für sich der Null gleich ist. Folglich wird f_x nothwendig der Null gleich, wenn $p-q\cdot i$ statt x gesetzt wird, so oft f_x der Null gleich geworden ist, wenn $p+q\cdot i$ statt x gesetzt wurde.

§. 106.

Hieraus folgt:

1) Hat eine höhere Gleichung mit lauter reellen Koefficienten imaginäre Wurzel-Werthe, so hat sie solche immer paarweise.

2) Eine Gleichung vom ungeraden Grade mit lauter reellen Koefficienten hat daher immer wenigstens einen reellen Wurzel-Werth.

Solches folgt unmittelbar aus N. 1.). — Man kann aber auch so schließen: Für $x=+\infty$ wird f_x positiv; für $x=-\infty$ wird f_x negativ (weil die höchste Potenz von x eine ungerade ist); folglich muß zwischen $+\infty$ und $-\infty$ ein (reeller) Werth von x liegen, der f_x zu Null macht (Vgl. §§. 58. 59.) *).

---

*) Ist die Gleichung von einem geraden Grade, während sie lauter reelle Koefficienten hat, und ist ihr letztes Glied A_m (ohne x) negativ,

3) Läßt sich eine ganze Funktion f_x mit lauter reellen Koefficienten nicht in lauter reelle einfache Faktoren zerlegen (d. h. nicht in lauter Faktoren von der Form $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, etc. etc. wo α, β, γ, etc. etc. reell sind) — so läßt sie sich doch in lauter reelle doppelte Faktoren zerlegen, weil, wenn $x-(p+q\cdot i)$ mit $x-(p-q\cdot i)$ multiplicirt wird, allemal der reelle Doppel-Faktor $x^2-2px+(p^2+q^2)$ hervorgeht. — Giebt man den Wurzel-Werthen $p\pm q\cdot i$ die Form $r\cdot(\cos\varphi\pm i\cdot\sin\varphi)$ so nimmt der Doppel-Faktor noch die Form $x^2-2rx\cdot\cos\varphi+r^2$ an.

§. 107.

I. Soll x^m-a^m, wo a positiv gedacht ist, in seine reellen einfachen oder doppelten Faktoren zerlegt werden, so sucht man zuerst alle m Werthe $x=a\cdot\sqrt[m]{1}$, welche solche der Null gleich machen, und nimmt dann (nach §. 98.) die m einfachen reellen oder imaginären Faktoren

$$x-a\cdot\sqrt[m]{1}$$

d. h.

$$x-a\left(\cos\frac{2b\pi}{m}\pm i\cdot\sin\frac{2b\pi}{m}\right),$$

wo statt b nach und nach 0, 1, 2, 3, ⋯ bis $\frac{m-1}{2}$ oder bis $\frac{m}{2}$ gesetzt wird, während man für jedes b einmal das +, dann auch das — Zeichen nimmt.

Für

---

so hat f_x mindestens zwei reelle Wurzel-Werthe, von denen einer positiv, der andere negativ ist.

Denn es wird f_x positiv für $x=+\infty$ und negativ für $x=0$; also liegt zwischen $+\infty$ und 0 ein (positiver) Werth von x, der $f_x=0$ macht. — Ferner wird f_x negativ für $x=0$ und positiv für $x=-\infty$; folglich liegt zwischen 0 und $-\infty$ ein (negativer) Werth von x, welcher $f_x=0$ macht.

Für $b=0$ erhält man den reellen einfachen Faktor

1) $x-a$.

Für $b=1$ erhält man die beiden einfachen und imaginären Faktoren

$$x-a\left(cos\frac{2\pi}{m}+i\cdot sin\frac{2\pi}{m}\right) \text{ und } x-a\left(cos\frac{2\pi}{m}-i\cdot sin\frac{2\pi}{m}\right).$$

Diese beiden mit einander multiplicirt geben aber den reellen doppelten Faktor

2) $$x^2-2a\cdot cos\frac{2\pi}{m}+a^2.$$

Für $b=2$ erhält man den doppelten Faktor

3) $$x^2-2a\cdot cos\frac{4\pi}{m}+a^2.$$

So ergeben sich nach und nach die reellen doppelten Faktoren

4) $$x^2-2a\cdot cos\frac{6\pi}{m}+a^2,$$

5) $$x^2-2a\cdot cos\frac{8\pi}{m}+a^2; \text{ — u. s. w. f.}$$

Ist nun m ungerade, so erhält man für $b=\frac{m-1}{2}$ den letzten doppelten Faktor

6) $$x^2-2a\cdot cos\frac{(m-1)\pi}{m}+a^2.$$

Ist aber m gerade, so erhält man für $b=\frac{m}{2}$, weil dann $cos\frac{2b\pi}{m}=cos\,\pi=-1$ und $sin\frac{2b\pi}{m}=sin\,\pi=0$ wird, einen letzten reellen einfachen Faktor, nämlich

6') $x+a$.

Alle diese Faktoren 1.), 2.), 3.), 4.), 5.), etc. etc. u. 6.) oder 6'.) mit einander multiplicirt, geben dann x^m-a^m.

II. Soll aber x^m+a^m in seine reellen einfachen oder doppelten Faktoren zerlegt werden, so sucht man wieder zuerst die m Werthe, welche x^m+a^m zu Null machen, und welche

$a\cdot\sqrt[m]{-1}$ oder $a\left(\cos\frac{(2b+1)\pi}{m}\pm i\cdot\sin\frac{(2b+1)\pi}{m}\right)$ sind, wo statt b nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots$ bis $\frac{m-1}{2}$ oder bis $\frac{m-2}{2}$ gesetzt wird; und man hat dann die m reellen oder imaginären Faktoren von x^m+a^m ausgedrückt durch

$$x-a\left(\cos\frac{(2b+1)\pi}{m}\pm i\cdot\sin\frac{(2b+1)\pi}{m}\right).$$

Für $b=0$ erhält man hieraus den doppelten reellen Faktor

$$1)\qquad x^2-2a\cdot\cos\frac{\pi}{m}+a^2.$$

Für $b=1, 2, 3,$ etc. etc. erhält man ferner die doppelten Faktoren

$$2)\qquad x^2-2a\cdot\cos\frac{3\pi}{m}+a^2;$$

$$3)\qquad x^2-2a\cdot\cos\frac{5\pi}{m}+a^2;$$

$$4)\qquad x^2-2a\cdot\cos\frac{7\pi}{m}+a^2;$$ — u. s. w. f.

Ist nun m ungerade, so nimmt man zuletzt noch $b=\frac{m-1}{2}$. Dann wird aber $\frac{(2b+1)\pi}{m}=\pi$; also ergiebt sich dann noch zuletzt der reelle einfache Faktor

$$5)\qquad x+a.$$

Ist aber m gerade, so wird zuletzt $b=\frac{m-2}{2}$ und $\frac{(2b+1)\pi}{m}=\frac{(m-1)\pi}{m}$ und man erhält den letzten doppelten Faktor

$$5')\qquad x^2-2a\cdot\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+a^2.$$

Alle diese Faktoren 1.), 2.), 3.), 4.), etc. etc. und 5.) oder 5'.) mit einander multiplicirt, geben nun das Produkt x^m+a^m.

III. Soll der Ausdruck

$$x^{2m}-2a^m.x^m\cos\varphi+a^{2m}$$

in seine einfachen oder doppelten reellen Faktoren zerlegt werden, so beginnt man wieder damit, daß man die 2m Wurzel-Werthe der Gleichung

$$x^{2m} - 2a^m \cdot x^m \cdot \cos\varphi + a^{2m} = 0$$

aufsucht. Man erhält

$$x^m = a^m \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi),$$

also $$x = a \cdot \sqrt[m]{(\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi)},$$

d. h. $$x = a \cdot \left(\cos\frac{2\nu\pi + \varphi}{m} \pm i \cdot \sin\frac{2\nu\pi + \varphi}{m}\right);$$

und die gesuchten reellen doppelten Faktoren des obigen Ausdrucks sind daher

$$x^2 - 2a \cdot \cos\frac{2\nu\pi + \varphi}{m} + a^2 \text{ *)},$$

wo man nur statt ν nach und nach 0, 1, 2, 3, ... bis $m-1$ zu setzen braucht, um alle m reellen doppelten Faktoren zu haben, die dann mit einander multiplicirt, den obigen Ausdruck

$$x^{2m} - 2a^m \cdot x^m \cdot \cos\varphi + a^{2m}$$

wieder geben.

Anmerkung. Die Nummern I.) und II.) bilden das sogenannte „Theorem des Cotes"; die Nummer III.) enthält dagegen die von Moivre dazu gegebene Erweiterung.

Dritte Abtheilung.

Numerische Berechnung der Wurzel-Werthe einer numerischen Gleichung.

Vorerinnerung.

Wir denken uns nun eine Gleichung, welche nicht bloß reelle, sondern auch wirklich gegebene und in Ziffern ausgedrückte Koefficienten hat. Eine

---

*) Die einfachen imaginären Faktoren sind nämlich ausgedrückt durch $x - a\left(\cos\frac{2\nu\pi + \varphi}{m} \pm i \cdot \sin\frac{2\nu\pi + \varphi}{m}\right)$. Nimmt man aber diese beiden imaginären einfachen Faktoren für irgend einen bestimmten Werth von ν und multiplicirt man solche mit einander, so erhält man den gedachten reellen Doppel-Faktor.

solche Gleichung nennt man eine numerische, und wir stellen nun Sätze hin, welche zur systematischen Auffindung ihrer Wurzel-Werthe dienen.

§. 108.

Sturm's Verfahren zur Auffindung der Anzahl der reellen Wurzeln, welche eine gegebene numerische Gleichung $f_x = 0$ hat, und der Grenzen, zwischen denen eine jede einzeln liegen muß.

Um zu finden, wie viel reelle und wie viel imaginäre Wurzel-Werthe eine gegebene numerische Gleichung $f_x = 0$ vom m^{ten} Grade hat, verfährt man nach Sturm*) auf folgende Weise, wobei wir voraussetzen, daß $f_x = 0$ lauter ungleiche Wurzel-Werthe habe:

1) Man bildet aus f_x zunächst ∂f_x, welches wir hier durch f_1 bezeichnen wollen, so wie f_x selbst schlechtweg durch f bezeichnet werden mag.

2) Man verfährt genau so, wie wenn man zwischen f und f_1 den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen wollte (§. 103.), jedoch mit der Vorsicht, daß man jeden einzelnen der Reste (d. h. jedes Glied desselben) vorher mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt, ehe man ihn als neuen Divisor verwendet. Wir wollen alle diese, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Reste bezüglich durch f_2, f_3, f_4, $\cdots$ f_m bezeichnen, so ist, wenn f vom m^{ten} Grade vorausgesetzt wird, f_1 vom $(m-1)^{ten}$, f_2 vom $(m-2)^{ten}$, $\cdots$ f_r vom $(m-r)^{ten}$, $\cdots$ f_{m-1} vom 1ten Grade und f_m selbst constant (nach x) oder vom 0ten Grade.

3) Man schreibt nun diese Funktionen der Ordnung nach so neben einander hin, wie das nachstehende Schema zeigt:

$$(\odot) \cdots \quad f, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad f_4, \cdots f_{m-1}, \quad f_m;$$

setzt in jede $x = -\infty$, $x = 0$ und $x = +\infty$, und bestimmt die Vorzeichen ($+$ oder $-$), welche die Werthe dieser $m+1$ Funktionen für jeden dieser drei Werthe von x an-

*) Bulletin des sciences math., phys. et chim. T. II. pag. 419. Die Abhandlung Sturm's selbst, wovon das Bulletin einen Auszug liefert, wurde der Akademie d. Wiss. zu Paris im Jahre 1829 vorgelegt.

nehmen *). Diese Vorzeichen schreibt man unter die Funktionen hin, etwa so

	f,	f_1,	f_2,	f_3,	f_4,	f_5,	f_6,	f_7,	f_8	W
für $x = -\infty$, ...	+,	+,	−,	+,	−,	−,	+,	−,	−	6
für $x = 0$, ...	−,	−,	+,	−,	+,	+,	−,	+,	+	5
für $x = +\infty$, ...	+,	+,	+,	+,	+,	+,	+,	+,	+	0

4) Hierauf zählt man, wie viel Abwechselungen **) in jeder dieser drei Reihen von Zeichen vorkommen. (In vorliegendem Schema hat die erste Reihe 6 Abwechselungen, die zweite deren 5, und die dritte gar keine Abwechselung, welche letztere Zahl durch 0 ausgedrückt werden muß. Diese Zahlen stehen hier im Schema zur Rechten unter dem Buchstaben W.) — Der Unterschied dieser Zahlen in der ersten und dritten Reihe drückt die Anzahl aller reellen Wurzel-Werthe aus, welche die Gleichung hat. (Dieser ist hier 6 — 0 oder 6, also hat diese Gleichung 6 reelle Wurzel-Werthe.) — Der Unterschied dieser Zahlen in der ersten und zweiten Reihe drückt die Anzahl der negativen Wurzel-Werthe aus. (Nach unserm Schema hätte demnach unsere Gleichung nur einen einzigen negativen Wurzel-Werth.) — Der Unterschied dieser Zahlen in der zweiten und dritten Reihe drückt die Anzahl der positiven Wurzel-Werthe aus. (Nach unserem Schema hätte also unsere Gleichung 5 positive Wurzel-Werthe.) — Zieht man endlich die Anzahl aller reellen Wurzel-Werthe von der Zahl m, welche den Grad der Gleichung bezeichnet, ab, so bleibt die Anzahl der imaginären Wurzel-

*) Für $x = -\infty$ werden die Werthe von f_r positiv oder negativ, je nachdem das Glied mit der höchsten Potenz von x (in f_r) positiv oder negativ wird. — Dasselbe gilt für $x = +\infty$. — Für $x = 0$ dagegen verschwinden alle mit x behafteten Glieder und es kommt daher alles auf das constante Glied an.

**) Wenn auf + wieder +, oder auf − wieder − kommt, so nennt man dies eine Folge der Zeichen, oder schlechtweg eine Folge. Wenn aber auf + ein − folgt, oder auf − ein + folgt, so wird dies eine Abwechselung der Zeichen, oder schlechtweg eine Abwechselung genannt.

Werthe, welche die Gleichung hat. (Nach unserem Schema ist die Gleichung vom 8ten Grade gewesen, weil sie bis zu dem constanten Reste $-f_8$ geführt hat; also hat solche 2 imaginäre Wurzel-Werthe.)

5) Ist auf diese Weise die Anzahl der positiven und der negativen, also aller reellen und der imaginären Wurzel-Werthe bestimmt, so substituirt man in die Reihe (⊙) der Funktionen f, f_1, f_2, etc. etc. statt x irgend zwei reelle Werthe a und b, von denen $a < b$ ist, und bemerkt sich wieder die Vorzeichen, welche diese Funktionen annehmen;

		W
etwa für $x = a$, ...	$+, -, -, -, -, +, -, +$	4
für $x = b$, ...	$+, +, +, +, +, +, -, +$	2

zählt abermals die Anzahl der Abwechselungen (welche Zahlen hier rechts unter W zu finden sind); und der Unterschied (4—2 oder 2) dieser Zahlen drückt die Anzahl der reellen Wurzel-Werthe aus, welche zwischen a und b liegen *).

Dabei kann man überzeugt seyn, daß so lange $b > a$ ist, die Reihe der Abwechselungen für $x = b$ nie größer werden wird, als für $x = a$. Ist die Anzahl der Abwechselungen in beiden Reihen eine und dieselbe, so liegt zwischen a und b gar kein reeller Wurzel-Werth.

6) Setzt man auf diese Weise zuerst .... —10000, —1000, —100, —10, —1, 0, +1, +10, +100, +1000, +10000, + etc. etc. statt x in die Reihe (⊙), so wird man bald entferntere oder nähere Grenzen haben, zwischen denen die reellen Wurzeln liegen. — Findet man aber z. B. daß zwischen 100 und 1000 zwei reelle Wurzel-Werthe liegen, so setzt man nach und nach statt x, 200, 300, 400, u. s. f.; und zuletzt

*) In unserm fingirten Beispiele hat die Reihe (⊙) für $x = -\infty$ 6 Abwechslungen, für $x = a$ aber 4; also liegen zwischen $-\infty$ und a zwei (6—4) reelle Wurzel-Werthe. — Zwischen 0 und a liegt ein einziger reeller Wurzel-Werth, und zwischen b und $+\infty$ liegen deren noch zwei.

statt x neue Zwischen-Werthe, bis man Grenzen hat, zwischen denen nur ein einziger Wurzel-Werth liegt.

7) Wenn aber für irgend eine der statt x substituirten Zahlen, eine der Funktionen f_1, f_2, f_3 ⋯ f_{m-1} der Null gleich wird, so kann dies erstlich nie für zwei nächst auf einander folgende dieser Funktionen zugleich geschehen, und zweitens ist es dann allemal ganz willkührlich, ob man statt der Null ein + oder ein — Zeichen setzt, während man jedoch eines oder das andere setzen muß, damit die Zeichen-Reihe keine Lücke bekomme.

Wir wollen dieses alles durch ein Beispiel erläutern. Es sey zu dem Ende gegeben die Gleichung vom 5ten Grade

$$f \cdots \quad x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0,$$

so wird

$$f_1 \text{ oder } \partial f_x = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46.$$

Dividirt man nun mit diesem f_1 in f, so erhält man, wenn der Dividend vorher mit 25 multiplicirt worden ist, den Quotienten

$Q_1 = 5x - 11$ und den Rest $-372x^3 + 633x^2 + 1170x - 3031$,

so daß man nun

$$f_2 = 372x^3 - 633x^2 - 1170x + 3031$$

oder $$f_2 = x^3 - 1{,}701 \cdot x^2 - 3{,}145 \cdot x + 8{,}147$$

hat, wenn man durch den constanten und positiven Faktor 372 dividirt. (Vgl. §. 103.)

Dividirt man nun mit diesem f_2 in f_1, so erhält man wieder den Quotienten

$Q_2 = -5x - 20{,}5$ und den Rest $-122{,}621 \cdot x^2 + 166{,}240 \cdot x + 121{,}095$,

so daß man gefunden hat

$$f_3 = 122{,}621 \cdot x^2 - 166{,}240 \cdot x - 121\,095$$

oder $$f_3 = x^2 - 1{,}356 \cdot x - 0{,}987,$$

wenn man durch den constanten und positiven Koefficienten 122,621 dividirt.

Wird nun mit diesem f_3 wieder in f_2 dividirt, so erhält man den Quotienten

$Q_3 = x - 0{,}345$ und den Rest $-2{,}627 \cdot x + 7{,}806$,

so daß man nun erhält

$$f_4 = 2{,}627 \cdot x - 7{,}806 \quad \text{oder} \quad f_4 = x - 2{,}97,$$

wenn man noch durch den constanten und positiven Koefficienten 2,627 dividirt.

Endlich muß man noch mit f_4 in f_3 dividiren, und man erhält den Quotienten

$Q_4 = x + 1{,}62$ und den Rest $+3{,}81$,

so daß man zuletzt gefunden hat

$$f_5 = -3{,}81 \quad \text{oder} \quad f_5 = -1,$$

im Falle man noch durch den constanten und positiven Koefficienten 3,81 dividirt.

Man hat also nun, wenn man auch noch f_1 durch den constanten und positiven Faktor 5 dividirt

$$f = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101;$$
$$f_1 = x^4 - 2{,}4 \cdot x^3 - 14{,}4 \cdot x^2 + 38x - 9{,}2;$$
$$f_2 = x^3 - 1{,}701 \cdot x^2 - 3{,}145 \cdot x + 8{,}147;$$
$$f_3 = x^2 - 1{,}356 \cdot x - 0{,}987;$$
$$f_4 = x - 2{,}97;$$
$$f_5 = -1;$$

und man bekommt nun folgendes Schema

für	f,	f_1,	f_2,	f_3,	f_4,	f_5	W	
$x = -\infty$, ...	−,	+,	−,	+,	−,	−	4	2 negative Wurzel-Werthe.
$x = 0$, ...	−,	−,	+,	−,	−,	−	2	
$x = +\infty$, ...	+,	+,	+,	+,	+,	−	1	1 positiver, also zwei imaginäre Wurzel-Werthe.

$x = -100$, ... | −, +, −, +, −, − | 4;

also liegt zwischen $-\infty$ und -100 kein Wurzel-Werth;

$x = -10$, ... | −, +, −, +, −, − | 4;

also liegt zwischen $-\infty$ und -10 kein Wurzel-Werth;

$x = -6$, ... | −, +, −, +, +, − | 4;

also liegt zwischen $-\infty$ und -6 noch kein Wurzel-Werth;

$x = -5$, ... | +, +, −, +, −, − | 3;

folglich liegt zwischen -6 und -5 ein Wurzel-Werth;

$x = -1$, ... | +, −, +, +, −, − | 3;

also liegt zwischen -5 und -1 kein Wurzel-Werth;

$x = 0$, ... | −, −, +, −, −, − | 2;

mithin liegt zwischen -1 und 0 ein Wurzel-Werth;

$x = +4$, ... | −, −, +, +, +, − | 2;

demnach liegt zwischen 0 und 4 kein Wurzel-Werth;

$x = +5$, ... | +, +, +, +, +, − | 1;

folglich liegt zwischen 4 und 5 ein Wurzel-Werth.

Von den 3 reellen Wurzel-Werthen, welche diese Gleichung vom 5ten Grade hat, liegt also der eine zwischen -6 und -5; der andere zwischen -1 und 0; der dritte endlich zwischen 4 und 5.

§. 109.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen, darf man nur die Behauptung in §. 108. N. 5.) erweisen, weil die Behauptungen des §. 108. N. 4.) darin stecken, je nachdem man

$a = -\infty$ und $b = +\infty$, oder $a = -\infty$ und $b = 0$, oder $a = 0$ und $b = +\infty$ nimmt. — Dieser Satz §. 108. N. 5.) heißt aber so: Wenn die Reihe der Funktionen

$$f, \ f_1, \ f_2, \ f_3, \cdots f_m$$

für $x = a$ eine Anzahl μ von Abwechselungen, für $x = b$ dagegen eine Anzahl ν von Abwechselungen zeigt, so liegen (vorausgesetzt, daß $a < b$ gedacht ist) zwischen a und b allemal genau $\mu - \nu$ reelle Wurzel-Werthe der Gleichung $f = 0$. Dabei ist μ nie kleiner als ν, und wenn $\mu = \nu$ gefunden werden sollte, so liegt zwischen a und b gar kein reeller Wurzel-Werth.

Dieser Satz kann aber so bewiesen werden:

A. Denkt man sich die Funktionen $f_2, f_3, f_4, \cdots f_m$ so gebildet, wie dies oben beschrieben, aber ohne daß irgend einmal mit einer constanten Zahl multiplieirt oder dividirt worden wäre, so hat man offenbar die Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= Q_1 \cdot f_1 - f_2; \\ f_1 &= Q_2 \cdot f_2 - f_3; \\ f_2 &= Q_3 \cdot f_3 - f_4; \\ &\vdots \\ f_{r-1} &= Q_r \cdot f_r - f_{r+1}; \\ &\vdots \\ f_{m-2} &= Q_{m-1} \cdot f_{m-1} - f_m. \end{aligned}$$

B. Daraus folgt:

Wird irgend eine dieser Funktionen, z. B. f_r, für irgend einen Werth von x z. B. für $x = c$, der Null gleich, so wird $f_{r-1} = -f_{r+1}$, d. h. die nächst-anliegenden beiden dieser Funktionen nehmen dann für denselben Werth von x, ($= c$) verschiedene Vorzeichen an, weil keine dieser beiden nächst anliegenden Funktionen mit f_r zugleich der Null gleich werden kann, in so fern nie zwei auf einander folgende dieser Funktionen f, f_1, f_2, etc. einen gemeinschaftlichen Faktor $(x-c)$ haben können, weil sonst vermöge der Gleichungen in A.) derselbe Faktor jede der vorhergehenden dieser Funktionen, und daher auch f und f_1, d. h. f_x und ∂f_x zugleich theilen würde, was deshalb nicht möglich ist, weil wir in $f_x = 0$ lauter verschiedene Wurzel-Werthe vorausgesetzt haben. (Vgl. §. 104.)

Und alles dieses gilt offenbar, wenn man auch statt $f_1, f_2, f_3, \cdots f_m$ nicht diese Funktionen selbst, sondern das setzt, was hervorgeht, wenn sie mit irgend einer constanten und positiven Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

C. So lange in einer Funktion φ_x, dem x solche stetig neben einander liegende wachsende Werthe beigelegt werden, von denen keiner dieselbe zu Null macht, so lange behalten die Werthe dieser Funktion φ_x ein und dasselbe Vorzeichen; denn so wie φ_x vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven übergeht, so oft ist dazwischen $\varphi_x = 0$. Dagegen ändern die Werthe von φ_x für $x = c - h$ und für $x = c + h$ allemal ihr Vorzeichen, so oft φ_x für $x = c$ der Null gleich und h unendlich-klein wird. — Dasselbe gilt also von jeder der Funktionen $f, f_1, f_2, f_3, \cdots f_{m-1}$. — So lange daher keine dieser Funktionen durch Null hindurch geht, so lange behalten die Werthe einer jeden dieselben Vorzeichen; und die Reihen dieser Vorzeichen haben also fortwährend dieselbe Anzahl von Folgen und dieselbe Anzahl von Abwechselungen.

Man darf jetzt nur noch die Werthe von x betrachten, für welche eine dieser Funktionen $f, f_1, f_2, \cdots f_{m-1}$ der Null gleich wird. (Die Funktion f_m ist immer vom nullten Grade, d. h. nach x constant, und wird also für keinen Werth von x der Null gleich.)

D. Wird nun f_x selbst für $x = c$ der Null gleich, so wird ∂f_x oder f_1 für $x = c$ nicht der Null gleich, weil sonst $f_x = 0$ gleiche Wurzel-Werthe hätte (§. 104.). Und weil

$$f_{x \mp h} = f_x \mp \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} \mp \cdots,$$

also

$$f_{c \mp h} = \mp \partial f_c \cdot h + \cdots$$

wird, so haben f_{c+h} und ∂f_c allemal einerlei Vorzeichen aber ein von f_{c-h} verschiedenes, während die Werthe von ∂f_x oder f_1 für alle drei Werthe $c - h$, c und $c + h$ von x, einerlei Vorzeichen behalten. Die Vorzeichen bilden sich also

	entweder so: f,	f_1	oder so: f,	f_1
für $x = c - h$, ···	$+$,	$-$	$-$,	$+$
für $x = c$, ···	0,	$-$	0,	$+$
für $x = c + h$, ···	$-$,	$-$	$+$,	$+$.

Also verliert die obere Zeichen-Reihe (für $x = c - h$), so oft f_x für einen reellen Werth von x durch Null hindurchgeht, allemal eine Abwechselung (die in der untern Zeichen-Reihe, für $x = c + h$, nicht mehr vorkommt), wenn nur h unendlich-klein gedacht wird.

E. Betrachten wir nun noch den letzten Fall, nämlich wenn für einen der Werthe von x, z. B. für $x = c$, irgend eine der mittlern Funktionen $f_1, f_2, f_3 \cdots f_{m-1}$, die durch f_r vorgestellt seyn mag, der Null gleich wird.

In diesem Falle wird (nach B.) weder f_{r-1} noch f_{r+1} der Null

gleich für $x = c$, sondern sie bekommen beide verschiedene Vorzeichen. Ferner behalten die Werthe von f_{r-1} für alle 3 Werthe $c-h$, c, $c+h$ von x (nach C.) ein und dasselbe Vorzeichen; und dasselbe gilt von den Werthen von f_{r+1}. Daher gestalten sich die Zeichen der Reihe f_{r-1}, f_r, f_{r+1}, jetzt so:

	entweder f_{r-1},	f_r,	f_{r+1}	oder f_{r-1},	f_r,	f_{r+1}
für $x = c-h$, ...	$+$,	$+$,	$-$	$+$,	$-$,	$-$
für $x = c$, ...	$+$,	0,	$-$	$+$,	0,	$-$
für $x = c+h$, ...	$+$,	$-$,	$-$	$+$,	$+$,	$-$
	oder f_{r-1},	f_r,	f_{r+1}	oder f_{r-1},	f_r,	f_{r+1}
für $x = c-h$, ...	$-$,	$+$,	$+$	$-$,	$-$,	$+$
für $x = c$, ...	$-$,	0,	$+$	$-$,	0,	$+$
für $x = c+h$, ...	$-$,	$-$,	$+$	$-$,	$+$,	$+$;

und in allen diesen vier denkbaren Fällen hat augenfällig die untere Zeichen-Reihe (für $x = c+h$) genau dieselbe Anzahl von Abwechselungen, wie die obere, wenn nur h unendlich-klein gedacht wird. — Durch diese letztere Betrachtung ist zu gleicher Zeit die N. 7. des §. 108.) außer Zweifel gesetzt. —

F. Also haben die Werthe der Funktionen

$$f,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots f_r, \cdots f_{m-1},\ f_m$$

für alle stetig wachsenden Werthe von x, welche nicht f_x der Null gleich machen, immerfort dieselben Folgen und dieselben Abwechselungen (nach C. und E.); — so wie aber für $x = c$, die Funktion f_x der Null gleich wird, d. h. so wie c ein reeller Wurzel-Werth von $f_x = 0$ ist, so hat die Zeichen-Reihe für $x = c+h$ (nach D.) allemal eine Abwechselung weniger als die für $x = c-h$. Und obgleich dies zunächst nun gilt, wenn h unendlich-klein gedacht ist, so gilt es doch für jeden größern Werth von h so lange noch, als nicht zwischen $c-h$ und c, oder zwischen c und $c+h$ ein zweiter Wurzel-Werth von $f_x = 0$ liegt, weil so lange fort (nach C.) die Zeichen der Werthe von f, f_1, f_2, ⋯ sich nicht ändern.

Dadurch ist aber der zu erweisende Satz vollständig außer Zweifel gesetzt und daher das Verfahren des §. 108.) gerechtfertigt.

Anmerkung. Bei Anwendung dieses Verfahrens (des §. 108.) auf eine beliebige Gleichung $F_x = 0$ ist es übrigens nicht nöthig, daß man vorher (nach §. 103.) die ungleichen Wurzel-Werthe erst absondert; sondern man kann das Verfahren sogleich auf $F_x = 0$ selbst anwenden. — Hat nämlich, was man vorher nicht wissen kann, $F_x = 0$ gleiche (sogenannte vielfache) Wurzel-Werthe, so wird der letzte Rest nicht constant, sondern Null; und der letzte Divisor ist dann der größte ge-

meinschaftliche Theiler. Nun dividirt man mit ihm in F_x und bekommt dann zum Quotienten f_x; und auf die Gleichung $f_x = 0$ wendet man dasselbe Verfahren (des §. 108.) dann auf's Neue an, während man zu gleicher Zeit (nach §. 103.) jetzt überzeugt ist, daß $f_x = 0$ lauter verschiedene Wurzel-Werthe hat.

§. 110.

Die Newton'sche Näherungs-Methode.

I. Hat man zwei Grenzen a und b gefunden, zwischen denen ein einziger Wurzel-Werth der Gleichung $f_x = 0$ liegt, so wird $f_a \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$ und $f_b \left\{ \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right\}$ und der wahre Werth von x liegt im Allgemeinen näher an a als an b, wenn f_a der Null näher liegt als f_b; und umgekehrt. Man nimmt nun einen, zwei, drei oder mehr Werthe α, β, γ, so daß $a < \alpha < \beta < \gamma < b$ ist, und substituirt solche statt x in f_x und berechnet f_α, f_β, f_γ. Finden sich nun f_a, f_α, f_β, f_γ mit einerlei Vorzeichen behaftet (während f_b das entgegengesetzte hat), so liegt der wahre Wurzel-Werth zwischen γ und b. — Finden sich aber nur f_a, f_α, f_β mit einerlei und f_γ (nebst f_b) schon mit dem entgegengesetzten Vorzeichen behaftet, so liegt der gesuchte Wurzel-Werth zwischen β und γ. — Haben schon f_α und f_β entgegengesetzte Zeichen, so liegt der gesuchte Wurzel-Werth zwischen α und β. — U. s. f. — Auf diese Weise kann man also immer nähere und beliebig nahe Grenzen finden, zwischen denen der wahre Wurzel-Werth liegt. Alles so wie wir dies bereits im §. 59.) unter dem Namen der Newton'schen Näherungs-Methode beschrieben, auch durch Beispiele erörtert haben.

II. Hat man aber zwei Grenz-Werthe a und b gefunden, wo $a < b$ ist, welche schon einander sehr nahe liegen, so daß $b - a$ sehr klein ist ($\frac{1}{10}$ oder gar nur $\frac{1}{100}$ oder noch kleiner), so ist der gesuchte Wurzel-Werth, von a und von b um noch weniger verschieden; und a, so wie auch b, wird ein Näherungs-Werth der Wurzel genannt. Man kann nun

$x = a + h$, oder auch $x = b + k$ setzen, und noch das fehlende h oder k dazu berechnen, während sich h nothwendig positiv, und k nothwendig negativ ausrechnen muß.

Man hat aber für $x = a$

$$f_{x+h} = 0 \quad \text{d. h.} \quad f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots = 0,$$

oder, wenn man die höhern Potenzen des sehr kleinen h außer Acht läßt,

$$f_x + \partial f_x \cdot h = 0, \quad \text{d. h.} \quad h = -\frac{f_x}{\partial f_x} (\text{für } x = a) = -\frac{f_a}{\partial f_a}.$$

Aus demselben Grunde findet sich

$$k = -\frac{f_x}{\partial f_x} \ (\text{für } x = b) \quad \text{d. h.} \quad k = -\frac{f_b}{\partial f_b}.$$

Weder h noch k sind jetzt genau berechnet; nimmt man aber

$$a + h = a' \qquad \text{oder} \qquad b + k = b',$$

so ist in der Regel a' und auch b' ein näherer Näherungs-Werth als a oder b es gewesen ist. Berechnet man nun noch einmal h oder k aus der Formel $-\frac{f_x}{\partial f_x}$, indem man jetzt a' oder b' statt x setzt, und nennt man die nun erhaltenen Werthe von h oder k jetzt h' und k', so ist in der Regel

$$a' + h' \text{ wieder näher als } a'$$

und auch $\qquad b' + k'$ wieder näher als b',

während natürlich k' negativ gefunden wird, wenn b' der zu große Näherungs-Werth gewesen ist. — Auch dies Verfahren findet man schon im §. 59.) beschrieben und durch Beispiele erörtert *).

---

*) Fourier (in seiner Analyse des équations determinées, Paris, 1831.) hat dagegen mit Recht eingewandt, daß man bei diesem letztern Verfahren nicht gewiß wissen könne, ob wirklich $a + h$ d. h. a' ein näherer Werth ist als a, oder ob nicht vielleicht $b + k$ d. h. b' der nähere ist. Man kann zwar $f_{a'}$ und $f_{b'}$ berechnen, so wie man schon vorher f_a und f_b berechnet hat. Findet sich dann $f_{a'}$ der Null näher als f_a, so ist a' näher als a; und findet sich $f_{b'}$ der Null noch näher als $f_{a'}$, so ist b' noch näher als a'. — Fourier meint aber mit Recht, daß es besser ist,

III. Dabei ist zu bemerken, daß, eben weil h positiv, k aber negativ werden muß, die Werthe von f_x und ∂f_x für die kleinere Grenze $x=a$, allemal verschiedene, dagegen für die größere Grenze $x=b$ allemal einerlei Vorzeichen haben werden.

§. 111.

I. Ist $\partial\varphi_x$ die Ableitung einer ganzen Funktion φ_x von x, und ist n eine positive ganze Zahl; ist ferner h beliebig groß und positiv; theilt man endlich diesen Werth h in n gleiche Theile, und nennt man jeden dieser Theile w, so daß man also hat

$$\frac{h}{n}=w \qquad \text{und} \qquad h=nw,$$

so ist die Summe

$$(\odot)\cdots\begin{cases}\partial\varphi_x\cdot w+\partial\varphi_{x+w}\cdot w+\partial\varphi_{x+2w}\cdot w+\cdots+\partial\varphi_{x+(n-1)w}\cdot w\\ \text{der Differenz der Werthe}\quad \varphi_{x+h}-\varphi_x\end{cases}$$

desto näher gleich, je größer die Zahl n ihrer Glieder ist, und man kann die Zahl n immer so groß nehmen, daß diese beiden Ausdrücke zuletzt um weniger von einander abweichen, als jede noch so klein, aber bestimmt gedachte Zahl z.

Denn der allgemeine binomische d. h. der Taylor'sche Lehrsatz liefert uns

$$1)\quad \varphi_{x+w}=\varphi_x+\partial\varphi_x\cdot\frac{w}{1}+\partial^2\varphi_x\cdot\frac{w^2}{2!}+\cdots.$$

Setzt man hier nach und nach $x+w$, $x+2w$, $\cdots$ $x+(n-1)w$ statt x, so erhält man noch

$$2)\quad \varphi_{x+2w}=\varphi_{x+w}+\partial\varphi_{x+w}\cdot\frac{w}{1}+\partial^2\varphi_{x+w}\cdot\frac{w^2}{2!}+\cdots$$

$$3)\quad \varphi_{x+3w}=\varphi_{x+2w}+\partial\varphi_{x+2w}\cdot\frac{w}{1}+\partial^2\varphi_{x+2w}\cdot\frac{w^2}{2!}+\cdots$$

$$4)\quad \varphi_{x+4w}=\varphi_{x+3w}+\partial\varphi_{x+3w}\cdot\frac{w}{1}+\partial^2\varphi_{x+3w}\cdot\frac{w^2}{2!}+\cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n)\quad \varphi_{x+nw}=\varphi_{x+(n-1)w}+\partial\varphi_{x+(n-1)w}\cdot\frac{w}{1}+\partial^2\varphi_{x+(n-1)w}\cdot\frac{w^2}{2!}+\cdots.$$

---

wenn man, mit welchem der beiden Grenz-Werthe man die Rechnung anstellen müsse, schon im Voraus wissen könne. Er stellt zu dem Ende Betrachtungen an, die wir im §. 111.) durch einige Sätze bevorworten und dann mittheilen wollen.

Addirt man aber alle diese n Gleichungen, und hebt man dabei rechts und links weg, was sich wegheben läßt, so erhält man den vorliegenden Satz, wenn man bedenkt, daß je größer n ist, desto kleiner $\frac{h}{n}$ d. h. w werden muß, wie also w so klein werden kann, daß alle mit w^2 und noch höhern Potenzen von w multiplicirten Glieder, wie sie zur Rechten noch zu stehen kommen, weniger betragen als jede noch so klein aber bestimmt gedachte Zahl z.

II. Aus diesem Satze kann man wieder zunächst nachstehende Folgerungen ziehen:

1) Setzt man $x = a$, $x + h = b$, also $h = b - a$ und $w = \frac{b-a}{n}$, so sieht derselbe Satz so aus:

$$\varphi_b - \varphi_a = (\partial\varphi_a + \partial\varphi_{a+w} + \partial\varphi_{a+2w} + \cdots + \partial\varphi_{b-w}) \cdot w$$

desto genauer, je größer die Zahl n der Glieder zur Rechten ist, je kleiner also w.

Ist also z. B. $\varphi_x = \frac{1}{3}x^3 + c$, demnach $\partial\varphi_x = x^2$, so ist

$$[a^2 + (a+w)^2 + (a+2w)^2 + \cdots + (b-w)^2] \cdot w = \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{3}a^3$$

desto näher, je größer die Zahl n der Glieder, je kleiner also w ist. — Und setzt man hier $a = 0$, $b = h$, so ergiebt sich, weil nun $w = \frac{h}{n}$ ist,

$$[0^2 + w^2 + (2w)^2 + (3w)^2 + \cdots + (h-w)^2] \cdot \frac{h}{n} = \tfrac{1}{3}h^3,$$

wenn nur n unendlich groß gedacht wird.

2) Ist $\partial\varphi_x$ für alle Werthe von x zwischen a und b positiv, so ist auch $\varphi_b - \varphi_a$ nothwendig positiv. — Oder (aus I. ⊙): Ist $\partial\varphi_x$ für alle Werthe von x zwischen x und $x + h$ positiv, so ist auch $\varphi_{x+h} - \varphi_x$ positiv, wie groß h immer gedacht seyn mag.

3) Setzt man in der Summe zur Rechten in 1.) oder in der Summe I. ⊙.), statt jedes einzelnen der n Summanden, den größten derselben, so hat man zu viel; setzt man aber statt jedes einzelnen dieser n Summanden den kleinsten derselben, so hat man zu wenig. Also liegt $\varphi_b - \varphi_a$ allemal zwischen den Grenzen $[\partial\varphi_x]_k \cdot (b-a)$ und $[\partial\varphi_x]_g \cdot (b-a)$, wenn $[\partial\varphi_x]_k$ den kleinsten, und $[\partial\varphi_x]_g$ den größten der Werthe von $\partial\varphi_x$ vorstellen, welche man für alle Werthe von x zwischen a und b

erhält. — Oder: Die Differenz $\varphi_{x+h} - \varphi_x$ liegt immer zwischen den Grenzen $[\partial\varphi_x]_k \cdot h$ und $[\partial\varphi_x]_g \cdot h$, wenn $[\partial\varphi_x]_k$ und $[\partial\varphi_x]_g$ die kleinsten und größten aller der Werthe vorstellen, welche $\partial\varphi_x$ annimmt, im Falle statt x alle Werthe zwischen x und x+h gesetzt werden.

4) Man hat daher genau

$$\varphi_{x+h} = \varphi_x + \partial\varphi_{x+\theta h} \cdot h,$$

wo $\partial\varphi_{x+\theta h}$ unter allen den letztgenannten Werthen den rechten aber unbekannten Mittelwerth zwischen dem so eben gedachten kleinsten und größten Werthe von $\partial\varphi_x$ vorstellt.

§. 112.

Fourier's Verbesserung des zweiten Theils der Newton'schen Näherungs-Methode.

Auf diese Sätze sich stützend giebt nun Fourier, in Bezug auf den zweiten Theil der Newton'schen Näherungs-Methode folgende Vorsichtsmaßregeln:

I. Man wende diesen Theil II. des §. 110.) nicht eher an, als bis man sich überzeugt hat, daß zwischen den Grenzen a und b, zwischen denen der gesuchte Wurzel-Werth von $f_x = 0$ liegt, kein Werth von x existirt, welcher ∂f_x oder $\partial^2 f_x$ der Null gleich macht*), so daß also ∂f_x und $\partial^2 f_x$ für alle Werthe von x, die zwischen a und b liegen, immerfort positiv, oder immerfort negativ bleiben, während sie übrigens einerlei oder verschiedene Vorzeichen haben können. Geschieht dies, so gilt dann das folgende:

II. In dem Falle, wo f_x und $\partial^2 f_x$ für x = a einerlei Vorzeichen haben (und wo dann eben deshalb die Vorzeichen von f_b und $\partial^2 f_b$ allemal verschieden sind), wende man diesen kleinern Grenzwerth a an; und der Werth $a - \frac{f_a}{\partial f_x}$ ist dann allemal

*) Man darf zu dem Ende nur nach §. 108.) untersuchen, ob zwischen a und b ein reeller Wurzel-Werth der Gleichung $\partial f_x = 0$ oder der Gleichung $\partial^2 f_x = 0$ liegt.

allemal dem gesuchten Wurzel-Werth näher, und noch immer kleiner als a. Wenn aber f_a und $\partial^2 f_a$ verschiedene Vorzeichen haben (oder, was dasselbe ist, wenn f_b und $\partial^2 f_b$ einerlei Vorzeichen haben), dann wende man den größern Grenz-Werth b an, d. h. $b - \frac{f_b}{\partial f_b}$ ist dann immer näher als b, aber immer noch größer als der gesuchte Wurzel-Werth.

III. Im erstern Falle (d. h. wenn f_a und $\partial^2 f_a$ einerlei also f_b und $\partial^2 f_b$ verschiedene Vorzeichen haben) sind ferner allemal

$$a - \frac{f_a}{\partial f_a} \quad \text{und} \quad b - \frac{f_b}{\partial f_a}$$

zwei neue und nähere Grenzen als a und b, zwischen denen der wahre Wurzel-Werth liegt; im andern Falle dagegen (wenn f_a und $\partial^2 f_a$ verschiedene, also wenn f_b und $\partial^2 f_b$ einerlei Vorzeichen haben) sind allemal

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \quad \text{und} \quad b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

die zwei neuen und näheren Grenzen als a und b, zwischen denen der gesuchte Wurzel-Werth liegt.

IV. Diese Regel III.) kann man auch so ausdrücken: Man findet aus der Formel $z - \frac{f_z}{\partial f_z}$ allemal zwei nähere Grenzen des Wurzel-Werthes als a und b, zwischen denen der gesuchte Wurzel-Werth noch liegt, wenn man in z und f_z statt z einmal die kleinere a und das andere Mal die größere b der Grenzen substituirt, im Nenner ∂f_z aber jedesmal die eine Grenze a, oder jedesmal die andere b statt z setzt, je nachdem ∂f_a oder ∂f_b, abgesehen vom Vorzeichen, den größten absoluten Werth hat.

V. Stimmen die beiden nach IV.) gefundenen neuen Grenzen in den ersten n Decimalstellen mit einander überein, so hat der gesuchte Wurzel-Werth dieselben n ersten Decimalstellen. Setzt man dann diese neuen Grenzen statt a und b,

und wiederholt man die Methode der IV.), so erhält man in der Regel schon 2n genaue Decimalstellen des gesuchten Wurzel-Werthes. — Dieselbe Methode beliebig oft wiederholt, giebt also den gesuchten Wurzel-Werth beliebig genau.

Dieses alles mag nun bewiesen werden.

1) Nach der in I.) gemachten Voraussetzung sind die Werthe von ∂f_x für alle Werthe von x zwischen a und b fortwährend wachsend oder fortwährend abnehmend; denn fände irgendwo ein Uebergang der Funktion ∂f_x vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen, also ein Maximum oder ein Minimum statt, so müßte nach der Lehre vom Größten und Kleinsten (§. 58.) $\partial(\partial f_x)_x$ d. h. $\partial^2 f_x$ der Null gleich werden, was gegen die Voraussetzung I.) ist.

2) Aus demselben Grunde ist aber auch f_x von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin fortwährend im Wachsen oder fortwährend im Abnehmen begriffen, und zwar findet das erstere statt, wenn f_a negativ, folglich f_b positiv ist, das andere dagegen, wenn f_a positiv, folglich f_b negativ ist. —

3) Die Werthe von ∂f_x und $\partial^2 f_x$ ändern für alle Werthe von x zwischen a und b nie ihr Vorzeichen; weil sonst für einen Werth von x zwischen a und b, ∂f_x oder $\partial^2 f_x$ der Null gleich würde, was gegen die Voraussetzung I.) ist.

4) Es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\partial f_{x+h} = \partial f_x + \partial^2 f_x \cdot h + \cdots;$$

also ist ∂f_x fortwährend mit x zugleich wachsend, so lange $\partial^2 f_x$ positiv ist, dagegen abnehmend, während x wächst, wenn $\partial^2 f_x$ negativ seyn sollte.

5) Es finden daher im Ganzen nur vier Fälle statt, nämlich es werden

entweder	$f_x, \partial f_x, \partial^2 f_x$;	oder $f_x, \partial f_x, \partial^2 f_x$;	oder $f_x, \partial f_x, \partial^2 f_x$;	oder $f_x, \partial f_x, \partial^2 f_x$
für $x=a$	$-, +, -$;	$+, -, +$;	$-, +, +$;	$+, -, -$
für $x=b$	$+, +, -$;	$-, -, +$;	$+, +, +$;	$-, -, -$.

6) Ist w irgend ein zu kleiner oder zu großer Näherungs-Werth, so kann man das (positiv oder negativ) fehlende durch h bezeichnen und man hat dann (nach dem Satze §. 111. II. 4.) genau

$$f_{w+h} = f_w + \partial f_{w+\theta h} \cdot h = 0;$$

also genau

$$h = -\frac{f_w}{\partial f_{w+\theta h}},$$

wo $\partial f_{w+\theta h}$ das vorstellt, was aus ∂f_x wird, wenn statt x ein unbekannter Werth gesetzt wird, der zwischen dem Näherungs-Werth w und dem

wahren und genauen Wurzel-Werth $w+h$, der also auch allemal zwischen den beiden Grenzen a und b liegt, von denen w die kleinere a, oder die größere b vorstellt. Es ist also genau

$$h = -\frac{f_w}{\partial f_{a\ldots b}} \quad \text{und} \quad x = w - \frac{f_w}{\partial f_{a\ldots b}},$$

sobald man nur unter $\partial f_{a\ldots b}$ den Werth von ∂f_x sich denkt, welcher für einen zwar unbekannten, aber allemal zwischen a und b liegenden Werth von x hervorgeht. Dabei liegt dieser Werth $\partial f_{a\ldots b}$ selbst, da ∂f_x zwischen a und b immerfort wächst oder immerfort abnimmt, zwischen ∂f_a und ∂f_b und hat auch mit ∂f_a und ∂f_b ein und dasselbe Vorzeichen.

7) Gehen wir nun die vier Fälle der N. 5.) einzeln durch. — Im erstern Fall, wo $\partial^2 f_x$ zwischen a und b immerfort negativ ist, ist ∂f_x, obwohl jedesmal positiv vorausgesetzt, doch immer im Abnehmen begriffen, so daß in diesem Falle

$$\partial f_a > \partial f_{a\ldots b} > \partial f_b$$

ist. Setzt man daher in obigen Ausdruck des wahren Wurzel-Werthes

$$x = w - \frac{f_w}{\partial f_{a\ldots b}},$$

∂f_a statt $\partial f_{a\ldots b}$, so hat man, vom Zeichen abgesehen, für den Quotienten zu wenig; zu viel dagegen, wenn ∂f_b statt $\partial f_{a\ldots b}$ gesetzt wird. — Nimmt man nun a statt w, so ist $-\frac{f_w}{\partial f_{a\ldots b}}$ positiv, und mithin ist $a - \frac{f_a}{\partial f_a}$ noch zu klein, dagegen $a - \frac{f_a}{\partial f_b}$ schon zu groß. Von diesem letztern Werthe kann man aber nicht à priori wissen, ob er nicht auch $>b$ wird, daher müssen wir diesen letztern Werth ganz beseitigen und uns vorläufig mit dem erstern Näherungs-Werthe $a - \frac{f_a}{\partial f_a}$ begnügen, von dem wir gewiß wissen, daß er größer als a, aber doch noch kleiner als der gesuchte Wurzel-Werth ist. — Nimmt man aber b statt w, so ist $\frac{f_b}{\partial f_{a\ldots b}}$ positiv, also $\frac{f_b}{\partial f_a}$ kleiner, $\frac{f_b}{\partial f_b}$ dagegen größer als dieser von b zu subtrahirende Quotient $\frac{f_b}{\partial f_{a\ldots b}}$. Folglich ist $b - \frac{f_b}{\partial f_a}$ zu groß, aber $b - \frac{f_b}{\partial f_b}$ zu klein, während die erstere Grenze doch noch kleiner wie b ist. Von der letztern Grenze $b - \frac{f_b}{\partial f_b}$ wissen wir nicht

gewiß, ob sie nicht auch kleiner wie a ist; daher muß solche beseitigt werden. Von der andern Grenze $b-\frac{f_b}{\partial f_a}$ wissen wir aber gewiß, daß sie dem wahren Wurzel-Werthe näher rückt als b, weil sie größer ist als der wahre Wurzel-Werth und doch kleiner als b. — Man findet also in diesem erstern Falle der N. 5.)

$$a-\frac{f_a}{\partial f_a} \quad \text{und} \quad b-\frac{f_b}{\partial f_a}$$

als zwei Grenzen zwischen denen der wahre Wurzel-Werth liegt, und welche zu gleicher Zeit nähere Grenzen sind, als a und b. — Dies stimmt aber genau mit der Aussage des erstern Theils der Regel III.). — Zu gleicher Zeit ist dabei ∂f_a, abgesehen vom Vorzeichen, der größere der beiden Werthe ∂f_a und ∂f_b; und dies stimmt mit der Aussage der IV.).

Geht man den zweiten, und nachher noch den dritten Fall der N. 5.) gerade so durch, so wird man die Regeln III.) und IV.) auch für sie bestätigt finden. — Wir wollen, um kurz zu seyn, nur noch den vierten Fall der N. 5.) betrachten.

In diesem vierten Falle ist ∂f_x für alle von a nach b hin stetig wachsenden Werthe von x, weil $\partial^2 f_x$ fortwährend negativ ist, immer fort im Abnehmen begriffen, aber fortwährend negativ, so daß $\partial f_a > \partial f_b$ ist, wenn man die Vorzeichen berücksichtigt, dagegen abgesehen vom Vorzeichen, $\partial f_b > \partial f_a$ seyn muß. Dasmal ist ferner $\frac{f_a}{\partial f_{a\cdots b}}$ negativ, dagegen $\frac{f_b}{\partial f_{a\cdots b}}$ positiv.

Nimmt man nun in 6.) die kleinere Grenze a statt w, so hat man $x=a-\frac{f_a}{\partial f_{a\cdots b}}$; also ist $a-\frac{f_a}{\partial f_a}$ zu groß, und $a-\frac{f_a}{\partial f_b}$ zu klein. Letztere Grenze ist jedoch immer noch größer als a, folglich wirklich eine nähere Grenze, was man von der erstern nicht mit Sicherheit sagen kann, da sie selbst größer als b seyn könnte. Nimmt man aber in 6.) die größere Grenze b statt w, so erhält man

$x=b-\frac{f_b}{\partial f_{a\cdots b}}$; also ist $b-\frac{f_b}{\partial f_a}$ zu klein, und $b-\frac{f_b}{\partial f_b}$ zu groß.

Letztere Grenze ist aber doch kleiner als b, folglich wirklich dem wahren Wurzel-Werth näher als b, was man von der erstern nicht sagen kann, da sie vielleicht kleiner als a selbst ist. — Man hat also dasmal

$$a-\frac{f_a}{\partial f_b} \quad \text{und} \quad b-\frac{f_b}{\partial f_b}$$

als zwei neue und wirklich nähere Grenzen des gesuchten Wurzel-Werthes, und dies stimmt nicht bloß genau mit der Aussage der III.), sondern auch wiederum mit der Aussage IV.), weil dasmal wirklich ∂f_b, abgesehen vom Vorzeichen, größer ist, als ∂f_a *).

Wir wollen diese Auflösungen der numerischen Gleichungen noch mit einem Beispiel beschließen.

Beispiel. Untersucht man die Gleichung

1) $f_x = x^3 - 2x - 5 = 0$,

welche 2) $\partial f_x = 3x^2 - 2$

und 3) $\partial^2 f_x = 6x$

giebt, nach der Sturm'schen Regel, so findet man, daß sie zwei imaginäre Wurzel-Werthe und einen reellen hat, und daß letzterer zwischen 1 und 10 liegt. Fährt man nach derselben Regel weiter fort, so findet man, daß derselbe reelle Wurzel-Werth zwischen 2 und 3 liegt; und setzt man dasselben Verfahren noch weiter fort, so zeigen sich die Grenzen $a = 2,0$ und $b = 2,1$, zwischen denen der gedachte reelle Wurzel-Werth liegt.

Nun kann das im gegenwärtigen Paragraphen beschriebene Verfahren eintreten, weil auch innerhalb dieser Grenzen kein Wurzel-Werth von $\partial f_x = 0$ und auch nicht von $\partial^2 f_x = 0$ liegt; denn $\partial f_x = 0$ giebt $3x^2 - 2 = 0$ oder $x = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, und $\partial^2 f_x = 0$ giebt $6x = 0$ d. h. $x = 0$. — Weil aber jetzt $\partial f_a = 10$ und $\partial f_b = 11,23$ wird, so sind

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \quad \text{und} \quad b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

dasmal die beiden näheren Grenzen. Nun rechnet sich aber aus:

$$f_a = -1;\; f_b = +0,061;\; \text{also} \; -\frac{f_a}{\partial f_b} = +0,0890 \; \text{und} \; \frac{f_b}{\partial f_b} = 0,00543,$$

folglich sind diese neuen Grenzen jetzt

2,0890 und 2,0947.

Versucht man aber den Werth 2,09 (um nicht mit so vielen Decimalstellen rechnen zu müssen), so findet sich für $x = 2,09$, $f_x = -0,050671$; deshalb ist 2,09 noch zu klein, und da 2,10 bereits zu groß war, so kann man als Grundlage der neuen Annäherung

2,09 statt a und 2,10 statt b

---

*) Fourier versinnlicht dies alles durch Kurven auf eine sehr nette Weise, was jedoch unseren Lesern ebenfalls nicht mißlingen kann, sobald sie die in den nächsten Kapiteln stehende Kurvenlehre kennen gelernt haben werden. — Fourier giebt ferner noch speciellere Regeln, die theils zur Beurtheilung der erlangten Genauigkeit, theils zur Abkürzung der Rechnung dienen, die wir hier aber übergehen müssen.

setzen. Für diese jetzigen Werthe von a und b berechnen sich nun

$$f_a = -0{,}050671; \quad f_b = +0{,}061; \quad \partial f_a = 11{,}1043; \quad \partial f_b = 11{,}23;$$

und die näheren Grenzen sind daher jetzt, weil noch immer $\partial f_b > \partial f_a$ ist, abermals

$$a - \frac{f_a}{\partial f_b} \qquad \text{und} \qquad b - \frac{f_b}{\partial f_b}$$

für diese neuen Werthe von a und b. — Nun wird aber

$$-\frac{f_a}{\partial f_b} = 0{,}00451 \qquad \text{und} \qquad \frac{f_b}{\partial f_b} = 0{,}0054;$$

also sind die neuen Grenzen

$$2{,}09451 \qquad \text{und} \qquad 2{,}09457,$$

so daß der Wurzel-Werth

$$x = 2{,}0945\ldots\ldots$$

in den ersten vier Decimalstellen ganz genau ist. Nimmt man nun neuerdings

$$a = 2{,}0945 \qquad \text{und} \qquad b = 2{,}0946;$$

und wiederholt man das Verfahren so findet sich

$$f_a = -0{,}000574591375; \qquad f_b = 0{,}000541550536;$$

$$\partial f_a = 11{,}16079075 \qquad \text{und} \qquad \partial f_b = 11{,}16204748.$$

Da bereits 4 Decimalen genau sind, so muß dasmal die Division bis zur 8ten Decimalstelle fortgesetzt werden; man findet daher

$$\frac{f_b}{\partial f_b} = 0{,}00004851$$

also, weil $b = 2{,}0946$ ist

$$x = b - \frac{f_b}{\partial f_b} = 2{,}09455148;$$

und dies ist der gesuchte Wurzel-Werth x bis auf 8 Decimalstellen genau.

Wollte man nun die neuen Grenzen

$$a = 2{,}09455148 \qquad \text{und} \qquad b = 2{,}09455149$$

nehmen und dasselbe Verfahren noch einmal wiederholen, so würde man schon 16 genaue Decimalstellen des gesuchten Wurzel-Werthes erhalten, nämlich

$$x = 2{,}0945514815423265,$$

u. s. w. f.

Anmerkung 1. Für besondere Gleichungen kann die Auflösung oft sehr vereinfacht werden.

I. Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$x^{15} - 3x^{10} + 7x^5 + 8 = 0,$$

so setzt man $x^5 = z$, erhält $z^3 - 3z^2 + 7z + 8 = 0$, löst diese

kubische Gleichung nach z auf, und findet dann aus jedem einzelnen der drei Werthe von z noch fünf Werthe für x aus der Gleichung $x = \sqrt[5]{z}$.

II. Oder sind gegeben reciproke Gleichungen, d. h. solche, die sich nicht ändern, wenn $\frac{1}{x}$ statt x gesetzt wird, die daher neben jedem Wurzel-Werthe α noch den Wurzel-Werth $\frac{1}{\alpha}$ haben, und die man daran erkennt, daß die Koefficienten von den beiden äußersten Enden nach der Mitte zu bezüglich entweder genau dieselben oder doch dieselben mit verschiedenem Vorzeichen sind, z. B.

$$x^5 - \tfrac{11}{6}x^4 - \tfrac{11}{2}x^3 + \tfrac{11}{2}x^2 + \tfrac{11}{6}x - 1 = 0,$$

oder $$x^5 + \tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{43}{6}x^3 - \tfrac{43}{6}x^2 + \tfrac{1}{6}x + 1 = 0,$$

oder $$x^6 - \tfrac{17}{6}x^5 - \tfrac{11}{3}x^4 + 11x^3 - \tfrac{11}{3}x^2 - \tfrac{17}{6}x + 1 = 0,$$

oder $$x^6 - \tfrac{5}{6}x^5 - \tfrac{22}{3}x^4 + \tfrac{22}{3}x^2 + \tfrac{5}{6}x - 1 = 0;$$

so kann man solche sogleich auf Gleichungen von nur halb so hohem oder noch niedrigerm Grade zurückführen*). Sind sie nämlich vom ungeraden Grade, so lassen sie sich immer durch $x+1$ oder durch $x-1$ wegdividiren, so daß die neue Gleichung vom geraden Grade wird. Hat aber die reciproke Gleichung vom geraden Grade die vom Anfange und Ende gleichweit abstehenden Glieder mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, so läßt sie sich immer durch x^2-1 d. h. durch $(x-1)(x+1)$ wegdividiren, so daß abermals eine reciproke Gleichung von geradem Grade entsteht. Es bleiben daher zuletzt nur solche reciproke Gleichungen übrig, welche vom geraden ($2m^{ten}$) Grade sind, und welche sich (indem man durch x^m dividirt) auf die Form

---

*) Die Gleichungen $x^m \pm 1 = 0$ sind ebenfalls solche reciproke, und lassen sich daher auf diesem Wege auf Gleichungen vom Grade $\frac{1}{2}m$ oder $\frac{1}{2}(m-1)$ zurückführen.

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+A_1\cdot\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+A_2\cdot\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\cdots$$
$$+A_{m-1}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+A_m=0$$

bringen lassen. Man setzt nun $x+\frac{1}{x}=z$ und quadrirt, kubirt etc. etc. diese Gleichung, so daß man erhält aus

$$x+\frac{1}{x}=z;$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2 \qquad =z^2, \text{ also } x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2;$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad =z^3, \text{ also } x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6=z^4, \text{ also } x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2;$$

u. s. w. f.

Nach Substitution dieser Werthe ist dann die neue Gleichung (in z) von halb so hohem Grade. Hat man aus ihr z gefunden, so liefert zu jedem einzelnen Werth von z, die Gleichung,

$$x+\frac{1}{x}=z \qquad \text{noch} \qquad x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}z^2-1}$$

dazu, so daß man zuletzt doch alle Werthe von x gefunden hat.

Anmerkung 2. Sucht man von irgend einer Gleichung $f_x=0$ die imaginären Wurzel-Werthe, welche sie hat, so setzt man $x=p+q\cdot i$, so daß $f_x=0$ (nach dem Taylor'schen Lehrsatze) in

$$1) \qquad f_p-\frac{q^2}{2!}\cdot\partial^2 f_p+\frac{q^4}{4!}\cdot\partial^4 f_p-\cdots=0$$

und

$$2) \qquad q\cdot\partial f_p-\frac{q^3}{3!}\cdot\partial^3 f_p+\frac{q^5}{5!}\cdot\partial^5 f_p-\cdots=0$$

übergeht, wo f_p, ∂f_p, $\partial^2 f_p$, $\partial^3 f_p$ etc. etc. die Ausdrücke bedeuten, welche bezüglich aus f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$ etc. etc. hervor-

gehen, wenn überall p statt x gesetzt wird *). Hernach kommt alles darauf an, alle zusammengehörigen Paare reeller Werthe von p und q zu finden, welche beiden Gleichungen 1.) und 2.) zugleich genügen.

Mit dieser letztern Aufgabe nun mag sich die nächste Abtheilung beschäftigen.

Vierte Abtheilung.

Von der Auflösung zweier oder mehrerer höhern Gleichungen zwischen zwei oder mehr Unbekannten.

§. 113.

Es seyen die beiden Gleichungen

1) $$Ax^2 + Bx + C = 0$$

und

2) $$Dx^3 + Ex^2 + Fx + G = 0$$

gegeben, in welchen A, B, C, D, E, F, G noch einen zweiten Unbekannten z enthalten (so daß dieselben beiden Gleichungen auch noch nach Potenzen von z geordnet erscheinen könnten, deren Koefficienten noch x enthalten). Man soll den Unbekannten x aus beiden Gleichungen eliminiren oder fortschaffen, so daß eine Gleichung hervorgeht, welche nur A, B, C, D, E, F, G enthält, ohne x, welche folglich nur noch den andern Unbekannten z enthält.

I, Die Euler'sche Methode. — Man multiplicirt die erstere Gleichung mit Dx, die andere mit A, und subtrahirt beide Resultate von einander. Dies giebt eine Gleichung ohne x^3, nämlich

---

*) Man nimmt nämlich die Gleichung

$$f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

und setzt hier herein p statt x, und qi statt h, und erhält die neue Gleichung, welche wegen des imaginären i, sich in beide obige Gleichungen zerlegt.

3) $(BD - AE)x^2 + (CD - AF)x - AG = 0.$

Man betrachtet nun die 1.) und die 3.) als die gegebenen Gleichungen, aus denen x eliminirt werden soll. Aus diesen beiden Gleichungen schafft man, ganz auf demselben Wege, das mit x^2 behaftete Glied fort. Wird dann der Kürze wegen

4) $BD - AE = A_1$, $CD - AF = B_1$ und $-AG = C_1$

gesetzt, so daß die 3.) die Form

3) $A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0$

annimmt, so erhält man die Gleichung

5) $(A_1B - AB_1)x + (A_1C - AC_1) = 0.$

Hierauf multiplicirt man die 1.) mit C_1, die 3.) dagegen mit C und subtrahirt wieder die Resultate. Dadurch erhält man eine Gleichung, welche sich durch x dividiren läßt, und welche daher wieder das mit der höchsten Potenz x^2 afficirte Glied verliert. Solche wird

6) $(AC_1 - A_1C)x + (BC_1 - B_1C) = 0.$

Wird dann zuletzt aus den Gleichungen 5.) und 6.) noch einmal x eliminirt, so erhält man endlich die gesuchte Eliminations-Gleichung ohne x.

Es ist leicht, diese Methode auf Gleichungen eines jeden Grades auszudehnen. Auch bleibt sie völlig unverändert, wenn die Koefficienten A, B, C, D, E etc. etc. außer z auch noch einen zweiten Unbekannten y, oder noch mehr Unbekannte enthalten sollten, wenn nur in diesen Koefficienten, x selbst nicht mehr vorkommt.

Dieser Methode wurde aber mit Recht der Vorwurf gemacht, daß die Eliminations-Gleichung von einem zu hohen Grade wird, so daß sie mehrere Werthe für z liefert, welche den beiden gegebenen Gleichungen 1.) und 2.) ganz fremd sind.

II. Andere Methode mittelst des Aufsuchens eines gemeinschaftlichen Theilers.

Wenn $x = \alpha$ und $z = \beta$ ein Paar Werthe von x und z sind, welche beiden Gleichungen 1.) und 2.) genügen, so folgt, daß wenn man statt z den Werth β setzt, oder wenn man sich

unter z den Werth β denkt, die beiden Gleichungen 1.) und 2.) den gemeinschaftlichen Faktor $x-\alpha$ haben müssen. Sucht man also zwischen den Ausdrücken

$$Ax^2+Bx+C \quad \text{und} \quad Dx^3+Ex^2+Fx+G$$

den größten gemeinschaftlichen Theiler (nach §. 103.), und setzt man das Verfahren so lange fort bis der letzte Rest kein x mehr enthält, so muß solcher für $z=\beta$ der Null gleich werden. Also ist dieser letzte Rest, wenn solcher $=0$ gesetzt wird, die Gleichung, welche alle Werthe von z liefert, die in Verbindung mit einem zugehörigen Werthe von x, den beiden Gleichungen 1.) und 2.) genügen, welche daher die gesuchte Eliminations-Gleichung ist*).

III. Eine algebraische höhere Gleichung zwischen x und z, welche eben so gut nach x als nach z geordnet geschrieben werden kann, heißt von der m^{ten} **Dimension** oder von der m^{ten} **Ordnung**, wenn die Summe der Exponenten von x und von z in jedem einzelnen Gliede die Zahl m nicht übersteigt, und wenigstens in einem Gliede erreicht.

So ist
$$ay+bx+c=0$$
eine Gleichung zwischen x und y von der 1ten Dimension, oder von der ersten Ordnung. — Die Gleichung
$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$
ist dagegen von der 2ten Ordnung. Die allgemeine Gleichung der 3ten Ordnung kann noch die 4 Glieder der 3ten Dimension
$$a'y^3+b'x^2y+c'xy^2+d'x^3$$
enthalten, und muß wenigstens eines dieser vier Glieder in sich aufnehmen; u. s. w. f.

IV. Ist aber die eine der Gleichungen von der m^{ten}, die andere von der n^{ten} Dimension, so ist, wenn man x eliminirt,

*) Dieses Verfahren versagt jedoch seine Dienste, so oft bei irgend einer der Divisionen, Reste, folglich Divisoren sich ergeben, welche zu gleicher Zeit Faktoren der gesuchten Eliminations-Gleichung sind, d. h. welche unter derselben Voraussetzung, die zu dem Verfahren selbst führt, der Null gleich sind. — Wir glauben diese Bemerkung zuerst gemacht zu haben, und wir haben zu gleicher Zeit das Verfahren angezeigt (im Kap. XXI. des 2ten Theils des „Syst. d. Mathem."), welches im Praktischen befolgt werden muß, um diesem Uebelstande auszuweichen.

die Eliminations-Gleichung, nach z geordnet, höchstens vom mn^{ten} Grade.

Und eliminirt man aus drei Gleichungen zwischen x, y, z, welche bezüglich von der m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Dimension sind, die beiden Unbekannten x und y, so ist die End-Gleichung, nach z geordnet, höchstens vom mnp^{ten} Grade.

§. 114.

Hat man aber aus zwei höhern Gleichungen von der m^{ten} und n^{ten} Dimension zwischen x und y, den Unbekannten x eliminirt, und die Eliminations-Gleichung in y vom mn^{ten} Grade erhalten, so kann man letztere nach y auflösen, so daß man mn verschiedene Werthe für y erhalten kann. Zu jedem Werth β von y, findet sich dann ein Werth α von x, so daß diese zusammengehörigen Werthe α und β von x und y, beiden Gleichungen zugleich genügen. Dieser Werth α von x wird aber dadurch gefunden, daß man β statt y in die beiden gegebenen Gleichungen substituirt, dadurch zwei Gleichungen erhält, welche den einzigen Unbekannten x enthalten, und dann zwischen diesen ganzen Funktionen von x (welche der Null gleich sind) den gemeinschaftlichen Theiler sucht, letzteren aber der Null gleich setzt.

Hat man die Elimination mittelst des gemeinschaftlichen Theilers bestimmt, so darf man nur den letzten Divisor (zugleich mit dem letzten Reste) der Null gleich setzen, und man erhält sogleich den zugehörigen Werth von x.

II.

Die Elemente

der

analytischen Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von den Koordinaten. — Gleichungen der geraden Linie*).

§. 115.

Zieht man in einer Ebene zwei auf einander senkrechte Gerade OX und OY (Fig. 1.), welche auf beiden Seiten ohne Ende fortgehen, so ist die Lage eines Punktes M (oder M', oder M'', oder M''') in dieser Ebene gegeben, wenn man seine Abstände oder Koordinaten MM_1 und MM_2 von diesen geraden Koordinaten-Axen OX und OY kennt, und noch die Seite dieser letztern, nach welcher zu der Punkt M liegt. Diesen letztern Umstand geben wir dadurch zu erkennen, daß wir den absoluten Zahlen, welche die Abstände oder Koordinaten ausdrücken und welche man Koordinaten-Maaße nennen kann, noch ein + oder ein — Zeichen vorsetzen, je nachdem der Punkt M rechts oder links von OY, oberhalb oder unterhalb OX liegt. — Diese dadurch entstehenden positiven oder negativen Zahlen nennen wir aber Koordinaten-Werthe, und wir sagen noch: der Koordinaten-Werth des Punktes M sey Null, wenn der Punkt M in einer der Axen OX oder OY selber liegt. — Endlich unterscheidet man beide Koordinaten dadurch von einander, daß man eine beliebige derselben Abscisse, die andere dann Ordinate nennt. — Die Axe OX, mit welcher die Abscisse parallel läuft, oder auf welcher die Abscisse ab-

*) Wir setzen hier durchweg voraus, daß es weder positive noch negative Linien giebt, sondern daß alle Linien durch absolute Zahlen ausgedrückt werden, die weder positiv noch negativ sind. (Vgl. §. 7.)

getragen ist (in so fern nämlich $MM_2 = OM_1$ ist) heißt dann die Abscissen-Axe, die andere OY die Ordinaten-Axe.

§. 116.

Ist (Fig. 10.) ein Punkt M gegeben durch seine (positiven oder negativen) Koordinaten-Werthe x und y, so hat man allemal

1) $$OM^2 = x^2 + y^2.$$

Bezeichnen wir nun die spitzen, rechten oder stumpfen, also immer hohl gedachten Winkel MOX und MOY beziehlich durch α und β, so sind (wie die Betrachtung der Figur in allen 4 Lagen, die der Punkt M haben kann, lehrt) α spitz, so oft x positiv, und α stumpf, so oft x negativ; eben so β spitz, wenn y positiv, dagegen β stumpf, wenn y negativ. — Es ist daher in allen Fällen

2) $$\cos\alpha = \frac{x}{OM}$$ und 3) $$\cos\beta = \frac{y}{OM},$$

wo x mit $\cos\alpha$ zugleich positiv oder zugleich negativ ist, während auch y und $\cos\beta$ immer ein und dasselbe Vorzeichen haben.

Findet man aus 2.) und 3.) x und y und substituirt man diese Werthe in die 1.), so erhält man noch

4) $$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1.$$

Ferner ergiebt sich noch, wenn aus 2.) und 3.) OM eliminirt wird,

5) $$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}.$$

Endlich folgt noch

6) $$tg\,\alpha = \pm\frac{y}{x},$$

wo das + Zeichen genommen werden muß, wenn y positiv, das — Zeichen dagegen, wenn y negativ ist, so daß $tg\,\alpha$ mit x zugleich positiv oder negativ wird. — Es ist dagegen allemal und unbedingt

7)

7) $$tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$

mit dem eigenen Vorzeichen, welches $\frac{y}{x}$ in allen 4 Fällen erhält, sobald man den Winkel MOX oder α, von OX links herum nach OY hin von 0° bis zu 360° zählt, so nämlich daß $\alpha > 180°$ und $< 270°$ genommen wird, wenn M in dem Raume X′OY′ liegt, während $\alpha > 270°$ aber $< 360°$ genommen werden muß, wenn M in dem Raume XOY′ liegen sollte.

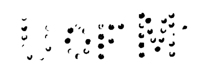
Wenn wir aber nicht in's Besondere, diese letztere Art die Winkel zu zählen, hervorheben, so werden wir in der Folge unter MOX und MOY, der Punkt M mag liegen, in welchem der 4 Räume man will, immer nur solche Winkel verstehen, welche $< 180°$ sind.

§. 117.

Sind zwei Punkte M und M′ (Fig. 7. und 8.) durch die Koordinaten-Werthe x, y und x′, y′ gegeben, wo wir $x < x'$ voraussetzen, während $y < y'$, aber auch $y > y'$ (selbst $y = y'$) seyn kann (Fig. 7. und 8.); und zieht man dann durch M die Parallele MD mit OX, so erhält man ein Dreieck MDM′.

In diesem Dreiecke ist allemal die mit OX parallele Kathete MD durch die Differenz $x' - x$ der Abscissen-Werthe; die andere, mit OY parallele Kathete DM′ dagegen allemal durch die Differenz $\pm(y' - y)$ der Ordinaten-Werthe ausgedrückt, wobei man hinsichtlich der Vorzeichen nur darauf zu sehen hat, daß keine dieser Katheten negativ wird, weil wir hier von der Ansicht ausgehen, daß es durchaus keine negativen Größen, also auch keine negativen Linien giebt. Für die Fig. 7.) gilt also das + Zeichen; im Falle der Fig. 8.) dagegen ist

$$DM' = -(y' - y) \text{ d. h. } = y - y'.$$



§. 118.

Die Entfernung MM', so wie die Winkel α_0 und β_0, welche die Richtung MM' (nicht M'M) mit den Richtungen OX und OY (nicht XO, oder YO) d. h. mit MX_1 und MY_1, wenn letztere Geraden mit den Koordinaten-Axen parallel gedacht sind, macht, findet man nun in demselben Dreiecke unmittelbar. Es ist nämlich

1) $$MM' = +\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

und

2) $$\cos\alpha_0 = \frac{x'-x}{MM'}$$ und 3) $$\cos\beta_0 = \frac{y'-y}{MM'},$$

wo $\cos\alpha_0$ mit $x'-x$ zugleich positiv oder zugleich negativ ist, während auch $\cos\beta_0$ und $y'-y$ immer ein und dasselbe Vorzeichen haben. — Ferner ist

4) $$tg\,\alpha_0 = \pm\frac{y'-y}{x'-x} = \pm\frac{y-y'}{x-x'},$$

wo aber $tg\,\alpha_0$ immer positiv genommen werden muß, in so fern wir $x' > x$ angenommen haben, und deshalb der Winkel α_0 allemal spitz seyn wird.

Zählt man aber den Winkel α_0 von MX_1 an, nach MY_1 hin bis zu 360°, so ist allemal

5) $$tg\,\alpha_0 = \frac{y'-y}{x'-x} = \frac{y-y'}{x-x'}$$

mit demselben Vorzeichen, welches der Quotient zur Rechten gerade hat.

§. 119.

Unter den Voraussetzungen des §. 118.) erhält man noch, wenn α' und β' die Winkel sind, welche OM' mit OX und OY macht, nicht bloß

1) $$OM' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

und

2) $$\cos\alpha' = \frac{x'}{OM'};$$ 3) $$\cos\beta' = \frac{y'}{OM'},$$

sondern auch noch, wenn W. MOM' $= \delta$ gesetzt wird,

4) $\cos\delta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta'$.

In dem Dreiecke MOM' ist nach dem allgemeinern pythagorischen Lehrsatze der ebenen Trigonometrie,

$$MM'^2 = OM^2 + OM'^2 - 2OM \cdot OM' \cdot \cos\delta;$$

daraus findet sich aber, wenn man statt OM, OM' und MM' ihre in x, y, x', y' ausgedrückten Werthe setzt, $\cos\delta$ sogleich.

Stehen die Geraden OM und OM' auf einander senkrecht, so ist $\cos\delta = 0$, also dann noch

5) $\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' = 0.$

Und umgekehrt, an dieser letztern Gleichung erkennt man wieder, daß OM und OM' auf einander senkrecht stehen.

§. 120.

I. Sind von zwei Punkten A und B die Koordinaten-Werthe gegeben, nämlich x' und y' für A, und x'' und y'' für B (Fig. 2. oder 3.), so ist dadurch die Lage der Geraden AB gegen die Axen völlig gegeben. Wenn man daher für einen beliebigen Punkt M in derselben Geraden AB, die Koordinaten-Werthe durch x und y bezeichnet, so ist y bekannt, sobald man x kennt (oder umgekehrt); also muß zwischen x und y, wo auch der Punkt M gedacht seyn mag, eine Gleichung existiren, und diese findet sich sehr einfach wie folgt.

Man zieht ACD und BE parallel mit der Abscissen-Axe, so entstehen drei rechtwinkliche Dreiecke, in denen die mit OX parallelen Katheten AC, AD und BE bezüglich durch $x''-x'$, $x-x'$ und $x-x''$ ausgedrückt sind, während die mit OY parallelen Katheten BC, MD und ME bezüglich durch $\pm(y''-y')$, $\pm(y-y')$ und $\pm(y-y'')$ vorgestellt sind, wo (in der Fig. 2.) alle obern (+) Zeichen zugleich, oder (in der Fig. 3.) alle untern (—) Zeichen zugleich gelten. Weil aber diese rechtwinklichen Dreiecke ähnlich sind, so hat man sogleich

1) $$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y-y''}{x-x''}.$$

Diese Gleichung, wenn man

2) $$\frac{y''-y'}{x''-x'} \text{ durch } A$$

bezeichnet, geht aber sogleich über in

3) $$y-y' = A\cdot(x-x'),$$

oder auch in

4) $$y-y'' = A\cdot(x-x''),$$

oder endlich in

5) $$y = A\cdot x + B,$$

wenn noch

6) $$\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'} \text{ durch } B$$

vorgestellt wird. — Dabei ist nach 2.) und nach §. 118. N. 5.) der Koefficient A allemal die trigonometrische Tangente des Winkels α_0, welcher diese Richtung AB (nicht BA) mit der Abscissen-Axe OX macht, sobald nur letzterer von OX nach OY hin rings herum von 0° bis zu 360° gezählt wird.

Dasselbe würde man auch erhalten, wenn der Punkt M zwischen A und B, oder links von A gedacht worden wäre, weil dann in den Quotienten in 1.), Zähler und Nenner zugleich ihr + oder — Zeichen wechseln oder zugleich sie behalten, wie die Betrachtung der Figur in diesem Falle augenblicklich sehen läßt.

Jede dieser Gleichungen giebt zu jedem beliebigen (positiven oder negativen oder Null-) Werth von x, den zugehörigen (positiven oder negativen oder Null-) Werth von y; oder umgekehrt zu jedem Werth von y, den zugehörigen Werth von x. — Jede dieser Gleichungen wird daher die Gleichung der Geraden AB genannt, weil man aus ihr so viel Punkte der Geraden als man nur immer will, durch ihre Koordinaten-Werthe ausgedrückt, finden kann.

II. Umgekehrt: Ist eine algebraische Gleichung zwischen x und y von der ersten Dimension gegeben z. B.

$$ay + bx + c = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$

wo $-\frac{b}{a}$ und $-\frac{c}{a}$ beliebige reelle Zahlen seyn mögen, und betrachtet man in ihr x und y als zusammengehörige Koordinaten-Werthe eines Punktes M in der Ebene, so giebt diese Gleichung unendlich-viele Paare reeller zusammengehöriger Werthe von x und y, und jedes dieser Paare giebt einen Punkt in der Ebene, und alle diese Punkte liegen in einer und derselben Geraden AB, während A und B irgend zwei dieser Punkte sind.

1) Und ist $c = 0$, so geht dieselbe Gerade durch den Ursprung O der Koordinaten, weil die Gleichung dann für $x = 0$ auch $y = 0$ liefert.

2) Und ist $b = 0$, also bloß $y = -\frac{c}{a}$, so läuft dieselbe Gerade mit der Abscissen-Axe OX parallel und ist von ihr um $\pm\frac{c}{a}$ entfernt, und sie liegt oberhalb OX, wenn $-\frac{c}{a}$ positiv ist, und unterhalb OX, wenn $-\frac{c}{a}$ negativ wird.

3) Ist aber $a = 0$, so liefert die Gleichung zu jedem Werthe von y immer einen und denselben Werth von x, nämlich $x = -\frac{c}{b}$. Dann läuft also die durch die Gleichung $ay + bx + c = 0$ gegebene Gerade mit der Ordinaten-Axe OY parallel und rechts von letzterer, wenn $-\frac{c}{b}$ positiv ist, dagegen links von letzterer, wenn $-\frac{c}{b}$ negativ wird.

4) Ist $b = 0$ und $c = 0$, so drückt dieselbe Gleichung die Abscissen-Axe selbst aus. — Ist aber $a = 0$ und $c = 0$, so drückt die gedachte Gleichung $ay + bx + c = 0$, welche jetzt $x = 0$ wird, die Ordinaten-Axe OY aus, weil zu jedem Werth von y, der zugehörige Werth von x der Null gleich wird.

§. 121.

I. Stellt $ay + bx + c = 0$ oder $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ eine Gerade vor, so ist $-\frac{b}{a}$ die Tangente des Winkels α, den solche mit der Abscissen-Axe OX macht (nach §. 118. N. 5.). — So lange also der Koefficient $-\frac{b}{a}$ denselben Werth behält, so bleiben doch, wie auch der Werth von c oder von $-\frac{c}{a}$ sich ändern mag, die durch $ay + bx + c = 0$ vorgestellten Geraden alle mit einander parallel.

II. Soll eine Gerade durch einen, mittelst der Koordinaten-Werthe x' und y' gegebenen Punkt gehen, und mit der durch die Gleichung $y = ax + b$ gegebenen Geraden parallel laufen, so ist ihre Gleichung $y - y' = a \cdot (x - x')$.

Denn ihre Gleichung ist offenbar so: $y = ax + b_1$ während sie für $x = x'$ sogleich $y = y'$ geben muß, so daß noch $y' = ax' + b_1$ ist, woraus b_1 sich bestimmt.

So laufen also die beiden durch die Gleichungen

$$y = 2x - 7 \quad \text{und} \quad y = 2x + 3$$

vorgestellten Geraden mit einander parallel, weil in beiden Gleichungen die Koefficienten von y und x dieselben sind. — Die Differenz der beiden y, die zu einerlei aber beliebigem x gehören, ist hier $= 10$; so weit stehen also diese beiden parallelen Geraden von einander ab, sobald man die Abstände nicht senkrecht auf diese Geraden, sondern parallel mit OY nimmt.

III. Ist in zweien durch die Gleichungen

$$1) \quad y = a_1 x + b_1 \quad \text{und} \quad 2) \quad y = a_2 x + b_2$$

gegebenen Geraden, a_1 von a_2 verschieden, so schneiden sich diese beiden Geraden nothwendig in einem Punkte P; und weil dieser Punkt P in beiden Geraden zugleich liegt, so genügen seine Koordinaten-Werthe beiden Gleichungen 1.) und 2.) zugleich, wenn solche bezüglich statt x und y gesetzt werden. Also findet man diese Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Durchschnitts-Punktes P, wenn man in beiden Gleichungen 1.) und 2.) nicht bloß die x, sondern auch die zugehörigen y als dieselben, näm-

lich als x und y sich denkt, und unter dieser Voraussetzung die Gleichungen nach x und nach y algebraisch auflöst. Man findet dann

$$3)\quad x = -\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \quad \text{und} \quad 4)\quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$$

für die Koordinaten-Werthe des Durchschnitts-Punkts P.

IV. Will man den Winkel ψ finden, welche die beiden durch die Gleichungen

$$1)\quad y = a_1 x + b_1 \quad \text{und} \quad 2)\quad y = a_2 x + b_2$$

gegebenen Geraden A_1B_1 und A_2B_2 (Fig. 4.) mit einander machen, so legt man zuerst durch O zwei andere Gerade, A_3B_3 mit A_1B_1, und A_4B_4 mit A_2B_2 parallel. Dann sind die Gleichungen dieser letztern beiden Geraden (nach I.) offenbar

$$3)\quad y = a_1 x \quad \text{und} \quad 4)\quad y = a_2 x,$$

während diese letztern Geraden denselben Winkel $\psi (= MOM_1)$ mit einander bilden. Nimmt man nun $x = OP = 1$, so berechnet sich (aus 3.) $PM = a_1 \cdot 1 = a_1$ und (aus 4.) $-PM_1 = a_2 \cdot 1 = a_2$ dazu. Dann hat man auch $MM_1 = a_1 - a_2$ und $OM = \sqrt{1 + a_1^2}$ und $OM_1 = \sqrt{1 + a_2^2}$. Sind aber die drei Seiten OM, OM_1 und MM_1 des Dreiecks OMM_1 bekannt, so berechnet sich der Winkel ψ oder MOM_1 aus der, unter dem Namen des allgemeinern pythagorischen Lehrsatzes bekannten trigonometrischen Formel

$$MM_1^2 = OM^2 + OM_1^2 - 2OM \cdot OM_1 \cdot \cos\psi,$$

welche sogleich finden läßt

$$\cos\psi = \frac{1 + a_1 \cdot a_2}{\sqrt{1 + a_1^2} \cdot \sqrt{1 + a_2^2}}.$$

V. Will man die Gleichung einer geraden Linie finden, welche mit der gegebenen Geraden

$$y = a_1 x + b_1$$

einen gegebenen Winkel ψ macht, und noch durch einen Punkt D hindurch geht, dessen Koordinaten-Werthe x' und y' gegeben sind — so ist diese gesuchte Gleichung die nachstehende

$$y - y' = a_2 \cdot (x - x'),$$

sobald a_2 aus der Gleichung

$$\cos\psi = \frac{1+a_1 a_2}{\sqrt{1+a_1^2}\cdot\sqrt{1+a_2^2}}$$

bestimmt wird, so daß a_2 zwei Werthe bekommt. — Und in der That gehen durch einen gegebenen Punkt zwei Gerade, welche mit einer gegebenen Geraden einen und denselben Winkel ψ machen.

VI. Wird aber eine Gerade gesucht, welche auf der durch die Gleichung

$$y = ax + b$$

gegebenen Geraden A_1B_1 (Fig. 4.) senkrecht steht und noch durch den, mittelst seiner Koordinaten-Werthe x' und y' gegebenen Punkt D hindurch geht, so ist ihre Gleichung

$$y - y' = -\frac{1}{a}\cdot(x - x')\ ^{*}).$$

Sucht man aber die Länge DH des Perpendikels, so muß man vor allen Dingen die Koordinaten-Werthe x und y des Durchschnitts-Punktes H suchen, welchen die durch die Gleichungen

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad (y - y') = -\frac{1}{a}(x - x')$$

---

*) Dies erhellet aus V.), wenn man daselbst $\cos\psi = 0$ setzt, welches $1 + a_1\cdot a_2 = 0$, also $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ liefert. Man kann dasselbe aber auch direkt aus der Figur 4.) ableiten. Ist nämlich A_1B_1 die erstere Gerade $y = ax + b$, so ist die mit A_1B_1 parallele Gerade A_3B_3 gegeben durch die Gleichung $y = ax$; ist also $OP = x$, so ist $PM = ax$. Wird nun $-PM_1$ durch y' bezeichnet, während A_4B_4 auf A_3B_3 senkrecht stehen soll, so hat man in dem rechtwinklichen Dreieck M_1OM

$$PM_1 : OP = OP : MP, \text{ d. h. } -y' : x = x : ax,$$

d. h.

$$y' = -\frac{1}{a}x.$$

Dies ist also die Gleichung der Geraden A_4B_4. Geht nun A_2B_2 mit A_4B_4 parallel und durch den Punkt D, so ist die Gleichung dieser Geraden A_2B_2 (nach II.)

$$y - y' = -\frac{1}{a}\cdot(x - x').$$

gegebenen Geraden A_1B_1 und A_2B_2 mit einander gemein haben. Nach III.) findet sich aber

$$\mathfrak{x} = \frac{(y'-b)a+x'}{a^2+1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{y} = \frac{y'a^2+x'a+b}{a^2+1}.$$

Hat man nun $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gefunden, so ist (nach §. 118. N. 1.)

$$DH = \sqrt{(\mathfrak{x}-x')^2+(\mathfrak{y}-y')^2}.$$

Die Rechnung führt sich jedoch noch leichter durch, wenn man hier herein statt $\mathfrak{y}-y'$ sogleich seinen Werth aus der Gleichung der Senkrechten substituirt; dies giebt

$$DH = (\mathfrak{x}-x')\cdot\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{\mathfrak{x}-x'}{a}\cdot\sqrt{1+a^2},$$

während
$$\mathfrak{x}-x' = \frac{a(y'-b)-a^2x'}{1+a^2}$$

ist, so daß man zuletzt

$$DH = \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$$

findet, wo $\sqrt{1+a^2}$ positiv oder negativ genommen werden muß, je nachdem der Zähler positiv oder negativ wird, damit DH immer durch eine absolute Zahl ausgedrückt sich finde.

Anmerkung. Will man die Länge des Perpendikels OK finden, von O aus auf die durch die Gleichung $y = ax+b$ gegebene Gerade A_1B_1, so darf man nur in vorstehendem Ausdruck $x' = y' = 0$ setzen. Man erhält daher

$$OK = \frac{-b}{\sqrt{1+a^2}},$$

wo derjenige Werth von $\sqrt{1+a^2}$ genommen wird, der für OK eine absolute Zahl liefert.

Ist aber die Gerade A_1B_1 (Fig. 9.) durch die Gleichung

$$ay+bx+c=0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$$

gegeben, so muß man in dem Vorstehenden, $-\frac{c}{a}$ statt b, und $-\frac{b}{a}$ statt a setzen, und man erhält dann die senkrechte Entfernung

$$OK = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Und weil die Gleichung für $x = 0$, noch $y = -\frac{c}{a}$ und für $y = 0$, noch $x = -\frac{c}{b}$ liefert, so hat man (Fig. 9.)

$$OA = -\frac{c}{a} \text{ und } OB = -\frac{c}{b}, \text{ also } AB = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

— Sind nun α_0 und β_0 die Winkel, welche die Richtung A_1B_1, (nicht B_1A_1) mit den Koordinaten-Axen OX und OY macht, und sind α, β die Winkel, welche die Senkrechte OK mit denselben Axen macht, so hat man

$$\alpha = 180^\circ - \beta_0 \quad \text{und} \quad \beta = \alpha_0,$$

$$\cos\beta = \cos\alpha_0 = \frac{OB}{AB} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta_0 = \frac{OA}{AB} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dividirt man daher die Gleichung der Geraden A_1B_1, nämlich

$$ay + bx + c = 0,$$

durch $\sqrt{a^2 + b^2}$, und bezeichnet man durch d die Entfernung OK derselben Geraden von O, so nimmt die Gleichung der Geraden A_1B_1 die Form an

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta = d,$$

wo α und β die Winkel sind, welche die Senkrechte OK mit den Koordinaten-Axen OX und OY machen.

Dieselbe Gleichung giebt aber sogleich der bloße Anblick der Figur (9.), wenn man für einen beliebigen Punkt M der Geraden A_1B_1 die Abscisse $OP = x$ und die Ordinate $PM = y$ auf die Senkrechte OK oder d projicirt, in so fern sogleich

$$x \cdot \cos\alpha = OS \quad \text{und} \quad y \cdot \cos\beta = MR = SK$$

wird.

So findet man also augenblicklich die Gleichung einer Geraden, deren Entfernung OK von dem Ursprunge O der Axen bekannt ist, und wenn man die Winkel noch kennt, welche diese Senkrechte OK mit den Axen OX und OY macht.

§. 122.

I. Führt man eine neue Ordinaten-Axe $O'Y_1$ (Fig. 5.) parallel mit OY ein, welche gegeben ist durch den Abscissen-Werth p, so ist der neue Abscissen-Werth eines beliebigen Punktes M, $= x - p$, wenn der alte Abscissen-Werth desselben Punktes M durch x ausgedrückt ist. — Und dieses weist sich allemal so aus, es mag p positiv oder negativ seyn, d. h. $O'Y_1$ mag rechts oder links von OY gedacht werden.

II. Führt man eine neue Abscissen-Axe $O''X_1$ ein, parallel mit der alten OX, und durch den Ordinaten-Werth q gegeben, so ist der neue Ordinaten-Werth des Punktes M, $= y - q$, wenn der alte Ordinaten-Werth desselben Punktes M durch y ausgedrückt gewesen ist.

III. Führt man daher zwei neue Koordinaten-Axen O_1X_1 und O_1Y_1 ein, parallel mit den alten Axen OX und OY, und legt man solche durch einen Punkt O_1, dessen Koordinaten-Werthe p und q sind, so sind die neuen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M bezüglich durch $x - p$ und $y - q$ ausgedrückt, wenn die alten Koordinaten-Werthe desselben Punktes M durch x und y ausgedrückt worden sind.

Dies kann man auch dazu benutzen, einige der Wahrheiten der vorhergehenden Paragraphen näher zu beleuchten. — Will man z. B. eine Gerade ausdrücken, welche durch einen, mittelst der Koordinaten-Werthe p und q gegebenen Punkt A (Fig. 2. oder 3.) hindurch geht, so denke man sich durch A neue Koordinaten-Achsen AX_1 und AY_1 parallel mit den alten OX und OY gelegt; und es sind dann die neuen Koordinaten-Werthe AD und DM eines Punktes M bezüglich $x - p$ und $y - q$, wenn die alten, von O aus genommenen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M durch x und y ausgedrückt werden. Nun ist aber $DM = AD \cdot tg\,\alpha$, also $y - q = (x - p) \cdot tg\,\alpha$, wenn α den Winkel DAM vorstellt, welchen die Gerade mit der Abscissen-Axe machen soll. — Also findet man wieder

$$y - q = tg\,\alpha \times (x - p)$$

als die Gleichung zwischen x und y für jeden Punkt M der Geraden AB, während x und y die alten von O aus genommenen Koordinaten-Werthe des beliebigen Punktes M vorstellen. —

Bezeichnet man aber die neuen, von A aus genommenen Koordina-

ten-Werthe desselben beliebigen Punktes M durch x_1 und y_1, so ist die neue Gleichung derselben Geraden AM diese einfachere

$$\frac{y_1}{x_1} = tg\alpha \quad \text{oder} \quad y_1 = x_1 \cdot tg\alpha,$$

welche wiederum für jeden Punkt M der Geraden AB statt findet.

§. 123.

I. Sind dagegen x_1 und y_1 die, auf die Axen O_1X_1 und O_1Y_1 (Fig. 6.) bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M der Ebene, und führt man neue auf einander senkrechte Koordinaten-Axen O_1U und O_1V ein, so daß letztere Axen mit ersteren bezüglich den Winkel ψ bilden, wo ψ von OX_1 nach OY_1 hin von 0° bis 360° gezählt werden soll; sind ferner u und v die neuen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M, so hat man allemal zwischen x_1, y_1, u und v die beiden Gleichungen

1) $x_1 = u \cdot cos\psi - v \cdot sin\psi$ und $y_1 = u \cdot sin\psi + v \cdot cos\psi$,

aus welchen umgekehrt wieder gefunden wird

2) $u = x_1 \cdot cos\psi + y_1 \cdot sin\psi$ und $v = -x_1 \cdot sin\psi + y_1 \cdot cos\psi$.

Durch diese Gleichungen sind aber die alten Koordinaten-Werthe x_1 und y_1 in die neuen u und v, und diese letzteren wieder in die ersteren ausgedrückt.

Man findet die Resultate 1.) augenblicklich, wenn man u oder O_1Q, und v oder MQ, auf die Richtungen O_1P_1 und P_1M projicirt, d. h. wenn man QB und QD bezüglich auf O_1P_1 und P_1M senkrecht zieht. — Die Gleichungen 2.) erhält man dagegen entweder auf algebraischem Wege, dadurch, daß man die beiden Gleichungen 1.) nach u und v auflöst; — oder auch direkt aus der Figur, wenn man x oder O_1P_1, und y oder P_1M, auf die Richtungen O_1Q und QM projicirt, d. h. wenn man P_1A und P_1C auf diese letzt genannten Richtungen senkrecht zieht.

Endlich kann man beide Paare von Gleichungen (1. und 2.) als bereits in der Anmerkung zu §. 121.) gefunden ansehen, weil man jede dieser 4 Ordinaten als eine von O_1 aus auf eine Gerade gezogene Senkrechte betrachten kann.

Dieselben Formeln 1.) oder 2.) ergeben sich aber am allgemeingültigsten, wenn man die Winkel MO_1X_1 und MO_1Y_1 bezüglich durch δ und δ' bezeichnet, so wie die Winkel MO_1U und MO_1V durch ε und ε', und nun von der allgemeingültigen

Gleichung (§. 119. N. 4.) ausgeht, nach welcher, wenn α und β die Winkel sind, welche O_1U mit O_1X_1 und O_1Y_1 macht, und wenn eben so α' und β' die Winkel vorstellen, welche O_1V mit O_1X_1 und O_1Y_1 bildet, allmal ist

$$\cos\delta = \cos\varepsilon\cdot\cos\alpha + \cos\varepsilon'\cdot\cos\alpha'$$
$$\cos\delta' = \cos\varepsilon\cdot\cos\beta + \cos\varepsilon'\cdot\cos\beta'.$$

Es ist nämlich, wenn $O_1M = r$ gesetzt wird, eben so allgemein gültig (nach §. 116.)

$$\cos\delta = \frac{x_1}{r},\quad \cos\delta' = \frac{y_1}{r},\quad \cos\varepsilon = \frac{u}{r}\quad \text{und}\quad \cos\varepsilon' = \frac{v}{r};$$

setzt man daher diese Werthe in die vorstehenden Gleichungen, so findet man

$$1)\qquad x_1 = u\cdot\cos\alpha + v\cdot\cos\alpha'$$
$$2)\qquad y_1 = u\cdot\cos\beta + v\cdot\cos\beta',$$

während unter den gemachten Voraussetzungen, für jede Lage,

$$\cos\alpha = \cos\psi,\qquad \cos\alpha' = -\sin\psi,$$
$$\cos\beta = \sin\psi \text{ und } \cos\beta' = \cos\psi$$

gefunden wird.

II. Sind aber x und y die auf die Axen OX und OY (Fig. 6.) bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M der Ebene; ist ferner ein Punkt O_1 gegeben durch seine Koordinaten-Werthe p und q; und werden durch O_1 neue auf einander senkrechte Koordinaten-Axen O_1U und O_1V gelegt, welche mit den alten Axen OX und OY, oder mit den durch O_1 mit letzteren parallel gedachten Geraden O_1X_1 und O_1Y_1 bezüglich den Winkel ψ machen, wo ψ von O_1X_1 nach O_1Y_1 hin von 0° bis zu 360° gezählt werden soll; sind endlich wieder die neuen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M durch u und v bezeichnet, so hat man allemal

$$1)\ x = p + u\cdot\cos\psi - v\cdot\sin\psi \text{ und } y = q + u\cdot\sin\psi + v\cdot\cos\psi;$$

und daraus findet sich dann wiederum umgekehrt

$$2)\ \begin{cases} u = (x-p)\cdot\cos\psi + (y-q)\cdot\sin\psi \\ \text{und } v = -(x-p)\cdot\sin\psi + (y-q)\cdot\cos\psi, \end{cases}$$

so daß wiederum die alten Koordinaten-Werthe in die neuen, und auch umgekehrt die neuen in die alten ausgedrückt sich sehen.

Solches folgt aber unmittelbar aus I.) in so fern jetzt (nach §. 122.) $x-p$ statt x_1, und $y-q$ statt y_1 gesetzt werden muß.

§. 124.

Von den schiefwinklichen Koordinaten-Axen.

I. Man kann auch die Koordinaten-Axen OX und OY unter einem schiefen Winkel $XOY = \varphi$ (Fig. 1.) sich schneiden lassen. Ein Punkt M ist dann durch die mit OX und OY parallelen Abstände $MM_2 = OM_1$ und $MM_1 = OM_2$ gegeben, welche in Zahlen ausgedrückt werden, während diesen letztern wiederum das $+$ oder $-$ Zeichen vorgesetzt wird, um die Lage des Punktes mittelst dieser schiefwinklichen Koordinaten-Werthe näher und völlig zu bestimmen.

II. Dann ist aber, wenn für einen Punkt M (Fig. 10.) $OP = x$, $PM = y$ gesetzt wird, das Dreieck OPM nicht mehr bei P rechtwinklich, sondern es ist W. $OPM = 180^\circ - \varphi$; daher gelten nun die Gleichungen des §. 116.) hier nicht mehr. Dagegen findet sich jetzt

$$OM^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\varphi.$$

III. Aber es gelten die Resultate des §. 117.) hier ganz eben so; d. h. sind zwei Punkte M und M′ (Fig. 7. oder 8.) durch ihre Koordinaten-Werthe x, y und x', y' gegeben, und zieht man die Parallelen mit den Axen, so entsteht ein Dreieck MDM′, und in selbigem ist allemal

1) die mit OX parallele Seite $MD = x' - x$;

2) die mit OY parallele Seite $DM' = \pm(y' - y)$,

während W. $MDM' = 180^\circ - \varphi$ oder $= \varphi$ seyn muß.

IV. Statt der Resultate des §. 118.) erhält man dann

aus diesem Dreieck MDM', mittelst des allgemeinern pythagorischen Lehrsatzes

$$MM' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-y)(y'-y)\cdot cos\varphi}.$$

V. Sind wie im §. 120.) zwei Punkte A und B (Fig. 2. und 3.) (immer unter der Voraussetzung, daß W. XOY $=\varphi$ ist) durch ihre schiefwinklichen Koordinaten-Werthe x', y' und x'', y'' gegeben, und bezeichnet man durch x und y wiederum die Koordinaten-Werthe eines beliebigen dritten Punktes M dieser Geraden AB, so ist genau wie im §. 120. I.) und aus genau denselben Gründen:

$$y = Ax + B,$$

wenn $\frac{y''-y'}{x''-x'} = A$ und $\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'} = B$

gesetzt wird, während dieselbe Gleichung auch wiederum in den Formen

$$y-y' = A\cdot(x-x') \quad \text{oder} \quad y-y'' = A\cdot(x-x'')$$

erscheinen kann; aber der Koefficient A ist jetzt nicht mehr die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die gedachte Gerade mit OX macht; sondern A ist jetzt das Verhältniß, d. h. der Quotient der Sinus der Winkel α und β, welche die Gerade mit beiden Axen OX und OY macht.

VI. Ferner drückt umgekehrt die Gleichung

$$ay+bx+c=0$$

noch allemal eine Gerade aus, wenn auch unter x und y schiefwinkliche Koordinaten-Werthe verstanden werden. — Desgleichen gelten alle unter §. 120. II.) noch aufgeführten Einzelnheiten hier ganz unverändert.

VII. Auch sind zwei durch die Gleichungen

$$ay+bx+c=0 \quad \text{und} \quad a'y+b'x+c'=0$$

gegebene Gerade mit einander parallel, so oft $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ ist, wenn auch W. XOY $=\varphi$ gedacht wird. Und umgekehrt.

Denn es ist (nach V. und VI.) $-\frac{b}{a} = \frac{y''-y'}{x''-x'}$, wenn x', y' und

x'', y'' die Koordinaten-Werthe zweier Punkte A und B (Fig. 2. u. 3.) der, durch die erstere Gleichung $ay+bx+c=0$ gegebenen Geraden vorstellen. Wenn nun auch dieser Quotient $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ nicht mehr die Tangente des Winkels vorstellt, welchen die Gerade AB mit OX macht, so drückt er doch im Dreieck ACB das Verhältniß, d. h. den Quotienten der Seiten BC und AC, folglich das Verhältniß der Sinus der Gegen-Winkel BAC und ABC zu einander aus. So lange aber das Verhältniß der Sinus dieser Winkel dasselbe bleibt, so lange bleiben auch diese Winkel dieselben; also laufen diese Geraden, wenn sie nicht in eine und dieselbe zusammenfallen, doch mit einander parallel.

VIII. Der Durchschnitts-Punkt zweier durch die Gleichungen

$$1)\quad y=a_1x+b_1 \quad \text{und} \quad 2)\quad y=a_2x+b_2$$

gegebenen Geraden wird genau wie im §. 121. II.) gefunden, nur daß auch die Koordinaten-Werthe x und y desselben, mit OX und OY parallel gedacht sind, also nicht auf einander senkrecht stehen. — Aus der Form der Werthe

$$x=-\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1} \quad \text{und} \quad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-a_1}$$

geht zugleich auch hervor, daß dieser Durchschnitts-Punkt *nicht* existirt, so oft der Nenner Null wird. — Daraus folgt am entschiedensten, daß die Linien parallel sind, so oft $a_1=a_2$ ist, so daß die Deduktion in VII.) als ganz überflüssig erscheint.

Um den Winkel ψ zu finden, welchen die beiden Geraden 1.) und 2.) (d. h. A_1B_1 und A_2B_2 in Fig. 4.) mit einander machen, nimmt man wieder lieber die Geraden

$$3)\quad y=a_1x \quad \text{und} \quad 4)\quad y=a_2x$$

(d. h. A_3B_3 und A_4B_4 in Fig. 4.), welche mit den ersteren parallel laufen, und sucht den Winkel ψ, den letztere mit einander machen. Dann findet sich wieder für $OP=1$, $MM_1=a_1-a_2$. Dagegen werden OM und OM_1 etwas anders als im §. 121. III.), nämlich (nach IV.)

$$OM=\sqrt{1+a_1{}^2+2a_1\cdot\cos\varphi}$$

und

$$OM_1=\sqrt{1+a_2{}^2+2a_2\cdot\cos\varphi}.$$

Des-

Deshalb findet man dasmal, indem der Weg des §. 121. III.) weiter verfolgt wird,

$$\cos\psi = \frac{1 + a_1 \cdot a_2 + (a_1 + a_2)\cos\varphi}{\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cdot \cos\varphi} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \cdot \cos\varphi}}.$$

Wird aus der Gleichung $\cos\psi = 0$, d. h.

$$1 + a_1 \cdot a_2 + (a_1 + a_2) \cdot \cos\varphi = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1 + a_1 \cdot \cos\varphi}{a_1 + \cos\varphi}$$

gefunden, so steht die zweite Gerade A_2B_2 auf der ersten Geraden A_1B_1 senkrecht. (Vgl. §. 121. V.)

IX. Was im §. 122.) für rechtwinkliche Axen gesagt ist, findet für schiefwinkliche Axen unverändert statt. — Ist nämlich (Fig. 5.) W. $XOY = \varphi$, sind x und y die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M in Bezug auf die Koordinaten-Axen OX und OY; legt man endlich durch einen Punkt O_1, dessen Koordinaten-Werthe p und q seyn mögen, neue Koordinaten-Axen O_1X_1 und O_1Y_1 mit den alten Axen OX und OY bezüglich parallel; so sind die neuen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M bezüglich $x-p$ und $y-q$.

X. Will man dagegen überhaupt neue Koordinaten-Axen O_1U und O_1V (Fig. 11.) einführen, welche durch einen beliebigen Punkt O_1, dessen Koordinaten-Werthe p und q seyn mögen, hindurch gehen, und welche ganz beliebig liegen, also auch unter sich einen ganz beliebigen Winkel φ' bilden, der vom Winkel $XOY = \varphi$ ganz unabhängig ist, und sucht man wieder die beiden Gleichungen, welche zwischen den alten Koordinaten-Werthen x und y und den neuen Koordinaten-Werthen u und v eines und desselben Punktes M statt finden, so thut man am Besten, das Verfahren des §. 123.), wo dieselbe Aufgabe unter der Voraussetzung von bloß rechtwinklichen Koordinaten-Axen gelöst sich findet, ganz zu verlassen, und das nachstehende, ganz allgemeine zu befolgen.

Man giebt nämlich die beiden neuen Koordinaten-Axen O_1U und O_1V durch die Gleichungen

1) $y_1 - q = a_1(x_1 - p)$ und 2) $y_2 - q = a_2(x_2 - p)$, wo x_1 und y_1 die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes von O_1U, und wo x_2, y_2 die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes von O_1V vorstellen, so daß also (nach IX) der Winkel UO_1V oder φ', den diese neuen Koordinaten-Axen mit einander machen, aus der Gleichung

$$3) \qquad \cos\varphi' = \frac{1 + a_1 \cdot a_2 + (a_1 + a_2)\cos\varphi}{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

berechnet werden kann, wenn der Kürze wegen

4) $\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cdot \cos\varphi} = \alpha_1$ und $\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \cdot \cos\varphi} = \alpha_2$

gesetzt wird. — Hernach legt man durch den Punkt M die Geraden A_5B_5 und A_6B_6 bezüglich mit O_1U und O_1V parallel, so sind die Gleichungen dieser Geraden (nach VII.)

5) $y_5 - y = a_1 \cdot (x_5 - x)$ und 6) $y_6 - y = a_2 \cdot (x_6 - x)$; wenn x_5 und y_5 die Koordinaten-Werthe der Punkte von A_5B_5, dagegen x_6, y_6 die Koordinaten-Werthe der Punkte von A_6B_6 vorstellen.

Nun findet man (nach VIII.) aus den Gleichungen 1.) und 6.) die Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Punktes Q; eben so aus 2.) und 5.) die Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ des Punktes R. Daraus dann (nach IV)

$$O_1Q = u = \sqrt{(\mathfrak{x} - p)^2 + (\mathfrak{y} - q)^2 + 2(\mathfrak{x} - p)(\mathfrak{y} - q) \cdot \cos\varphi}$$

oder

$$MR = u = \sqrt{(\mathfrak{x}' - x)^2 + (\mathfrak{y}' - y)^2 + 2(\mathfrak{x}' - x)(\mathfrak{y}' - y) \cdot \cos\varphi.}$$

Und eben so noch

$$O_1R = v = \sqrt{(\mathfrak{x}' - p)^2 + (\mathfrak{y}' - q)^2 + 2(\mathfrak{x}' - p)(\mathfrak{y}' - q) \cdot \cos\varphi}$$

oder

$$QM = v = \sqrt{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2 + 2(\mathfrak{x} - x)(\mathfrak{y} - y) \cdot \cos\varphi};$$

und so hat man zuletzt die beiden gesuchten Gleichungen gefunden. Die End-Resultate der Rechnung werden aber

$$5) \qquad u = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} \cdot [y - q - a_2(x - p)]$$

und

6) $$v = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} \cdot [y - q - a_1(x - p)]$$

woraus sich umgekehrt

7) $$x = p + \frac{1}{\alpha_1} \cdot u + \frac{1}{\alpha_2} v$$

und

8) $$y = q + \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot u + \frac{a_2}{\alpha_2} v$$

ergiebt, wo α_1 und α_2 die in 4.) stehenden Quadrat-Wurzeln vorstellen und positiv oder negativ genommen werden können. Ob aber der positive oder der negative Werth von α_1 und α_2 genommen werden müsse, das hängt davon ab, welche von O_1 gehende Richtung, ob O_1U oder O_1U', und ob O_1V oder O_1V' als die positiven Richtungen der neuen Koordinaten-Axen angenommen werden.

Und wären die Koordinaten-Werthe p und q des Punktes O_1, durch welchen die neuen Axen gelegt werden, nicht gegeben, sondern diese neuen Axen bloß durch die Gleichungen

9) $y_1 = a_1 x_1 + b_1$ und 10) $y_2 = a_2 x_2 + b_2$,

so wären p und q die Koordinaten-Werthe des Durchschnitts-Punktes dieser beiden Geraden; und deshalb hätte man

11) $$p = -\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$ und 12) $$q = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}.$$

Dies geht zugleich auch hervor, wenn man die Gleichungen 1.) und 2.) mit denen 9.) und 10.) vergleicht, weil man aus dieser Vergleichung erhält

13) $q - a_1 p = b_1$ und 14) $q - a_2 p = b_2$,

woraus sich p und q genau eben so finden, wie solche in 11.) und 12.) stehen.

§. 125.

Von den Polar-Koordinaten.

Um die Lage eines Punktes M (Fig. 5.) zu bestimmen, gebraucht man auch zuweilen den Winkel $\varphi = MO_1X_1$ aber

im Bogen ausgedrückt für den Radius 1, und von O_1X_1 nach OM hin von 0 bis 2π gezählt, und dann noch die Länge $OM = r$.

Sind aber x_1 und y_1 die auf die rechtwinklichen Koordinaten-Axen O_1X_1 und O_1Y_1 bezogenen Koordinaten-Werthe eines und desselben Punktes M, so hat man sogleich

1) $x_1 = r \cdot \cos\varphi$ und 2) $y_1 = r \cdot \sin\varphi$,

also 3) $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Sind aber OX und OY die ursprünglichen Koordinaten-Axen, und ist, auf diese bezogen, der Pol O_1 durch die Koordinaten-Werthe p und q gegeben; läuft endlich O_1X_1 mit OX parallel, und ist $MOX_1 = \varphi$ und $OM = r$; sind endlich x und y die aus O genommenen rechtwinklichen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M; — so hat man

4) $x = p + r \cdot \cos\varphi$ und 5) $y = q + r \cdot \sin\varphi$.

also 6) $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.

Auch hier bei diesen Polar-Koordinaten kann man, während r immer positiv bleibt, durch φ theils positive, theils negative Zahlen vorstellen, um die Richtung anzudeuten, in welcher diese Koordinate genommen werden soll. In so fern muß man auch bei φ die Koordinate, die nie positiv und nie negativ ist, von dem Koordinaten-Werthe unterscheiden, worunter bald positive bald negative Zahlen verstanden werden.

Setzt man aber statt φ irgend einen negativen Werth $-v$, oder statt φ den positiven Werth $2\pi - v$, so behält $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, nach den Regeln der Trigonometrie, doch immer einen und denselben Werth, weshalb die Formeln 1.—6.) unverändert richtig bleiben, man mag φ negativ oder positiv nehmen, wenn man nur immer denselben Punkt M in der Ebene hat.

Zweites Kapitel.

Von den ebenen krummen Linien; in's Besondere von den Kegelschnitten.

§. 126.

I. Giebt eine beliebige Gleichung $f_{x,y} = 0$ zwischen x und y, zu einer Reihe stetig neben einander liegender reeller Werthe von x, zugehörige reelle Werthe von y, so drückt diese Gleichung allemal eine Reihe stetig neben einander liegender Punkte aus, sobald man unter x und y Koordinaten-Werthe versteht. Dieselbe Gleichung drückt also unter dieser Voraussetzung allemal eine Linie aus, welche im Allgemeinen krumm seyn wird. — Die Gleichung $f_{x,y} = 0$ nennt man nun die **Gleichung dieser (geraden oder) krummen Linie.**

Die Gleichung $xy = 4$ giebt z. B. die krumme Linie der Fig. 13.), die aus zwei abgesonderten Theilen besteht, und die wir später als zu den Hyperbeln gehörig erkennen werden.

Die Gleichung $y = e^x$ oder $x = log\,y$ giebt dagegen die krumme Linie der Fig. 14.).

Die Gleichung $y = sin\,x$ die krumme Linie der Fig. 15.). —

II. Führt man neue Koordinaten-Axen ein, so daß x und y die alten, u und v dagegen die neuen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M der Ebene sind, so finden zwischen x, y, u und v allemal zwei Gleichungen statt, durch welche die alten Koordinaten-Werthe in die neuen ausgedrückt werden können. Gehört nun der Punkt M zu der durch die Gleichung $f_{x,y} = 0$ gegebenen (geraden oder) krummen Linie, so kann man in sie statt x und y diese ihre Werthe setzen und man erhält dann sogleich eine neue Gleichung $\psi_{u,v} = 0$ zwischen den neuen

Koordinaten-Werthen u und v desselben Punktes M, also eines jeden Punktes derselben (geraden oder) krummen Linie. — Die Gleichung $\psi_{u,v}=0$ ist also wiederum die Gleichung derselben (geraden oder) krummen Linie, aber auf diese neuen Axen bezogen.

III. Sind die alten Koordinaten-Axen rechtwinkliche gewesen, und stehen die neuen wiederum auf einander senkrecht, so sind die beiden Gleichungen zwischen x, y, u und v (nach §. 123.) die nachstehenden, nämlich

1) $x=p+\beta u-\alpha v$ und 2) $y=q+\alpha u+\beta v$,

wenn $sin\psi=\alpha$ und $cos\psi=\beta$ gesetzt wird, so daß man noch

$$3)\quad \alpha^2+\beta^2=1$$

hat, wo p und q die alten Koordinaten-Werthe des Ursprungs der neuen Koordinaten vorstellen, und wo ψ der Winkel ist, den die neuen Axen bezüglich mit den alten machen. — Aus 1.) und 2.) folgt aber noch

$$x^2=p^2+2\beta pu-2\alpha pv+\beta^2u^2-2\alpha\beta uv+\alpha^2v^2,$$
$$xy=pq+(\alpha p+\beta q)u+(\beta p-\alpha q)v+\alpha\beta u^2+(\beta^2-\alpha^2)uv-\alpha\beta v^2,$$
$$y^2=q^2+2\alpha qu+2\beta qv+\alpha^2u^2+2\alpha\beta uv+\beta^2v^2.$$

Eben so findet man die Glieder der dritten Dimension x^3, x^2y, xy^2, y^3, in lauter Glieder ausgedrückt, welche in Bezug auf u und v die dritte Dimension nicht übersteigen. — U. s. w. f.

IV. Ist demnach die alte Gleichung $f_{x,y}=0$ eine algebraische von der m^{ten} Dimension, so ist dies auch mit der neuen $\psi_{u,v}=0$ der Fall. — Und ist die alte Gleichung transscendent (d. h. enthält sie x oder y unter den Zeichen *sin, cos, log* etc. etc. oder im Exponenten einer Potenz), so ist dies nothwendig auch mit der neuen Gleichung $\psi_{u,v}=0$ der Fall.

Man hat daher einen logischen Eintheilungs-Grund, wenn man alle (geraden und) krummen Linien in algebraische und in transscendente (Kurven) eintheilt, je nachdem ihre auf rechtwinkliche Axen bezogenen Gleichungen zu den algebraischen oder zu den transscendenten Gleichungen gehören. Und die alge-

braischen Linien können wiederum recht füglich in Linien der 1ten Ordnung, Linien der 2ten Ordnung, Linien der 3ten Ordnung, u. s. w. f., zertheilt werden, je nachdem die, auf rechtwinkliche Axen bezogene Gleichung derselben von der 1ten, 2ten, 3ten etc. etc. Dimension der Veränderlichen ist.

Die Linien der 1ten Ordnung sind allemal (nach §. 120.) gerade Linien. Die Linien der 2ten und aller höhern Ordnungen sind krumme Linien. Die Linien der 2ten Ordnung weisen sich später als Kegelschnitte aus. —

Auch die Kreislinie ist eine Linie der 2ten Ordnung. Sind nämlich (Fig. 12.) x und y die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M der Kreislinie; sind p und q die Koordinaten-Werthe des Mittel-Punktes C derselben; und ist $CM = r$ der Radius des Kreises, so hat man (nach §. 118.)

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2 \\ \text{oder} \\ 0 = x^2 + y^2 - 2px - 2qy + (p^2 + q^2 - r^2); \end{array} \right.$$

und dies ist die Gleichung der Kreislinie, welche, wie man sieht, von der 2ten Dimension ist.

Diese Gleichung der Kreislinie wird noch viel einfacher, wenn man die rechtwinklichen Koordinaten-Axen CX_1 und CY_1 durch den Mittel-Punkt C selbst legt. Sind dann x_1 und y_1 die Koordinaten-Werthe eines Punktes M der Kreislinie, so wird die Gleichung der Kreislinie diese:

$$2)\qquad x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0.$$

Anmerkung. Wir betrachten nun in dem Nachstehenden die Linien der zweiten Ordnung in's Besondere.

§. 127.

I. Jede gegebene algebraische Gleichung zwischen x und y von der zweiten Dimension ist in der allgemeinen Form

$$1)\qquad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

allemal nothwendig enthalten; d. h. man kann die Koefficienten a, b, c, d, e und f allemal so bestimmen, daß diese allgemeine (sechsgliedrige) Gleichung der 2ten Ordnung zu gleicher Zeit die zwischen x und y gegebene ist. Die allgemeine Gleichung 1.) auf rechtwinkliche Axen bezogen drückt daher jede Linie der zweiten Ordnung aus.

II. Ordnet man die Gleichung 1.) nach y, so erhält man

$$2)\qquad ay^2+(bx+d)y+(cx^2+ex+f)=0;$$

und da diese Gleichung eine quadratische ist (so lange nicht $a=0$ seyn wird), so wird sie im Allgemeinen zu jedem Werthe von x zwei Werthe von y liefern, von denen wir den größern durch y', den kleinern durch y'' bezeichnen wollen. Es schneidet also im Allgemeinen (so lange a nicht $=0$ ist) jede mit OY (Fig. 16.) parallele Gerade die Linie der zweiten Ordnung in zwei Punkten M und m. Das Stück Mm zwischen diesen Punkten ist eine Sehne der Kurve. — Dabei hat man allemal (nach N. 4. der Einleitg. zum Kap. VIII. und §. 99.)

$$3)\ y'+y''=-\frac{bx+d}{a}\quad\text{und}\quad 4)\ y'\cdot y''=\frac{cx^2+ex+f}{a}\ ^{*)}.$$

III. Setzt man

$$5)\qquad \frac{y'+y''}{2}=z,$$

so ist z der Ordinaten-Werth des Punktes H, welcher die Sehne Mm halbirt. Und dabei findet sich (aus 3.)

$$6)\qquad z=-\frac{bx+d}{2a}\qquad\text{oder}\qquad z=-\frac{b}{2a}x-\frac{d}{2a}.$$

Weil aber diese Gleichung zwischen z und x von der 1ten Ordnung ist, also zu den verschiedenen Werthen von x lauter Punkte H liefert, welche in einer und derselben Geraden HH' liegen, so folgt hieraus, daß die Gerade HH', welche zwei mit OY

---

*) Man darf jedoch nicht übersehen, 1) daß diese beiden Werthe y' und y'' von y, für gewisse reelle Werthe von x reell, für andere reelle Werthe von x dagegen imaginär werden können; in welchem letzteren Falle die Kurve von der Ordinaten-Richtung gar nicht getroffen wird; 2) daß die Koefficienten a, b, c, d, e und f der Gleichung so seyn können, daß für jeden reellen Werth von x das zugehörige y immer und jedesmal imaginär ist; in welchem Falle die Gleichung nicht einen einzigen Punkt vorstellt; endlich 3) daß die Koefficienten a, b, c, d, e, f auch so seyn können, daß sich die Gleichung 1.) so schreiben läßt, nämlich

$$(\alpha y+\beta x+\gamma)(\delta y+\varepsilon x+\zeta)=0;$$

in welchem Falle die Gleichung 1.) nichts weiter als zwei gerade Linien vorstellt.

parallele Sehnen halbirt, allemal zugleich auch alle mit OY parallele Sehnen halbiren werde. Diese Gerade HH′ nennt man den zu der Richtung dieser parallelen Sehnen Mm oder M′m′ gehörigen Durchmesser der Linie der 2ten Ordnung.

Der Durchmesser HH′ macht dabei mit der Abscissen-Axe OX den Winkel χ, der gegeben ist durch die Gleichung (§. 120.)

$$7.)\ tg\,\chi = -\frac{b}{2a},\ \text{also}\ sin\,\chi = \frac{\mp b}{\sqrt{4a^2+b^2}},\ cos\,\chi = \frac{\pm 2a}{\sqrt{4a^2+b^2}}.$$

Der Durchmesser HH′ halbirt also seine Sehnen alle unter dem danach leicht zu berechnenden Winkel $90^0-\chi$ (wenn wir χ spitz nehmen).

IV. Führt man nun neue Koordinaten-Axen OU und OV ein, so wird (nach §. 126. III.), in so fern $p=q=0$ ist,

$$x = \beta u - \alpha v, \quad y = \alpha u + \beta v, \quad \text{wo} \quad \alpha^2+\beta^2 = 1 \ \text{ist};$$

und die Gleichung 1.) nimmt nun die Form an:

$$8) \qquad Av^2+Buv+Cu^2+Dv+Eu+F=0;$$

und dann kann man alles in II.) und III.) Gesagte für diese neue Gleichung wiederholen; und so findet sich denn, daß es auch einen Durchmesser giebt, der alle mit der neuen Ordinaten-Axe OV parallelen Sehnen halbirt. Weil aber die neue Ordinaten-Axe OV mit der alten Ordinaten-Axe OY einen ganz beliebigen Winkel ψ machen kann, so hat die neue Ordinaten-Axe jede denkbare Lage. Also giebt es für jedes System paralleler Sehnen allemal einen zugehörigen Durchmesser, der sie alle halbirt. — Also hat jede Linie der 2ten Ordnung unendlich viele Durchmesser *).

---

*) Wollte man diese beiden Durchmesser, von denen der 2te jedweder ist, in Gleichungen ausdrücken, die sich auf dieselben Koordinaten-Axen beziehen, und dann ihren Durchschnitts-Punkt aufsuchen, so würde man finden, daß solche mit einander parallel laufen, so oft $b^2-4ac=0$ ist; daß die Koordinaten-Werthe ihres Durchschnitts-Punkts aber allemal gefunden werden, so oft b^2-4ac nicht Null ist; — endlich, daß sich letztere ganz unabhängig zeigen von dem Winkel ψ, den die OV mit der OY macht. — Daraus folgt dann, daß wenn nicht alle Durchmesser mit ein-

V. Ohne diese Untersuchungen hier weiter zu verfolgen, betrachten wir auch noch etwas die Gleichung II. 4.), nämlich

$$y' \cdot y'' = \frac{cx^2 + ex + f}{a}.$$

Der Ausdruck zur Rechten ist das Glied der Gleichung 1.) oder 2.), welches daselbst für $y = 0$ übrig bleibt. Setzt man aber in 1.) oder 2.) $y = 0$, so giebt solche als Werthe von x, $-OA$ und $+OB$, in so fern A und B die Durchschnitts-Punkte der Absciſſen-Axe OX mit der Kurve vorstellen. Also läßt sich der Ausdruck $cx^2 + ex + f$ in die Faktoren $c(x + OA)(x - OB)$ zerlegen (nach §. 98.), und die vorstehende Gleichung (II. 4.) läßt sich so schreiben

$$y' \cdot y'' = \frac{c}{a}(x + OA)(x - OB).$$

Ist nun etwa $OP = x$, so ist $x + OA = AP$, $x - OB = -BP$, $y' = PM$, $y'' = -Pm$, und die vorstehende Gleichung giebt uns

$$PM \cdot Pm = \frac{c}{a} \cdot PA \cdot PB.$$

Nimmt man $x = OP'$, so erhält man eben so

$$P'M' \cdot P'm' = \frac{c}{a} \cdot P'A \cdot P'B;$$

und aus diesen beiden letztern Gleichungen folgt noch

$$PM \cdot Pm : P'M' \cdot P'm' = PA \cdot PB : P'A \cdot P'B.$$

Diese Eigenschaft gilt also für jede Linie der 2ten Ordnung. — Auch würde man ganz dasselbe finden, wenn man schiefwinkliche Axen einführen wollte, so daß die beliebigen Sehnen PM und PA einen beliebigen Winkel φ mit einander machten. — Und zöge man ab mit AB parallel, so wäre wieder

$$pa \cdot pb : PA \cdot PB = pM \cdot pm : PM \cdot Pm$$

oder

$$pa \cdot pb : pM \cdot pm = PA \cdot PB : PM \cdot Pm$$
$$= P'A \cdot P'B : P'M' \cdot P'm'.$$

---

ander parallel laufen, solche allemal alle in einem und demselben Punkte sich schneiden.

Wir wollen jedoch auch diese Untersuchungen nicht weiter verfolgen, sondern uns mit dieser Andeutung begnügen, die man leicht noch weiter ausspinnen kann. Wir wollen zu anderen Betrachtungen übergehen.

VI. Löst man nämlich die Gleichung 2.) nach y algebraisch auf, so erhält man

$$9)\ y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}}{2a}.$$

Ist nun b^2-4ac negativ, so giebt diese Gleichung für $x=+\infty$ und für $x=-\infty$ *) allemal imaginäre Werthe für y; also hat die Linie der 2ten Ordnung dann keinen unendlichen Schenkel **). — Ist aber b^2-4ac positiv, so hat y reelle Werthe für $x=+\infty$ und auch für $x=-\infty$; also hat die Kurve dann 4 unendliche Schenkel. — Und ist (gleichsam Ausnahms-Weise) $b^2-4ac=0$, so giebt die Gleichung entweder für $x=+\infty$, die Werthe von y reell; dann sind letztere aber für $x=-\infty$ imaginär; und dies ist der Fall, wenn $bd-2ae$ positiv ist. Oder es ist $bd-2ae$ negativ (zugleich mit $b^2-4ac=0$) und dann sind die Werthe von y reell für $x=-\infty$, dagegen imaginär für $x=+\infty$. Jedesmal hat also, wenn $b^2-4ac=0$ ist, die Kurve nur zwei unendliche Schenkel.

---

*) Die Redensart $x=+\infty$ oder $x=-\infty$ soll nichts weiter bedeuten, als daß statt x recht große und immer größer werdende übrigens positiv oder negativ genommene Werthe gesetzt werden.

**) Den Ausdruck $px^2+2qx+r$ kann man auch so schreiben, nämlich

$$p\left(x+\frac{q}{p}\right)^2+\frac{pr-q^2}{p}.$$

Ist daher p negativ und $pr-q^2$ positiv, also $q^2<pr$, so wird derselbe Ausdruck $px^2+2qx+r$ für jeden reellen Werth von x, negativ. Die Werthe von y aus der Gleichung 9.) werden also für jeden reellen Werth von x imaginär, und die Gleichung 9.) selbst stellt dann keinen einzigen Punkt vor, so oft b^2-4ac negativ, zugleich aber $(bd-2ae)^2<(b^2-4ac)(d^2-4af)$ ist.

Alle diese Linien der zweiten Ordnung mit keinem unendlichen Schenkel, also wenn b^2-4ac negativ ist, nennen wir Ellipsen.

Alle Linien der zweiten Ordnung mit 4 unendlichen Schenkeln, also wenn b^2-4ac positiv ist, heißen Hyperbeln.

Endlich nennt man alle durch die Gleichung 1.) gegebenen Kurven, so oft $b^2-4ac=0$ ist, so daß sie deshalb nur zwei unendliche Schenkeln haben, Parabeln.

Alle Linien der 2ten Ordnung sind also Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln.

Wir werden aber später nachweisen, daß alle Linien der 2ten Ordnung aus dem Kegel durch Ebenen geschnitten werden können, und auch umgekehrt, daß jeder solcher Kegelschnitt allemal eine Linie der 2ten Ordnung, folglich entweder eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist.

§. 128.

Statt in solche besondere Untersuchungen einzugehen, wie wir dies im vorstehenden Paragraphen gethan haben, wollen wir lieber für die durch die Gleichung

$$1)\qquad ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$

gegebenen Linien der 2ten Ordnung, wenn sich diese Gleichung auf die senkrechten Axen OX und OY bezieht, neue Axen O_1U und O_1V einführen, wie dies in Fig. 6.) zu sehen ist, und wie wir solche im §. 123. II.) eingeführt haben. Dann haben wir, wenn x und y die alten, u und v die neuen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M der Ebene sind,

$$2)\quad x=p+\beta u-\alpha v \qquad \text{und} \qquad 3)\quad y=q+\alpha u+\beta v,$$

wenn

$$4)\qquad \sin\psi=\alpha \qquad \text{und} \qquad \cos\psi=\beta$$

gesetzt wird. — Ist nun M ein Punkt der, durch die Gleichung 1.) gegebenen Kurve, und setzt man dann in diese Gleichung statt x und y ihre Werthe, also auch statt x^2, xy und y^2 die Werthe (aus §. 126. III.), so erhält man die neue Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen u und v derselben Punkte, also derselben Kurve. Sie wird aber

5) $\quad Av^2+Buv+Cu^2+Dv+Eu+F=0,$

wo A, B, C, D, E und F folgende Bedeutungen haben, nämlich

$$6) \begin{cases} A = a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2; \\ B = 2a\alpha\beta + b(\beta^2-\alpha^2) - 2c\alpha\beta; \\ C = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2; \\ D = 2aq\beta + b(p\beta - q\alpha) - 2cp\alpha + d\beta - e\alpha; \\ E = 2aq\alpha + b(p\alpha + q\beta) + 2cp\beta + d\alpha + e\beta; \\ F = aq^2 + bpq + cp^2 + dq + ep + f. \end{cases}$$

Weil aber p, q und α ganz willkührlich genommen werden können, in so fern bloß β mit α mittelst der Gleichung

$$7) \qquad \alpha^2+\beta^2=1$$

zusammenhängt, so kann man versuchen, ob es nicht allemal möglich ist, die neuen Axen O_1U und O_1V gegen die Kurve so zu legen, daß die Gleichung der Kurve viel einfacher und nur dreigliedrig wird.

Setzt man aber $B=0$, $D=0$ und $F=0$ und bestimmt man daraus die Werthe von p, q und α, so erhält man zunächst aus $B=0$ d. h. aus

$$2(a-c)\alpha\beta+b(\beta^2-\alpha^2)=0$$

oder $\quad 2(a-c)\sin\psi\cdot\cos\psi+b(\cos\psi^2-\sin\psi^2)=0,$

wenn man durch $\cos\psi^2$ dividirt,

$$2(a-c)tg\,\psi+b(1-tg\,\psi^2)=0$$

oder

$$tg\,\psi^2-2\frac{a-c}{b}\cdot tg\,\psi=1;$$

also

$$8) \qquad tg\,\psi=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{b}.$$

Dieser Werth ist, wie man sieht, immer reell; also ist ein solcher Winkel ψ immer möglich. — Hat man aber den Winkel ψ hieraus bestimmt, so kann man α und β (nämlich $\sin\psi$ und $\cos\psi$) als bekannt ansehen, und die beiden andern Gleichungen $D=0$ und $F=0$, nämlich

$$9) \quad (2a\beta - b\alpha)q + (b\beta - 2c\alpha)p + d\beta - e\alpha = 0$$

und

$$10) \quad aq^2 + bpq + cp^2 + dq + ep + f = 0$$

dienen nun noch zur Bestimmung von p und q. Denkt man sich in der Gleichung 9.) unter p und q alle ihr genügenden Werthe als Koordinaten-Werthe, so stellt diese Gleichung 9.) eine gerade Linie vor. Denkt man sich in der Gleichung 10.) unter p und q ebenfalls alle ihr genügenden Werthe als Koordinaten-Werthe, so drückt solche, da sie dann von der Gleichung 1.) nicht verschieden ist, unsere Linie der zweiten Ordnung selber wieder aus. Die von uns gesuchten Koordinaten-Werthe p und q gehören also den Durchschnitts-Punkten der durch die Gleichung 9.) gegebenen Geraden mit unserer Kurve, an. Man findet zwei solche Punkte O_1, welche den Forderungen genügen, wenn nur die Werthe von p und q (aus 9. und 10.) sich wirklich reell ausweisen und nicht imaginär werden; im letztern Falle würde kein einziger solcher Punkt O_1 existiren.

Eliminirt man aber q aus den Gleichungen 9.) und 10.), so erhält man für p wirklich zwei reelle Werthe; während die 9.) zu jedem reellen Werth von p allemal auch einen reellen Werth von q dazu liefert.

Es giebt also in jeder durch die Gleichung

$$1) \quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

gegebenen Linie der 2ten Ordnung allemal zwei Punkte O_1, welche so sind, daß wenn man O_1U so legt, daß sie mit OX den Winkel ψ bildet, wie solcher in der Gleichung 8.) gefunden worden, und wenn man O_1V senkrecht auf O_1U nimmt, die auf diese neuen Koordinaten-Axen O_1U und O_1V bezogene Gleichung nur dreigliedrig wird, nämlich die Form

$$11) \quad Av^2 + Cu^2 + Eu = 0$$

oder

$$12) \quad v^2 = -\frac{C}{A}u^2 - \frac{E}{A}u \qquad \text{oder} \qquad v^2 = gu + hu^2$$

annimmt, wenn man $-\frac{C}{A}$ durch h, und $-\frac{E}{A}$ durch g bezeichnet.

§. 129.

I. Aus dieser Untersuchung ziehen wir die wichtige Folgerung: daß die Gleichung

1) $$y^2 = gx + hx^2,$$

wenn man sie auf rechtwinkliche Axen bezieht, und wenn man g und h ganz beliebig reell sich denkt, noch alle Linien der 2[ten] Ordnung vorstellt, d. h. daß Niemand eine Linie der 2[ten] Ordnung geben kann, bei welcher es nicht möglich wäre, neue und rechtwinkliche Axen so einzuführen, daß die neue Gleichung derselben Kurve die Form 1.) annimmt.

Wir werden daher die Eigenschaften der Linien der zweiten Ordnung bloß aus dieser Gleichung 1.), nämlich aus

$$y^2 = gx + hx^2$$

ableiten, indem wir g und h ganz beliebig reell uns denken. Und wir folgern sogleich:

die Gleichung 1.) drückt alle Ellipsen aus, wenn h negativ,
" " " alle Hyperbeln " , wenn h positiv,
" " " alle Parabeln " , wenn h Null ist*).

*) Dies folgt sogleich, wenn man unsere jetzige Gleichung auf Null bringt, nämlich

$$y^2 - hx^2 - gx = 0$$

daraus macht, und sie dann mit der allgemeinen sechsgliedrigen Gleichung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

vergleicht. Man erhält dann

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -h,$$

also $b^2 - 4ac = 4h$ (Vgl. §. 127. VI.).

Man kann aber aus obiger 1.)

$$y = \sqrt{hx^2 + gx}$$

folgern, und dann sieht man wie sie, wenn h negativ ist, für $x = \pm\infty$, y allemal imaginär liefert; daß sie aber y reell liefert (für $x = \pm\infty$), wenn h positiv ist; daß sie endlich, wenn $h = 0$ ist, y reell liefert für $x = +\infty$ und imaginär für $x = -\infty$ (wenn g positiv); oder y imaginär für $x = +\infty$, und reell für $x = -\infty$ (wenn g negativ).

II. Nehmen wir OX' (Fig. 17.) zur positiven Seite der Abscissen-Axe, und bezeichnen wir den jetzigen Abscissen-Werth desselben Punktes M durch x', der vorher, wo OX die positive Seite der Abscissen-Axe vorstellte, durch x bezeichnet war, so hat man

$$x = -x'$$

und aus der Gleichung 1.) geht nun die neue Gleichung

$$2) \qquad y^2 = -gx' + hx'^2$$

hervor, welche dieselbe Kurve ausdrückt. Ist nun in der 1.) der Koefficient g negativ, so ist in der 2.) der Koefficient $-g$ positiv.

Daraus folgt aber wiederum:

Die Gleichung 1.) liefert schon alle Linien der zweiten Ordnung, wenn man nur dem g alle denkbaren positiven Werthe beilegt; weil jeder eben so große aber negative Werth von g, bei einerlei h, genau dieselbe Kurve liefert, nur auf der andern Seite der Ordinaten-Axe liegend, welche man für dasselbe aber positive g auf der einen Seite dieser Axe findet.

III. Wir werden daher in der Gleichung 1.), nämlich in

$$y^2 = gx + hx^2$$

den Koefficienten g allemal positiv uns denken und doch noch alle Linien der zweiten Ordnung vorgestellt haben, während $h = 0$ alle Parabeln, h negativ alle Ellipsen und h positiv alle Hyperbeln liefert.

In dieser Gleichung $y^2 = gx + hx^2$ nennt man die allemal positiv gedachte Zahl g den Parameter der Linie der zweiten Ordnung *).

§. 130.

---

*) In neuerer Zeit nennt man jeden noch unbestimmt gelassenen Buchstaben g, h etc. etc., der in irgend einer Gleichung zwischen x und y, die eine (gerade oder) krumme Linie vorstellt, vorkommt, einen Parameter. Im gegenwärtigen Kapitel mag aber das Wort in der obigen speciellern Bedeutung beibehalten werden.

§. 130.

Von der Parabel in's Besondere.

Alle Parabeln sind durch die Gleichung

$$1)\qquad y^2 = px \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{1}{p}y^2$$

ausgedrückt, je nachdem man OX oder OY (Fig. 18.) zur Abscissen-Axe nimmt, während OX und OY auf einander senkrecht gedacht werden. Dabei heißt p der **Parameter** der Parabel. Sehen wir nun zu, was aus dieser Gleichung alles hervorgeht.

I. Da zu jedem $x = OP$ zwei gleiche Werthe PM und Pm von y sich ergeben, so theilt die Abscissen-Axe OX die Parabel in zwei congruente Hälften. Diese Gerade OX halbirt die mit OY parallelen Sehnen, unter einem rechten Winkel; deshalb heißt OX der **Haupt-Durchmesser**, und O der **Haupt-Scheitel** der Parabel.

II. Ist d der Abscissen-Werth eines beliebigen Punktes F in dem Haupt-Durchmesser OX, so ist

$$FM = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (p-2d)x + d^2}.$$

Nimmt man nun d so, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, **während x ganz unbestimmt bleibt**, ein vollständiges Quadrat wird, nimmt man also d so, daß *)

$$2)\qquad (\tfrac{1}{2}p - d)^2 = d^2 \qquad \text{d. h.} \qquad d = \tfrac{1}{4}p$$

wird, so läßt sich FM in x rational ausdrücken, nämlich

$$3)\qquad FM = x + \tfrac{1}{4}p.$$

Diesen einzigen Punkt F in OX, der vom Scheitel O (nach 2.) um den vierten Theil des Parameters absteht, und dessen zugehörige Ordinate FG sich $= \frac{1}{2}p$ ausrechnet (aus 1.), nennt man den **Brenn-Punkt** der Parabel.

---

*) Der Ausdruck $px^2 \pm qx + r$ ist ein vollständiges Quadrat, so oft $(\frac{1}{2}q)^2 = pr$ ist. Er ist nämlich dann

$$= \left[\sqrt{p}\cdot\left(x \pm \frac{p}{2q}\right)\right]^2.$$

III. Denkt man sich die Kurven als Unendlich-Vielecke, aus unendlich kleinen geraden Linien zusammengesetzt, die paarweise Winkel mit einander machen, welche unendlich wenig von zwei rechten Winkeln verschieden sind, und denkt man sich unter der **Tangente** einer Kurve an den Punkt M (Fig. 18.), die Verlängerung einer solchen unendlich-kleinen Seite MN, so ist es leicht, für die Parabel die Lage der Tangente MT zu bestimmen. Zieht man nämlich zu M und N die Ordinaten MP und NR, desgleichen MSZ mit OX parallel, so ist, wenn $PR = MS = h$ gesetzt wird (aus 1.)

$$MP = \sqrt{px};\ NR = \sqrt{p(x+h)},\ \text{also}\ NS = \sqrt{p(x+h)} - \sqrt{px}.$$

Wird nun Winkel $MTX =$ Winkel $NMS = \varphi$ gesetzt, so hat man in dem Dreiecke MSN

$$tg\,\varphi = \frac{NS}{MS} = \frac{\sqrt{p(x+h)} - \sqrt{px}}{h},$$

wo h unendlich-klein gedacht ist. Multiplicirt man aber hier zur Rechten Zähler und Nenner mit $\sqrt{p(x+h)} + \sqrt{px}$, um mit h wegdividiren zu können, so erhält man

$$tg\,\varphi = \frac{p}{\sqrt{p(x+h)} + \sqrt{px}}.$$

Weil aber alles noch so Kleine, vom Unendlich-Kleinen unendlich weit abliegt, so wird dies Resultat am genauesten, wenn man Null statt h setzt. Dadurch erhält man ganz genau

$$4)\qquad tg\,\varphi = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \frac{p}{2y} = \frac{\frac{1}{2}p}{y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}.$$

Aus dieser $tg\,\varphi$ kann man ferner die **Subtangente** PT berechnen. Es ist nämlich

$$tg\,\varphi = \frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT},$$

also

$$5)\qquad Subtg.\ PT = \frac{y}{tg\,\varphi} = 2x,$$

woraus noch

6) $$OT = OP = x\text{ *)}$$
hervorgeht.

Zieht man MW senkrecht auf die Tangente MT, so hat man die Normale, und diese schneidet ab die Subnormale PW. Letztere berechnet sich aus der Proportion
$$PT:MP = MP:PW,$$
welche deshalb statt findet, weil TMW ein bei M rechtwinkliches Dreieck ist. Man findet hieraus:

7) $$\textit{Subnorm.}\ PW = \tfrac{1}{2}p,$$
so daß die Subnormale für jeden Punkt M der Parabel dieselbe Länge behält, und solche ist dem halben Parameter gleich.

IV. Verbinden wir nun die Eigenschaft der Tangente MT mit der des Brenn-Punktes F. — Man findet sogleich

8) $$FT = FM = FW = x + \tfrac{1}{4}p;$$
also ist

9) $$\text{W. } FMW = \text{W. } FWM = \text{W. } WMZ;$$
d. h. ZM, welche parallel mit OX gedacht worden ist, und FM bilden mit der Normale MW, und daher auch mit der Tangente TMt gleiche Winkel **).

V. Legt man durch einen beliebigen Punkt A der Parabel (Fig. 17.), die durch die Gleichung

1) $$y^2 = px$$
gegeben ist, eine Gerade AY_1, so daß sie mit OX den Winkel $ATX = \varphi$ bildet, und außerdem noch AX_1 parallel mit OX; sind x_1 und y_1 die neuen auf die schiefwinklichen Axen

---

*) Danach lassen sich Tangenten leicht zeichnen. Man zieht von dem Punkte M aus, an welchen man die Tangente haben will, MP senkrecht auf OX, macht $OT = OP$, und zieht MT.

**) Ein Lichtstrahl, welcher parallel mit OX in irgend einen Punkt M der Parabel einfällt, wird daher, nach den bekannten Gesetzen der Optik, in der Richtung MF zurückgeworfen. Denkt man sich die Parabel um OX herumgedreht und dadurch ein Umdrehungs-Paraboloid gebildet, so werden alle Strahlen, welche in einen solchen Spiegel parallel mit OX einfallen, nach dem Punkte F zurückgeworfen.

AX_1 und AY_1 bezogenen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M, dessen alte Koordinaten-Werthe x und y sind, so hat man, wenn MQ mit AY_1 parallel gedacht ist,

$OP = x$, $PM = y$, $AQ = x_1$ und $QM = y_1$;

außerdem noch W. $MQR = \varphi$, also

$$QR = y_1 \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad MR = y_1 \cdot \sin\varphi.$$

Sind nun $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die alten Koordinaten-Werthe des Punktes A, so daß man noch zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Gleichung

$$\mathfrak{y}^2 = p\mathfrak{x}$$

hat, so erhält man aus der Ansicht der Figur (17.)

$$x = \mathfrak{x} + x_1 + y_1 \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{y} + y_1 \cdot \sin\varphi.$$

Substituirt man nun diese Werthe statt x und y in die Gleichung $y^2 = px$, so ergiebt sich als neue Gleichung der Parabel (wegen $\mathfrak{y}^2 = p\mathfrak{x}$)

$$10) \quad y_1^2 \cdot \sin\varphi^2 + (2\mathfrak{y} \cdot \sin\varphi - p \cdot \cos\varphi) \cdot y_1 = px_1.$$

Diese Gleichung liefert zu jedem x_1 zwei ungleiche y_1, so lange nicht das mit y_1 behaftete Glied herausfällt. Nimmt man aber φ so, daß der Koefficient von y_1 der Null gleich wird, d. h. daß

$$11) \quad 2\mathfrak{y} \cdot \sin\varphi - p \cdot \cos\varphi = 0, \quad \text{oder} \quad tg\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}p}{\mathfrak{y}},$$

also

$$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{\mathfrak{y}^2 + \frac{1}{4}p^2}} = \frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{p\mathfrak{x} + \frac{1}{4}p^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mathfrak{x} + \frac{1}{4}p}}$$

wird, so entsteht diese neue Gleichung der Parabel, nämlich

$$12) \quad y_1^2 = p' \cdot x_1, \quad \text{wenn man} \quad 4\mathfrak{x} + p = p' \quad \text{setzt.}$$

Diese Gleichung zeigt, daß AX_1 alle mit AY_1 parallele Sehnen halbirt, so oft AY_1 mit AX_1 oder mit OX den durch die Gleichung 11.) gegebenen Winkel φ bildet, welcher Winkel kein anderer ist (nach III. 4.) als der, den die Tangente an A, mit OX macht. Die mit OX parallele AX_1 ist also ein Durchmesser der Parabel, und dieser halbirt alle Sehnen, welche mit der durch A an die Parabel gelegten Tangente AT

parallel laufen. — Und weil der Punkt A ganz willkührlich gewählt ist, so folgt, daß die Parabel unendlich viele Durchmesser hat, welche alle mit einander und mit OX parallel laufen. (Vgl. die Note zu §. 127. IV.)

VI. Man mag auch noch in der Parabel die linea directrix (Leitlinie) DH (Fig. 18.) bemerken, welche senkrecht auf OX und von OY um $\frac{1}{4}p$ entfernt liegt, so daß $OD = OF$ ist. Die durch M mit OX parallel gelegte ME ist dann $= x + \frac{1}{4}p$, also $= MF = FT$. Das Viereck MEFT ist ein Rhombus; das Dreieck MEF gleichschenklich. — Diese Eigenschaft der linea directrix giebt ein Mittel ab, mit einer einfachen Vorrichtung die Parabel mechanisch zu zeichnen*).

VII. Der Umstand, daß (Fig. 18.) $FM = x + \frac{1}{4}p$ ist, giebt eine sehr einfache Gleichung der Parabel, wenn man sie auf Polar-Koordinaten bezieht und FX zur Axe, F aber zum Pol nimmt. Bezeichnet man nämlich den Winkel MFX (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) durch φ, so wie FM durch r, so hat man $OP = x$, $FP = x - \frac{1}{4}p$, auch $FP = r \cdot \cos\varphi$; also
$$x - \tfrac{1}{4}p = r \cdot \cos\varphi.$$
Da nun
$$x + \tfrac{1}{4}p = r$$
ist, so folgt aus diesen beiden Gleichungen, wenn man x eliminirt, die Gleichung zwischen r und φ, nämlich

$$13) \qquad r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\varphi} \quad \text{oder} \quad r = \frac{\frac{1}{4}p}{(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2}.$$

---

*) Nämlich so: Man legt an die Leitlinie DH (Fig. 18.) ein Lineal, und daran legt man ein Winkelmaaß (ein rechtwinkliches Dreieck) BVW'. Ein Faden wird nun mit seinen beiden Enden in F und in B befestigt, und dieser mit einem Stift in m an die Seite BV straff angelegt, so daß er die gebrochene Linie BmF bildet. Wird nun das Dreieck BVW' an der Leitlinie H'DH mit dem einen Schenkel VW' hingerückt, so daß der andere Schenkel BV fortwährend mit sich und mit OX parallel bleibt, und spannt man mit dem Stifte den Faden immer straff an, ohne daß sich der Stift vom Dreieck entfernt, so wird solcher die Parabel mO beschreiben, wenn nur der Faden so lang gemacht worden war, daß man das erste Mal $mF = mV$ hatte.

Und dies ist die Polar-Gleichung der Parabel. Sie giebt die ganze Parabel, wenn man φ stetig von 0 bis 2π wachsen läßt, zu jedem φ aber aus der Gleichung den Radius-Vektor r dazu findet.

§. 131.

Von der Ellipse in's Besondere.

Denkt man sich in der Gleichung

$$1) \qquad y^2 = px - qx^2$$

p und q beliebig positiv, so giebt sie alle Ellipsen, sobald man unter x und y die auf rechtwinkliche Axen AX und AY (Fig. 19.) bezogenen Koordinaten-Werthe versteht. Auch hier nennt man die, allemal positiv gedachte Zahl p den Parameter der Ellipse. Aus dieser Gleichung 1.) müssen nun die Eigenschaften aller Ellipsen hervorgehen.

I. Setzt man $y = 0$, so giebt die Gleichung 1.) die beiden Absciſſen-Werthe 0 und $\frac{p}{q}$ für die beiden Punkte A und B, welche die Absciſſen-Axe AX mit der Ellipse gemein hat (Fig. 19.). Man hat dabei

$$2) \qquad AB = \frac{p}{q}.$$

II. Nimmt man x negativ, oder positiv aber größer als $\frac{p}{q}$, so zeigt sich y allemal imaginär; also ist die Ellipse zwischen den durch A und B gehenden Ordinaten-Richtungen AY und BV eingeschlossen.

III. Bezeichnet man die Entfernung AB durch 2a, so hat man

$$3) \qquad \frac{p}{q} = 2a, \quad \text{alſo} \quad p = 2aq;$$

und die Gleichung 1.) der Ellipse kann dann auch so geschrieben werden (indem man 2aq statt p setzt)

$$4) \qquad y^2 = q(2ax - x^2).$$

Halbirt man AB in C, so daß $AC = CB = a$ wird, so findet sich aus dieser Gleichung für $x = a$ der Werth von $y = CD$ dazu; und so findet sich, wenn man CD durch b bezeichnet

$$5) \qquad b^2 = qa^2, \quad \text{also} \quad q = \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Gleichung 1.) oder 4.) der Ellipse geht dadurch über in

$$6) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

wo $b > a$, $b = a$, auch $b < a$ seyn wird, je nachdem man $q > 1$, oder $q = 1$, oder $q < 1$ gegeben hatte.

IV. Legt man nun durch C eine neue Ordinaten-Axe CY_1 parallel mit AY, und ist für denselben Punkt M, dessen alter Abscissen-Werth durch x bezeichnet worden, der neue, von C aus auf CX genommene Abscissen-Werth durch x_1 vorgestellt, so hat man

$$7) \qquad x = a + x_1;$$

und substituirt man diesen Werth statt x in die Gleichung 6.) der Ellipse, so erhält man die neue Gleichung derselben Ellipse, nämlich

$$8) \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2), \quad \text{oder} \quad a^2y^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2.$$

Aus dieser Gleichung erhellet, daß wenn man CX als Abscissen-Axe nimmt, zu jedem positiv oder negativ genommenen Abscissen-Werthe x_1 zwei gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten-Werthe gehören; daß aber auch, wenn man CY_1 zur Abscissen-Axe nimmt, dann zu jedem positiv oder negativ genommenen Abscissen-Werth y zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten-Werthe x_1 sich ergeben. Also theilen die jetzigen Axen CX und CY_1 die Ellipse in vier congruente Viertel.

V. Den Punkt C nennt man den Mittel-Punkt, die Punkte A, B, D und E die Scheitel der Ellipse; die Linien AB und DE heißen die Haupt-Durchmesser (auch die Axen) der Ellipse, und jeder derselben halbirt die Sehnen, die mit dem andern parallel laufen, d. h. die auf ihm senkrecht stehen; die

positiven Zahlen a und b heißen die halben Axen der Ellipse, und zwar wird die größere von beiden die halbe große Axe, die andere dann die halbe kleine Axe genannt.

Da man endlich immer die größere Axe der Ellipse zur Absciſſen-Axe CX nehmen kann, so folgt, daß die Gleichungen 8.) und 6.) noch alle Ellipsen vorstellen, wenn man statt a und b beliebige positive Zahlen setzt, aber immer $b<a$ oder höchstens $b=a$ sich denkt (nie $b>a$). — Und so wollen wir also von nun an immer voraussetzen, daß $b \overline{\overline{<}} a$ sey. Dabei nennen wir die Gleichung 6.) die Scheitel-Gleichung, die Gleichung 8.) dagegen die Mittelpunkts-Gleichung der Ellipse.

VI. Suchen wir wieder in der größern Axe AB der Ellipse einen Punkt F so, daß sich FM in x rational ausdrücken läßt; nennen wir d seinen Absciſſen-Werth, so ist abermals (wie im §. 130. II. für die Parabel)

$$FM=\sqrt{(x_1-d)^2+y^2}.$$

Setzt man hier wieder statt y^2 seinen Werth (aus 8.), so erhält man

$$FM=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1{}^2-2dx_1+(d^2+b^2)};$$

und dieser Ausdruck ist ein vollständiges Quadrat, wenn

$$9)\qquad d^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot(d^2+b^2)$$

ist, woraus

$$10)\qquad d=\mp\sqrt{a^2-b^2}$$

sich ergiebt; dabei wird aber für diese Werthe von d

$$11)\qquad FM=\pm\left(\frac{\pm\sqrt{a^2-b^2}}{a}x_1+a\right).$$

Die Gleichung 10.) zeigt zwei solche Punkte F, nämlich F und F′, die man erhält, wenn man $CF=CF'=+\sqrt{a^2-b^2}$ nimmt. Dabei giebt die Gleichung 11.), so lange man (wie in der Figur) x_1 positiv sich denkt

$$12)\quad FM = \frac{+\sqrt{a^2-b^2}}{a}x_1+a = \frac{a^2+x_1\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

und

$$13)\quad F'M = \frac{-\sqrt{a^2-b^2}}{a}x_1+a = \frac{a^2-x_1\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

und dieselben Werthe zeigen sich auch noch als die richtigen, wenn man x_1 negativ nimmt, der Punkt M also links von CY_1 liegt.

Addirt man aber diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$14)\quad FM+F'M = 2a = AB,$$

welches eine merkwürdige Eigenschaft der Ellipse ist, deren man sich bedienen kann, um mit Hülfe eines Fadens und dreier Stifte, die Ellipse mechanisch zu zeichnen *).

VII. Ziehen wir wieder (genau auf demselben Wege, wie im §. 130. III. für die Parabel) eine Tangente an den Punkt M der Ellipse. Ist MN ein solches Element der Kurve, also $MS = PR = h$ unendlich-klein, und ist φ der Winkel, welchen die Tangente TNM mit der Abscissen-Axe OX macht, so hat man, weil Winkel $NMS = 180^\circ - \varphi$ ist,

$$tg\varphi = -\frac{NS}{MS} = \frac{y_{x_1+h}-y_{x_1}}{h} = \frac{y^2_{x_1+h}-y^2_{x_1}}{h(y_{x_1+h}+y_{x_1})},$$

während y_{x_1} die zur Abscisse x_1 gehörige Ordinate $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}$, dagegen y_{x_1+h} die zur Abscisse x_1+h gehörige Ordinate $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x_1+h)^2}$ vorstellt. Dies giebt, wenn man im Zähler statt y_{x_1} und y_{x_1+h} diese Werthe setzt, dann mit h Zähler

*) Man nimmt einen Faden von der Länge 2a und befestigt seine Enden an den aus $CF = CF' = \sqrt{a^2-b^2}$ berechneten und bestimmten Punkten F und F'. Mit einem Zeichnen-Stift fährt man dann auf der Zeichen-Ebene so herum, daß derselbe den Faden FF' immer ausgespannt erhält; so wird dieser-Zeichen-Stift immer in einem Punkte M der Ellipse sich befinden.

und Nenner wegdividirt, zuletzt aber Null statt h setzt, weil Null dem Unendlich-Kleinen am nächsten kommt,

$$15) \qquad tg\,\varphi = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y},$$

so daß φ ein stumpfer Winkel wird, wenn x_1 positiv, dagegen ein spitzer Winkel wird, wenn x_1 negativ, d. h. wenn der Punkt M zur Linken von CY_1 liegen sollte, weil dann $tg\,\varphi$ positiv wird, so lange nur y positiv bleibt. Dieselbe Gleichung gilt aber auch noch, wenn y negativ seyn sollte, wenn man nur den Winkel MTX oder φ von 0 bis 360° zählt.

Aus der $tg\,\varphi$ findet man wieder die

$$16) \qquad Subtg\,PT = -\frac{y}{tg\,\varphi} = \frac{a^2y^2}{b^2x_1} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1},$$

so lange nur x_1, wie in der Figur, positiv gedacht wird. Sollte aber der Punkt M, also auch T links von CY_1 liegen, so daß x_1 eine negative Zahl ist, so muß die absolute Länge der Linie PT aus der Gleichung

$$16') \qquad Subtg\,PT = -\frac{a^2y^2}{b^2x_1} = -\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

hergeholt werden. — Daraus folgt aber noch

$$17) \qquad CT = \pm\frac{a^2}{x_1}, \text{ oder } CP:CB = CB:CT,$$

wo das obere Zeichen (+) gilt, wenn x_1 positiv, wo dagegen das untere (—) Zeichen genommen werden muß, wenn x_1 negativ ist, damit CT immer durch eine absolute (nicht negative) Zahl ausgedrückt sey. Der Abscissen-Werth des Punktes T ist dagegen allemal $=\frac{a^2}{x_1}$, d. h. bald positiv, bald negativ.

Zieht man die Normale MW, so findet sich wieder die Subnormale PW aus der Proportion

$$PW:PM = PM:PT,$$

welche

$$18) \qquad Subnorm\,PW = \pm\frac{b^2x_1}{a^2}$$

liefert. Diese Gleichung giebt den Abscissen-Werth des Punk-

tes W, es mag x_1 positiv oder negativ seyn, allemal $= \frac{a^2-b^2}{a^2}x_1$.

VIII. Drücken wir nun FT, F′T, FW, F′W in x_1 aus, da diese Linien alle von x_1 abhängen. Man findet aber aus den Abscissen-Werthen der Punkte F, F′, T und W (nach §. 117.)

$$19) \qquad \pm FT = \frac{a^2}{x_1} + \sqrt{a^2-b^2} = \frac{a^2 + x_1\sqrt{a^2-b^2}}{x_1},$$

$$20) \qquad \pm F'T = \frac{a^2}{x_1} - \sqrt{a^2-b^2} = \frac{a^2 - x_1\sqrt{a^2-b^2}}{x_1},$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn x_1 positiv, die untern aber, wenn x_1 negativ seyn sollte. Ferner

$$21) \; FW = \frac{a^2-b^2}{a^2}x_1 + \sqrt{a^2-b^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}(a^2 + x_1\sqrt{a^2-b^2})$$

und

$$22) \; F'W = \sqrt{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2}x_1 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}(a^2 - x_1\sqrt{a^2-b^2}).$$

Vergleicht man aber diese Resultate mit den N. 12.) und N. 13.), so findet man augenblicklich

$$23) \qquad FM : F'M = FT : F'T = FW : F'W.$$

Aus dieser Proportion geht aber hervor, daß die Normale MW den Winkel FMF′ halbirt; und daraus folgt, daß jeder Strahl, welcher von F′ ausgeht, allemal von der Ellipse nach F hin zurückgeworfen wird.

IX. Es sey die auf die Haupt-Axen CX und CY (Fig. 20.) bezogene Gleichung der Ellipse

$$1) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \text{ oder } a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben. Zieht man nun CY_1 beliebig, so daß sie mit CX den Winkel φ bildet, zieht man MQ parallel mit CY_1; — ist $CP = x$,

$PM = y$, $CQ = x'$, $QM = y'$, so hat man $PQ = -y' \cdot \cos\varphi$, $MP = y' \cdot \sin\varphi$; also

$$x = x' + y' \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = y' \cdot \sin\varphi.$$

Substituirt man aber diese Werthe statt x und statt y in die Gleichung 1.), so erhält man die neue Gleichung derselben Ellipse zwischen den Koordinaten-Werthen x' und y', welche sich auf die schiefwinklichen Axen CX und CY_1 bezieht, nämlich

$$2)\ (a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2) . y'^2 + 2b^2 x' y' \cdot \cos\varphi + b^2 x'^2 = a^2 b^2.$$

Zieht man aber CX_1 noch beliebig, so daß CX_1 mit CX den Winkel ψ bildet, und nimmt man CX_1 und CY_1 zu Koordinaten-Axen (die unter sich den beliebigen Winkel $\varphi - \psi$ bilden); sind ferner die Koordinaten-Werthe CR und MR bezüglich durch x_1 und y_1 bezeichnet, so hat man im Dreiecke CQR die Proportionen

$$\frac{CR}{\sin\varphi} = \frac{QR}{\sin\psi} = \frac{CQ}{\sin(\varphi - \psi)}$$

d. h.

$$\frac{x_1}{\sin\varphi} = \frac{y' - y_1}{\sin\psi} = \frac{x'}{\sin(\varphi - \psi)}.$$

Daraus findet sich aber sogleich

$$x' = x_1 \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin\varphi} \quad \text{und} \quad y' = y_1 + x_1 \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Substituirt man diese Werthe statt x' und y' in die Gleichung 2.), so erhält man die neue Gleichung derselben Ellipse, aber auf die Koordinaten-Axen CX_1 und CY_1 bezogen, nämlich

$$3)\ (a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2) \cdot y_1^2 + 2(a^2 \sin\varphi \cdot \sin\psi + b^2 \cos\varphi \cdot \cos\psi) \cdot x_1 y_1 + (a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2) \cdot x_1^2 = a^2 b^2.$$

Diese Gleichung giebt, so lange der Koefficient von $x_1 y_1$ nicht Null ist, zu jedem Werthe von x_1 zwei ungleiche Werthe von y_1. So wie man aber zwischen φ und ψ die Abhängigkeit

$$4)\qquad a^2 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi + b^2 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi = 0$$

oder

$$a^2 \cdot tg\,\varphi \cdot tg\,\psi + b^2 = 0$$

festsetzt, so daß der Koefficient von $x_1 y_1$ der Null gleich wird, so reducirt sich die Gleichung 3.) auf

5) $(a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2)\cdot y_1^2 + (a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2)\cdot x_1^2 = a^2 b^2.$

Diese Gleichung giebt nun zu jedem Werthe von x_1 zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y_1, und auch zu jedem Werthe von y_1 zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von x_1. Folglich liegen diese neuen Axen CX_1 und CY_1, sobald zwischen φ und ψ die Abhängigkeit 4.) statt findet, so, daß jede die Sehnen halbirt, die mit der andern parallel laufen. Deshalb nennt man solche Axen zusammengehörige Durchmesser. Und da φ oder ψ willkührlich gewählt werden kann, so hat die Ellipse unendlich viele Paare zusammengehöriger Durchmesser. Aus der Gleichung 4.) folgt aber noch

$$6)\qquad tg\,\varphi = -\frac{b^2\cdot\cos\psi}{a^2\cdot\sin\psi},$$

also

$$7)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b^2\cdot\cos\psi}{\sqrt{a^4\cdot\sin\psi^2 + b^4\cdot\cos\psi^2}} \\ \text{und} \\ \cos\varphi = \dfrac{-a^2\cdot\sin\psi}{\sqrt{a^4\cdot\sin\psi^2 + b^4\cdot\cos\psi^2}}, \end{cases}$$

so daß

$$8)\qquad a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2 = a^2 b^2 \cdot \frac{a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2}{a^4 \sin\psi^2 + b^4 \cos\psi^2}$$

wird.

Sind nun CA_1 und CB_1 die Längen der zusammengehörigen Halbmesser und bezüglich durch a_1 und b_1 bezeichnet, so giebt die Gleichung 5.) für $x_1 = a_1$ nothwendig $y_1 = 0$ oder für $y_1 = 0$ nothwendig $x_1 = a_1$; dagegen für $x_1 = 0$ nothwendig $y_1 = b_1$. So findet sich also

$$9)\qquad \begin{cases} a_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2}};\quad b_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}; \\ \text{oder (wegen 8.)} \\ b_1 = \dfrac{\sqrt{a^4 \sin\psi^2 + b^4 \cos\psi^2}}{\sqrt{a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2}}, \end{cases}$$

während die Gleichung 5) der Ellipse auch die Form

10) $a_1^2 y_1^2 + b_1^2 x_1^2 = a_1^2 b_1^2$ oder $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$

annimmt.

Aus diesen Resultaten ergeben sich auch noch augenblicklich die Gleichungen

11) $$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

und

12) $$a_1 \cdot b_1 \cdot \sin(a_1, b_1) = ab,$$

wenn man unter (a_1, b_1) den Winkel X_1CY_1 oder $(\varphi - \psi)$ versteht, den die zusammengehörigen Halbmesser unter sich bilden, so daß

13) $$\sin(a_1, b_1) = \sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi \cdot \cos\psi - \cos\psi \cdot \sin\psi$$

$$\text{also (wegen 7.)} = \frac{a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2}{\sqrt{a^4 \sin\psi^2 + b^4 \cos\psi^2}}$$

wird.

Ist $X_2CX = \psi'$ ein anderer Werth von ψ, und ist $Y_2CX = \varphi'$ der durch die Gleichung 4.) gegebene zugehörige Werth von φ, so daß man

14) $$a^2 tg\,\varphi' \cdot tg\,\psi' + b^2 = 0$$

hat, so sind CX_2 und CY_2 abermals zusammengehörige Durchmesser, und $CA_2 = a_2$, so wie $CB_2 = b_2$ zusammengehörige Halbmesser. Die Gleichung der Ellipse, auf diese Axen CX_2 und CY_2 bezogen, ist daher wieder

$$a_2^2 y_2 + b_2^2 x_2^2 = a_2 b_2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1;$$

und die Längen a_2 und b_2 ergeben sich aus 9.), wenn man daselbst ψ' statt ψ, also auch φ' statt φ setzt. Es ist aber dann auch noch (nach 11. und 12.)

15) $$a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2,$$

16) $$a_2 \cdot b_2 \cdot \sin(a_2, b_2) = a_1 \cdot b_1 \cdot \sin(a_1, b_1) = ab$$

und überdies findet man auch noch

17) $$a_1 \cdot a_2 \cdot \sin(a_1, a_2) = b_1 \cdot b_2 \cdot \sin(b_1, b_2),$$

wenn man unter (a_1, a_2) den Winkel $X_1CX_2 = \psi' - \psi$ ver-

steht, den a_1 und a_2 unter sich bilden, während (b_1, b_2) die analoge Bedeutung hat, also den Winkel $Y_1CY_2 = \varphi' - \varphi$ vorstellt.

Diese Gleichungen 16.) und 17.) lehren uns also, daß $\triangle B_2CA_2 = \triangle B_1CA_1 = \triangle BCA$ und $\triangle B_2CB_1 = \triangle A_2CA_1$, also auch

$$\square B_2B_1A_2C = \square A_1A_2B_1C,$$

folglich auch noch

$$\triangle B_2B_1A_2 = \triangle A_1A_2B_1,$$

und deshalb A_2B_1 mit A_1B_2 parallel ist.

Dies sind die merkwürdigsten Eigenschaften der zusammengehörigen Durchmesser der Ellipse.

X. Der Umstand, daß (Fig. 19.) für irgend einen Punkt M der Ellipse, dessen Abscissen-Werth $CP = x_1$ ist, die Länge FM, wenn F der Brenn-Punkt ist, sich allemal in x rational ausdrücken läßt, ist Veranlassung zu einer sehr einfachen Polar-Gleichung der Ellipse. Setzt man nämlich den Winkel $MFX = \varphi$ und $FM = r$, ferner $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e$, so daß $\sqrt{a^2-b^2} = ae$ und $b^2 = a^2(1-e^2)$ und $e < 1$ ist, wo dann e die Excentricität der Ellipse genannt wird, so hat man (nach VI. N. 12.)

$$r = e \cdot x_1 + a, \quad \text{während} \quad x_1 = r \cdot \cos\varphi - ae$$

ist. Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen x_1, so erhält man

$$(\odot) \cdots \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cdot \cos\varphi}$$

als die Polar-Gleichung der Ellipse, in welcher φ alle Werthe vorstellt von 0 bis 2π, während r allemal der zu jedem $MFX = \varphi$ gehörige Radius-Vektor FM ist *).

---

*) Würde man aber den Pol in F' annehmen, also W. $MF'X = \varphi$ und $F'M = r$ setzen, so würde man als Polar-Gleichung

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot \cos\varphi}$$

erhalten.

XI. Nimmt man $b = a$, so fallen die Brenn-Punkte mit dem Mittel-Punkte zusammen; die Scheitel-Gleichung wird dann diese:

$$y^2 = 2ax - x^2;$$

die Mittel-Punkts-Gleichung dagegen diese:

$$y^2 = a^2 - x_1^2;$$

und die Polar-Gleichung diese, nämlich

$$r = a.$$

Diese letztere Gleichung läßt aber eben so gut, wie die beiden andern erkennen, daß jetzt alle Halbmesser der Ellipse einander gleich sind, und daß man jetzt diejenige Ellipse habe, welche in den Elementen der Geometrie unter dem Namen der Kreislinie bereits hinlänglich betrachtet ist.

§. 132.

Von der Hyperbel in's Besondere.

Die Gleichung

$$1) \qquad y^2 = px + qx^2,$$

in welcher q beliebig positiv gedacht ist, drückt alle Hyperbeln aus, wenn sie auf rechtwinkliche Axen bezogen wird. Dabei kann man p bloß positiv, oder bloß negativ nehmen (§. 129.). Da sie sich von der Gleichung für alle Ellipsen (§. 131. N. 1.) durch nichts unterscheidet, als daß $+q$ statt $-q$ steht, und da die Gleichung aller Ellipsen (§. 131. N. 6.) auf die Form

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \quad \text{oder} \quad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

gebracht werden kann, so wird die Gleichung aller Hyperbeln auf die Form

$$2) \quad y^2 = -2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax)$$

gebracht werden können, wo man sich b und a beliebig positiv denkt (also $b < a$, $b = a$, und auch $b > a$), während diese Gleichung aus der vorgedachten Gleichung aller Ellipsen hervorgeht, wenn daselbst $-b^2$ statt b^2, oder $b\sqrt{-1}$ statt b gesetzt wird. —

Aus

Aus dieser Gleichung 2.) können nun alle Eigenschaften der Hyperbeln abgeleitet werden.

I. Für $y = 0$ erhält man zwei Werthe von x, nämlich 0 und $2a$. — Die Abscissen-Axe AX schneidet also die Hyperbel in zwei Punkten A und B, so daß (Fig. 21.)

$$3)\qquad AB = 2a$$

ist. Diese Länge AB heißt die Axe der Hyperbel, und a wird die halbe Axe genannt.

II. Halbirt man AB in C, so daß

$$4)\qquad AC = CB = a$$

wird; legt man durch C eine neue Ordinaten-Axe CY_1, und ist für den Punkt M, für welchen $AP = x$ ist, $CP = x_1$, so hat man

$$x = a + x_1;$$

und die neue Gleichung der Hyperbel wird nun

$$5)\qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) \quad \text{oder} \quad a^2y^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2 = 0,$$

welche Gleichung die Mittel-Punkts-Gleichung der Hyperbel genannt wird, in so fern C der Mittelpunkt der Hyperbel heißt. Die Gleichung 2.) wird die Scheitel-Gleichung genannt, und A und B heißen die Scheitel der Hyperbel.

Diese Mittel-Punkts-Gleichung der Hyperbel unterscheidet sich aber von der Mittel-Punkts-Gleichung der Ellipse (§. 131. N. 8.) nur dadurch, daß hier $-b^2$ steht, wo dort b^2; so daß diese aus jener hervorgeht, wenn man dort $b\cdot\sqrt{-1}$ statt b setzt.

Diese Gleichung 5.) läßt sehen, einmal daß die Axen CX und CY_1 die Hyperbel in vier congruente Viertel theilen; und dann auch, daß zwischen den durch A und B gehenden Ordinaten-Richtungen AY und BV kein Punkt der Kurve liegt.

III. Auch in der Haupt-Axe $X'CX$ der Hyperbel finden sich wieder zwei Punkte F und F', welche Brenn-Punkte genannt werden, und welche die Eigenschaft haben, daß FM und $F'M$ in die Abscisse x_1 des Punktes M, rational (d. h.

während x_1 ganz unbestimmt bleibt, ohne Wurzel-Zeichen) sich ausdrücken lassen. Man findet genau so wie im §. 131. VI.)

6) $$CF = CF' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und

7) $$FM = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x_1 + a\right)$$

8) $$F'M = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x_1 - a\right)$$

wo die obern Vorzeichen (+) gelten, wenn x_1 positiv, dagegen alle unteren (—), wenn x_1 negativ ist.

Daraus folgt aber

9) $FM - F'M = 2a = AB$ oder $F'M - FM = 2a = AB$, je nachdem x_1 positiv, oder x_1 negativ ist.

IV. Auch die Tangente MT wird an die Hyperbel gerade so gezogen, wie sie im §. 131. VII.) für die Ellipse gezogen worden ist. Man findet, wenn

10) Winkel $MTX = \varphi$

gesetzt wird,

11) $$tg\,\varphi = \frac{b^2x_1}{a^2y};$$

und diese Gleichung gilt wieder für jedes positive oder negative x_1 und y, wenn nur φ von 0 bis 360° gezählt wird. Daraus folgt dann

12) $$Subtg.\ PT = \pm\frac{a^2y^2}{b^2x_1} = \frac{x_1^2 - a^2}{\pm x_1};$$

daraus sogleich noch

13) $$Subnorm.\ PW = \pm\frac{b^2x_1}{a^2};$$

so wie

14) $$CW = \pm\frac{a^2+b^2}{a^2}x_1$$

und

15) $$CT = \pm\frac{a^2}{x_1} \quad \text{d. h.} \quad CT : CB = CB : CP,$$

wo jedesmal die + Zeichen gelten, wenn x_1 positiv, die — dagegen, wenn x_1 negativ ist.

Dagegen ist der Abscissen-Werth des Punktes T allemal $= \frac{a^2}{x_1}$; so wie der des Punktes W allemal $= \frac{a^2+b^2}{a^2} x_1$ ist, so daß beide mit x_1 zugleich ihr Zeichen wechseln.

V. Nun kann man wiederum FT, F′T, FW, F′W in x_1, a und b ausdrücken; man findet nämlich (nach Anleitung des §. 131. VIII.), oder des §. 117.)

16) $$FT = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1 \cdot \sqrt{a^2+b^2} + a^2}{x_1};$$

17) $$F'T = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1 \cdot \sqrt{a^2+b^2} - a^2}{x_1};$$

18) $$FW = \pm\left(\frac{a^2+b^2}{a^2} x_1 + \sqrt{a^2+b^2}\right)$$
$$= \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} \cdot (x_1 \cdot \sqrt{a^2+b^2} + a^2);$$

19) $$F'W = \pm\left(\frac{a^2+b^2}{a^2} x_1 - \sqrt{a^2+b^2}\right)$$
$$= \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} \cdot (x_1 \cdot \sqrt{a^2+b^2} - a^2),$$

wo die + Zeichen gelten, wenn x_1 positiv, die — Zeichen dagegen, wenn x_1 negativ ist.

Daraus folgt dann wieder, wie in der Ellipse,

20) $$FM : F'M = FT : F'T = FW : F'W.$$

Und daraus geht hervor, daß in der Hyperbel die Tangente MT den Winkel FMF′ halbirt*).

VI. Für $x_1 = \pm\infty$ wird $CT = 0$; d. h. je weiter der Punkt M der Hyperbel auf beiden Seiten des Mittel-Punktes hinaus rückt, desto näher kommt die Tangente MT dem Mit-

*) Ein Strahl, welcher von F′ ausgeht und die Hyperbel in irgend einem Punkte M trifft, wird also so nach MS zurückgeworfen, wie wenn er von F nach M in gerader Richtung nach S zu gienge.

tel-Punkte C, so daß der Punkt T dem Punkte C unendlich nahe rücken kann. Desgleichen ist für $x_1 = \pm\infty$ (aus 11.), weil $\frac{y}{x_1} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{x_1^2 - a^2}{x_1^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x_1^2}\right)}$ für $x_1 = \pm\infty$, $= \pm\frac{b}{a}$ wird,

$$tg\,MTX = \pm\frac{b}{a} \quad (\text{für } x_1 = \pm\infty).$$

Zieht man daher durch C zwei gerade Linien DCE' und D'CE, so daß

$$21) \qquad tg\,DCX = tg\,ECX = \frac{b}{a}$$

wird, so nähern sich denselben die Schenkel der Hyperbel auf beiden Seiten ohne Ende; und sie kommen ihnen unendlich nahe, so daß man sagen kann, daß die Schenkel der Hyperbel im Unendlichen mit diesen Geraden zusammenfallen. Diese Geraden DCE' und D'CE heißen die Asymptoten der Hyperbel. Ihre Lage wird bestimmt durch die Gleichung 21.), welche noch zeigt, daß

$$22) \qquad AD' = BD = b$$

wird, so daß man

$$CD = CE = CD' = CE' = \sqrt{a^2 + b^2} = CF = CF'$$

hat.

VII. Sind (Fig. 22.) CX und CY die Haupt-Axen der Hyperbel, d. h. auf einander senkrecht und so, daß wenn x und y die Koordinaten-Werthe (CP und PM) eines beliebigen Punktes M der Hyperbel vorstellen, dann

$$1) \quad a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

die Gleichung der Hyperbel ist; und führt man nun (genau wie im §. 131. IX. für die Ellipse geschehen ist) neue Koordinaten-Axen ein, und namentlich zuerst eine neue Ordinaten-Axe CY_1, so daß W. $Y_1CX = \varphi$ wird, und daß x' und y' die neuen, auf die Axen CX und CY_1 bezogenen Koordinaten-Werthe

(CQ und QM) desselben Punktes M vorstellen, so wird die neue Gleichung der Hyperbel zwischen x' und y' diese:

$$2)\quad (a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2)y'^2 - 2b^2x'y' \cdot \cos\varphi - b^2x'^2 + a^2b^2 = 0.$$

Wird aber noch eine neue Abscissen-Axe CX_1 eingeführt, so daß W. $X_1CX = \psi$ ist, und sind x_1 und y_1 die, auf die Koordinaten-Axen CX_1 und CY_1 bezogenen Koordinaten-Werthe (CR und RM) desselben Punktes M, so wird die neue Gleichung derselben Hyperbel zwischen x_1 und y_1 diese:

$$3)\quad (a^2 \sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2)y_1^2 + 2(a^2\sin\varphi\cdot\sin\psi - b^2\cos\varphi\cdot\cos\psi)\cdot x_1y_1 + (a^2\sin\psi^2 - b^2\cos\psi^2)\cdot x_1^2 + a^2b^2 = 0.$$

Nimmt man hier wieder zwischen φ und ψ die Abhängigkeit

$$4)\quad a^2\sin\varphi\cdot\sin\psi - b^2\cos\varphi\cdot\cos\psi = 0 \text{ od. } a^2 tg\,\varphi\cdot tg\,\psi = b^2,$$

so daß der Koefficient von x_1y_1 der Null gleich wird, so sind wiederum CX_1 und CY_1 zusammengehörige Durchmesser der Hyperbel, von denen jeder die Sehnen halbirt, welche mit dem andern parallel laufen. Solcher Paare zusammengehöriger Durchmesser der Hyperbel giebt es wieder unendlich viele. Die Gleichung der Hyperbel auf die zusammengehörigen Durchmesser CX_1 und CY_1 (als Koordinaten-Axen) bezogen, ist

$$5)\quad (a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2)\cdot y_1^2 + (a^2\sin\psi^2 - b^2\cos\psi^2)x_1^2 + a^2b^2 = 0,$$

wo jedoch

$$6)\quad tg\,\varphi = \frac{b^2\cos\psi}{a^2\sin\psi};\quad \sin\varphi = \frac{b^2\cos\psi}{\sqrt{a^4\sin\psi^2 + b^4\cos\psi^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2\sin\psi}{\sqrt{a^4\sin\psi^2 + b^4\cos\psi^2}};$$

ist, so daß

$$7)\quad a^2\cdot\sin\varphi^2 - b^2\cdot\cos\varphi^2 = a^2b^2\cdot\frac{b^2\cos\psi^2 - a^2\sin\psi^2}{a^4\sin\psi^2 + b^4\cos\psi^2}.$$

wird. Daraus geht hervor, daß die Koefficienten von y_1^2 und x_1^2 in der Gleichung 5.) immer verschiedene Vorzeichen haben, d. h. daß der eine positiv, der andere aber negativ seyn wird,

und daß die Gleichung überhaupt nicht mehr gilt (weil sie dann x_1 und y_1 zugleich ganz verliert), so oft

$$a^2 \sin\psi^2 - b^2 \cos\psi^2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad tg\,\psi = \frac{b}{a}$$

ist, d. h. so oft CX_1 mit der Asymptote zusammenfällt. Daraus folgt weiter, daß von den beiden zusammengehörigen Durchmessern der Hyperbel der eine derselben allemal die Hyperbel schneidet, der andere aber dann dieselbe allemal nicht schneidet. Daher ist in der Hyperbel von zusammengehörigen Halbmessern nicht die Rede, also auch nicht von Eigenschaften, welche den, unter den N. N. 11.) 12.) 15.) 16.) 17.) des §. 131. IX.) für die Ellipse hingestellten, analog wären *).

VIII. Nehmen wir in der Gleichung VI. 3.), wo noch ψ und φ ganz willkührlich und von einander unabhängig gedacht sind, φ und ψ so, daß

$$tg\,\psi = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad tg\,\varphi = -\frac{b}{a}$$

wird, so daß $\psi = TCX$ und $\varphi = 360^o - UCX$ wird, während CT und CU die Asymptoten der Hyperbel (Fig. 22.) sind, — so fällt CX_1 mit CT, und CY_1 mit CU zusammen und man hat nun die Asymptoten zu Koordinaten-Axen genommen, so daß, wenn man MS parallel mit CU zieht,

$$CS = x_1 \quad \text{und} \quad MS = y_1$$

die Koordinaten des Punktes M der Hyperbel sind. Weil aber diese Werthe von ψ und φ

$$\sin\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

*) Noch mag man bemerken, daß in der Ellipse, wenn φ spitz genommen wurde, der Winkel ψ dann allemal sich als ein stumpfer Winkel auswies; daß aber in der Hyperbel beide Winkel φ und ψ zugleich spitz seyn können und werden, und daß namentlich, wenn ψ spitz genommen wird, der Winkel φ nie stumpf seyn kann, wenn CX_1 und CY_1 zusammengehörige Durchmesser seyn sollen.

liefern, so geht die Gleichung VI. 3.) jetzt über in

$$(\odot)\cdots \qquad x_1 \cdot y_1 = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2),$$

welches die einfachste Gleichung der Hyperbel ist, die sich auf die Asymptoten als Koordinaten-Axen bezieht. Dabei nennt man $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ die **Potenz der Hyperbel**. — Zieht man aber durch B mit CE eine Parallele BH, so ist allemal

$$CH^2 = DH^2 = BH^2 = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2).$$

IX. Die Asymptoten der Hyperbel haben noch die Eigenschaft, daß wenn sie (und die Hyperbel zugleich) von irgend einer geraden Linie KLlk oder K′L′l′k′ (Fig. 22.) in irgend einer Richtung geschnitten werden, dann die Entfernungen der Durchschnitts-Punkte dieser Geraden mit den Schenkeln der Hyperbel und den Asymptoten, einander gleich sind, nämlich

$$KL = kl \qquad \text{oder} \qquad Kl = kL;$$

eben so

$$K'L' = k'l' \qquad \text{oder} \qquad K'l' = k'L'.$$

Nimmt man nämlich die Haupt-Axen CX und CY zu Koordinaten-Axen, und sind x und y ihre zugehörige Koordinaten-Werthe, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$1) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

dagegen sind die Gleichungen beider Asymptoten CHD und CE bezüglich

$$2) \qquad y = \frac{b}{a}x \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Nun führt man eine neue Ordinaten-Axe CY_1 ein, parallel mit der beliebigen Geraden KLlk, welche mit CX einen Winkel φ bildet; bezeichnet die, auf die Koordinaten-Axen CX und CY_1 bezogenen Koordinaten-Werthe durch x' und y', und hat dann zwischen den Koordinaten-Werthen x, y, x' und y', wenn sie einem und demselben Punkte der Ebene (also auch der Asymptote, oder der Hyperbel) angehören, die Gleichungen

$$x = x' + y' \cdot \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = y' \cdot \sin\varphi.$$

Substituirt man nun diese Werthe statt x und y in die Glei-

chung 1.) der Hyperbel, und auch in die Gleichungen 2.) der Asymptoten, so erhält man als neue Gleichung der Hyperbel (VII. 2.)

$$3)\quad (a^2 \sin\varphi^2 - b^2 \cos\varphi^2)\cdot y'^2 - 2b^2 x' y' \cdot \cos\varphi - b^2 x'^2 + a^2 b^2 = 0;$$

und für die beiden Asymptoten erhält man die neuen Gleichungen

$$4)\qquad (a\cdot\sin\varphi - b\cdot\cos\varphi)\cdot y' = bx'$$

$$\text{und}\qquad (a\cdot\sin\varphi + b\cdot\cos\varphi)\cdot y' = -bx',$$

wo für $x' = -CP'$, die beiden Werthe von y' aus der Gleichung 3.) bezüglich die Werthe $P'L$ und $-P'l$ vorstellen, während der Buchstabe y' in der erstern der Gleichungen 4.) den Werth $P'K$, in der andern der Gleichungen 4.) dagegen den Werth $-P'k$ hat (für $x = -CP'$). Findet man nun aus 3.) diese beiden Werthe von y', und aus 4.) ebenfalls die beiden Werthe von y', und zieht man solche von einander ab, so ergiebt sich augenblicklich die Wahrheit der obigen Behauptung.

Diese beiden letztern Nummern enthalten aber die merkwürdigsten Eigenschaften der Asymptoten der Hyperbel.

X. Der Umstand, daß (Fig. 21.), wenn F der Brenn-Punkt ist, die Linie FM in $x\,(=CP)$ sich rational ausdrücken läßt, giebt wiederum eine sehr einfache Polar-Gleichung der Hyperbel, wenn man $MFX = \varphi$ und $FM = r$ setzt. Man setzt nämlich wiederum, ganz analog wie bei der Ellipse

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = e, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{a^2+b^2} = ae$$

und nennt e die Excentricität der Hyperbel; dann nimmt man aus III. 7.), indem man sich x_1 positiv denkt,

$$r = ex_1 + a;$$

außerdem aber hat man noch (weil $FP = CF + CP$ ist)

$$r\cdot\cos\varphi = ae + x_1;$$

eliminirt man nun x_1 aus diesen letztern beiden Gleichungen, so erhält man

$$(\odot)\cdots\qquad r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1-e\cdot cos\,\varphi} = \frac{a\cdot(e^2-1)}{e\cdot cos\,\varphi - 1}.$$

Dies ist die Polar-Gleichung der Hyperbel. Sie giebt nur so lange positive Werthe von r, als der Renner $e\cdot cos\,\varphi - 1$ positiv ist. Sie giebt also nur dann Punkte der Hyperbel (da r d. h. FM nie negativ werden kann), wenn φ zwischen 0 (oder 360°) und demjenigen Werthe φ' von φ liegt, der durch die Gleichung

$$e\cdot cos\,\varphi' - 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad cos\,\varphi' = \frac{1}{e}$$

gegeben ist, welche Gleichung zwei Werthe von φ' liefert, wovon der eine spitz ist, der andere im 4ten Quadranten liegt *). Diese Polar-Gleichung giebt also nur denjenigen Theil der Hyperbel, welcher rechts von CY liegt. — Für x_1 negativ (etwa für den Punkt m), hat man aber (nach III. 7.)

$$r = -ex_1 - a;$$

und außerdem noch

$$r\cdot cos\,\varphi = ae + x_1;$$

folglich, wenn man hieraus wieder x_1 eliminirt,

$$(\text{☾})\cdots\qquad r = \frac{a\cdot(e^2-1)}{e\cdot cos\,\varphi + 1};$$

und diese Polar-Gleichung giebt den andern Theil der Hyperbel zur Linken von C. — Führt man statt W. $mFX = \varphi$ lieber W. $mFX' = \psi$ ein, so daß φ und ψ Nebenwinkel sind, so hat man $cos\,\varphi = -cos\,\psi$, und die Gleichungen $\odot$.) und ☾.) nehmen dann die Form an

$$(\odot_1)\cdots\qquad r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot cos\,\psi} \quad \text{für den Theil der Hyperbel zur Rechten von C;}$$

$$(\text{☾}_1)\cdots\qquad r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1-e\cdot cos\,\psi} \quad \text{für den Theil der Hyperbel zur Linken von C.}$$

Diese letztere Gleichung (☾$_1$) giebt natürlich auch den andern

---

*) Dieser Winkel φ' ist genau derjenige, welchen die Asymptoten mit CX machen (nach VIII.).

Theil der Hyperbel zur Rechten von C, wenn man unter r nicht FM sondern F'M, und unter ψ nicht W. MF'X' sondern W. MF'X versteht.

XI. Endlich kann man in der Hyperbel (wie in §. 131. XI. für die Ellipse) b = a setzen. Die Scheitel-Gleichung der Hyperbel wird dann

$$y^2 = x^2 - 2ax;$$

die Mittel-Punkts-Gleichung dagegen

$$y^2 = x_1^2 - a^2;$$

und die Polar-Gleichungen, in so fern $e = \sqrt{2}$ wird, werden, wenn $r = FM$ und $W. MFX = \varphi$ gesetzt sind,

$$r = \frac{a}{\cos\varphi \cdot \sqrt{2} - 1} \quad \text{oder} \quad r = \frac{a}{\cos\varphi \cdot \sqrt{2} + 1}$$

für die Theile rechts oder links.

Die Asymptoten stehen dasmal auf einander senkrecht, und die Hyperbel heißt die gleichseitige. Sie ist unter den Hyperbeln das, was der Kreis unter den Ellipsen ist, und sie hat in der That eine große Menge Eigenschaften, welche denen des Kreises, wie solche uns aus der Elementar-Geometrie bekannt werden, ganz analog sind.

Anmerkung. Vergleicht man alle drei Gattungen der Linien der zweiten Ordnung mit einander, so findet man noch:

1) Ist $$y^2 = px + qx^2$$ die Gleichung für alle Linien der zweiten Ordnung, wo p positiv, q dagegen 0, negativ und positiv seyn kann, so ist die Ordinate über den Brenn-Punkten allemal $= \frac{1}{2}p$, oder, wie man sich ausdrückt, allemal dem halben Parameter gleich. — Man findet daher zuweilen die Brenn-Punkte nach dieser Eigenschaft definirt.

2) Ist q gegen p sehr klein, so ist für sehr kleine Werthe von x, das Glied qx^2 gegen das Glied px sehr klein, und das y aus $y^2 = px + qx^2$, von dem y aus $y^2 = px$, sehr wenig verschieden. Also kann man in solchem Falle die Ellipse und die Hyperbel (also auch den Kreis) ganz nahe

am Scheitel, als eine Parabel ansehen, ohne merklichen Fehler *).

§. 133.

Wir wollen am Schlusse dieses Kapitels noch zeigen, 1) daß jeder ebene Schnitt eines Kegels allemal eine Linie der zweiten Ordnung ist, und 2) daß jede Linie der zweiten Ordnung aus jedem gegebenen (senkrechten) Kegel geschnitten werden kann, indem man eine Ebene durch ihn legt.

Denkt man sich nämlich einen Winkel $BAZ = \frac{1}{2}\alpha$ (Figg. 23. 24.) um einen seiner Schenkel AZ, der im Raume fest gedacht wird, herumgedreht, so beschreibt der andere unendliche Schenkel AB eine konische Oberfläche, welche an der Spitze den Winkel α hat. Legt man durch diesen Kegel eine ganz beliebige Ebene DMP (Figg. 23.—25.), in welcher aber die Axe AZ nicht liegt, und welche wir die Schnitt-Ebene nennen wollen, so kann man die Axe AZ des Kegels allemal auf diese Schnitt-Ebene projiciren, und dadurch bekommt man die Axen-Ebene BAC senkrecht auf der Schnitt-Ebene DMP, und beide Ebenen schneiden sich in der Geraden DX, welche wir als Abscissen-Axe nehmen wollen. Wir ziehen für einen beliebigen Punkt M des Schnittes DM die MP senkrecht auf DP, setzen $DP = x$, $PM = y$ und suchen nun die Gleichung zwischen x und y.

Da PM senkrecht steht auf der Ebene ABC, also auch auf BC, so steht die Ebene BMCP senkrecht auf ABC, also auch senkrecht auf AZ, sobald man nur BC senkrecht auf AZ gedacht hat. Daher ist der Schnitt BMC ein Kreis, BC sein Durchmesser, und MP senkrecht auf diesem Durchmesser; also hat man nach den Elementen der ebenen Geometrie

---

*) Daher leisten kleine Hohlspiegel, die Kugel-Segmente sind, deren Radius a ist, als Brennspiegel nahehin dasselbe, was nicht größere paraboloidische leisten, deren Parabel durch die Gleichung $y^2 = 2ax$ gegeben ist, sobald nur der größte Werth von x gegen a sehr klein ist.

$$BP : PM = PM : CP$$

oder 1) $MP^2 = BP \cdot CP$ d. h. $y^2 = BP \cdot CP$.

Dies ist aber die verlangte Gleichung des Schnittes DM, sobald wir BP und CP in DP oder x ausdrücken. Zieht man aber DH mit BC parallel, und setzen wir

2) $AD = c$,

so ist noch

3) $DH = 2c \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha$.

Um aber BP und CP in DP oder x auszudrücken, müssen wir drei Fälle unterscheiden, einmal wenn W. $CDX = \beta$ dem Winkel α gleich ist, so daß DX mit AB parallel läuft (Fig. 23.); dann, wenn W. $CDX = \beta$ größer ist als α, so daß DX der AB (in E etwa) begegnet (Fig. 24.); oder endlich, wenn W. $CDX = \beta$ kleiner ist als der Winkel α, so daß die DX der verlängerten BA in E begegnet (Fig. 25.).

I. Läuft DX mit CB parallel (Fig. 23.), ist also $\beta = \alpha$, so ist $BP = DH = 2c \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha$ von x ganz unabhängig, und in dem gleichschenklichen Dreiecke CDP ist $CP = 2x \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha$. Folglich geht die Gleichung 1.) des Schnittes DM jetzt über in

2) $y^2 = 4c \cdot (\sin \frac{1}{2}\alpha)^2 \cdot x$;

und dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $p = 4c \cdot (\sin \frac{1}{2}\alpha)^2$ ist.

Umgekehrt kann man für jede durch die Gleichung

$$y^2 = px$$

gegebene Parabel aus letzterer Gleichung

$$p = 4c \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

allemal c so dazu finden, daß der gegebene Kegel in der gefundenen Entfernung c, parallel mit AB geschnitten, allemal gerade die gegebene Parabel liefert.

II. Ist $\beta > \alpha$ (Fig. 24.), so zieht man DL parallel mit AB, so daß

$$BL = DH = 2c \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

wird. Dann berechnet man LP und CP in den beiden Dreiecken LDP und CDP aus dem Satze, „daß sich die Seiten

verhalten, wie die Sinus der Gegen-Winkel"; und man findet sogleich, weil $sin(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = cos\,\frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$LP = x \cdot \frac{sin(\beta - \alpha)}{cos\,\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{und} \quad CP = x \cdot \frac{sin\,\beta}{cos\,\frac{1}{2}\alpha}.$$

Setzt man nun $BP = BL - LP$ und statt BL, LP und CP ihre Werthe in die Gleichung 1.), so erhält man

$$y^2 = 2c \cdot sin\,\beta \cdot tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot x - \frac{sin(\beta - \alpha) \cdot sin\,\beta}{(cos\,\frac{1}{2}\alpha)^2} \cdot x^2;$$

und dies ist, da $sin(\beta - \alpha)$ mit $\beta - \alpha$ zugleich positiv ist, allemal die Gleichung einer Ellipse, welche mit der Scheitel-Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$ verglichen,

$$c \cdot sin\,\beta \cdot tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{sin(\beta - \alpha) \cdot sin\,\beta}{(cos\,\frac{1}{2}\alpha)^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

liefert, aus welchen beiden Gleichungen die halben Axen a und b berechnet werden können.

Umgekehrt, ist irgend eine Ellipse durch die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ gegeben, so darf man nur

$$c \cdot sin\,\beta \cdot tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{sin(\beta - \alpha) \cdot sin\,\beta}{(cos\,\frac{1}{2}\alpha)^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

setzen, und man wird aus der 2ten Gleichung (weil $b < a$ gedacht werden kann) allemal β, und dann aus der ersten Gleichung noch c so dazu finden, daß der gegebene Kegel gerade diese Ellipse liefert.

III. Ist $\beta < \alpha$ (Fig. 25.), so giebt die ganz analoge Behandlung für den Schnitt die Gleichung

$$y^2 = 2c \cdot sin\,\beta \cdot tg\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot x + \frac{sin(\alpha - \beta) \cdot sin\,\beta}{(cos\,\frac{1}{2}\alpha)^2} x^2;$$

und dies ist die Gleichung einer Hyperbel, und der Schnitt giebt die vollständige Hyperbel, wenn man dem Kegel an der Spitze einen zweiten Congruenten gegenüber stellt, wie ebenfalls leicht zu beweisen ist.

Drittes Kapitel.

Von den Koordinaten im Raume.

§. 134.

Soll die gegenseitige Lage mehrerer Punkte, die nicht in einer und derselben gegebenen Ebene liegen, näher bestimmt werden, so nimmt man drei auf einander senkrechte Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ (Fig. 26.), welche sich in drei auf einander senkrechten Koordinaten-Axen OX, OY, OZ schneiden. Diese drei Ebenen bilden acht Räume, und in jedem dieser Räume ist ein Punkt M völlig gegeben, wenn man seine drei senkrechten Abstände MM_3, MM_2 und MM_1 von den drei Koordinaten-Ebenen kennt. Diese Abstände nennt man nun die Koordinaten des Punktes M; während unter Koordinaten-Werth eines Punkts M die positiven oder negativen Zahlen verstanden werden, welche man erhält, wenn den in absoluten Zahlen ausgedrückten Koordinaten noch ein + oder — Zeichen vorgesetzt wird, um anzudeuten, daß der Punkt M auf der einen oder auf der entgegengesetzten Seite der Koordinaten-Ebene liegt. — Und liegt der Punkt M in der Koordinaten-Ebene selbst, so sagt man: „der ihm in Bezug auf diese Koordinaten-Ebene zukommende Koordinaten-Werth sey der Null gleich".

§. 135.

I. Legt man durch M drei Ebenen parallel mit den Koordinaten-Ebenen, so entsteht ein rechtwinkliches Parallelepipedum, in welchem je vier parallele und gleiche Kanten auf zweien gegenüberstehenden Ebenen (und allen geraden Linien in denselben)

senkrecht stehen. Also steht OX auf MM′, OY auf MM″, und OZ auf MM‴ senkrecht. Sind nun x, y, z die Koordinaten-Werthe des Punktes M, so hat man

$$OM' = MM_3 = M_1M'' = M_2M''' = \pm x,$$
$$OM'' = MM_2 = M_1M' = M_3M''' = \pm y,$$
$$OM''' = MM_1 = M_2M' = M_3M'' = \pm z.$$

Folglich ist

1) $$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und

2) $$\cos MOX = \frac{x}{OM}; \quad \cos MOY = \frac{y}{OM}; \quad \cos MOZ = \frac{z}{OM},$$

wo OM nicht negativ seyn kann, während diese Kosinusse bezüglich mit x, y, z zugleich positiv oder negativ sind. Also wird z. B. der Winkel MOX spitz oder stumpf seyn, je nachdem x positiv oder negativ gegeben ist; u. s. w. — Aus den Gleichungen 2.) und 1.) folgt auch noch

3) $$(\cos MOX)^2 + (\cos MOY)^2 + (\cos MOZ)^2 = 1.$$

II. Ist N ein zweiter Punkt, gegeben durch seine Koordinaten-Werthe x', y', z'; so hat man (nach I.)

4) $$ON = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

und

5) $$\cos NOX = \frac{x'}{ON}; \quad \cos NOY = \frac{y'}{ON}; \quad \cos NOZ = \frac{z'}{ON}.$$

Legt man aber noch durch M neue Koordinaten-Axen MX′, MY′, MZ′, mit den alten OX, OY, OZ bezüglich parallel, so sind in Bezug auf diese neuen Koordinaten-Ebenen die Koordinaten-Werthe des Punktes N offenbar

$$x' - x, \quad y' - y \quad \text{und} \quad z' - z;$$

und daher ist noch (nach I.)

6) $$MN = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

und

7) $$\cos NMX' = \frac{x'-x}{MN}; \quad \cos NMY' = \frac{y'-y}{MN}; \quad \cos NMZ' = \frac{z'-z}{MN};$$

während man von diesen drei Winkeln sagt: „sie seyen

„die Winkel, welche die Gerade MN mit den drei Koordinaten-„Axen OX, OY und OZ macht.“

III. Im Dreieck MON hat man, nach dem allgemeinern pythagorischen Lehrsatze der Trigonometrie,

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos MON.$$

Daraus findet sich

$$\cos MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON}$$

Setzt man aber hier herein statt OM, ON, MN ihre, in die Koordinaten-Werthe der Punkte M und N ausgedrückten Werthe, so erhält man

$$8) \qquad \cos MON = \frac{x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'}{OM \cdot ON},$$

wo OM und ON nie negative Zahlen vorstellen. Diese Gleichung läßt sich aber (nach 2. und 5.) auch so schreiben:

$$9) \quad \cos MON = \cos MOX \cdot \cos NOX + \cos MOY \cdot \cos NOY + \cos MOZ \cdot \cos NOZ.$$

Ist daher

$$10) \begin{cases} \cos MOX \cdot \cos NOX + \cos MOY \cdot \cos NOY + \cos MOZ \cdot \cos NOZ = 0 \\ \text{oder} \qquad x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = 0, \end{cases}$$

so stehen OM und ON auf einander senkrecht; und umgekehrt, stehen OM und ON auf einander senkrecht, so findet die Gleichung 10.) statt.

Anmerkung. Da zwei Ebenen unter sich denselben Winkel machen, den zwei auf dieselben senkrecht gedachten Geraden unter sich bilden, so kann man diese letztern Wahrheiten auch sogleich auf Winkel ausdehnen, welche zwei Ebenen unter sich und mit den Koordinaten-Ebenen machen.

§. 136.

Sind M, N, P, Q beliebige (und beliebig viel) Punkte, entweder alle in einer Ebene, oder im Raume beliebig vertheilt; denkt man sich die Linien MN, NP, PQ, QM gezogen; sind ferner μ, ν, π, ϱ die Winkel, welche diese Richtungen MN, NP, PQ, QM (wo man nicht die entgegengesetzten Richtungen, z. B. nicht PN statt der Richtung NP nehmen darf) mit einer beliebigen

digen Geraden OX (und nicht mit ihrer entgegengesetzten Richtung XO) machen *), so ist allemal

$$MN \cdot \cos\mu + NP \cdot \cos\nu + PQ \cdot \cos\pi + QM \cdot \cos\varrho = 0.$$

Denn, man denke sich zuerst die Punkte M, N, P, Q mit OX in einer und derselben Ebene, wie etwa in Fig. 27.), so hat man

$MN \cdot \cos\mu = \quad M_1N_1$, weil hier μ spitz gedacht ist,
$NP \cdot \cos\nu = -N_1P_1$, weil ν nach der Figur stumpf ist,
$PQ \cdot \cos\pi = \quad P_1Q_1$, weil π der Figur zu Folge spitz genommen werden muß,
$QM \cdot \cos\varrho = -Q_1M_1$, weil ϱ in der Figur stumpf ist;
also springt in diesem Falle die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

Aber gerade so bleibt die Sache, wenn M, N, P, Q beliebig im Raume vertheilt sind, und OX wiederum beliebig im Raume liegt; weil sich jede Linie z. B. MN auf die Gerade OX gerade so projicirt, wie auf eine durch M gelegte Parallele mit OX; und um dies letztere recht anschaulich zu machen, darf man nur durch die Punkte M und N Ebenen auf OX senkrecht gelegt sich denken.

§. 137.

I. Sind x, y, z die Koordinaten-Werthe eines Punktes M, die sich auf die Koordinaten-Axen OX, OY, OZ beziehen; legt man dann durch O drei neue, wiederum auf einander senkrechte Axen OX_1, OY_1, OZ_1, welche ihrer Lage nach gegeben sind durch die Winkel

X_1OX, X_1OY, X_1OZ; Y_1OX, Y_1OY, Y_1OZ; Z_1OX, Z_1OY, Z_1OZ,

deren Kosinusse bezüglich durch

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha',\ \beta',\ \gamma';\quad \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$$

bezeichnet seyn mögen; — und sind zuletzt x_1, y_1, z_1 die drei neuen, auf diese letzteren Koordinaten-Axen bezogenen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M, so hat man allemal

---

*) Treffen sich zwei Gerade im Raume gar nicht, obgleich jede ohne Ende fortgeht, so versteht man unter dem Winkel, den sie mit einander machen, allemal den Winkel, den die eine derselben mit derjenigen Geraden macht, welche durch einen Punkt der erstern, mit der andern parallel gedacht wird.

$$1)\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z_1 = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{array}\right\}^{*)} \text{ und } 2)\left\{\begin{array}{l} x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 \\ y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 \\ z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1 \end{array}\right\}.$$

Dabei existiren zwischen den 9 Kosinussen noch 6 Gleichungen, nämlich

$$3)\left\{\begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ und } 4)\left\{\begin{array}{l} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \end{array}\right\}$$

während statt dieser 6 Gleichungen auch diese anderen 6 Gleichungen genommen werden können, nämlich

$$5)\left\{\begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ und } 6)\left\{\begin{array}{l} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0 \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \end{array}\right\}.$$

Die Gleichungen 1.) findet man am einfachsten, wenn man sich den besonderen Fall denkt, wo x, y, z und x_1, y_1 und z_1 alle positiv sind, und nun (Fig. 26.) die Punkte O, M′, M_1, M auf die OX_1 projicirt, wo dann der Satz des vorstehenden §. 136.) eintritt und die erstere der Gleichungen 1.) ohne Weiteres liefert. Projicirt man aber dieselben Punkte auf OY_1 und OZ_1, so erhält man die beiden andern der Gleichungen 1.). — Die Gleichungen 2.) würde man ganz auf dieselbe Weise bekommen, wenn man sich OX_1, OY_1 und OZ_1 als die alten Axen dächte, und dann OX, OY, OZ als die neuen.

So bequem diese Darstellungs-Weise ist, weil man mittelst derselben die Gleichungen 1.) und 2.) jedesmal augenblicklich bilden kann, also letztere nicht im Gedächtniß zu behalten braucht, so ist doch der nachstehende Beweis dieser Gleichungen 1.) und 2.) gründlicher, weil er sich auf alle Lagen des Punktes M erstreckt. Man setze nämlich OM = r; und bezeichne durch

$$\delta,\ \delta',\ \delta'' \quad \text{und} \quad \varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon''$$

die Kosinusse der Winkel

$$MOX,\ MOY,\ MOZ \quad \text{und} \quad MOX_1,\ MOY_1,\ MOZ_1,$$

---

*) D. h. die auf OX_1 genommene Koordinate x_1 ist allemal die Summe der Projektionen der 3 alten Koordinaten x, y, z auf diese Axe OX_1; u. s. f. auch für y_1 und z_1. —

Umgekehrt ist auch jede alte Ordinate x, oder y, oder z, gleich der Summe der Projektionen der drei neuen Koordinaten x_1, y_1, z_1 auf bezüglich OX, oder OY, oder OZ. — Dies letztere drücken die drei Gleichungen 2.) aus.

so hat man (nach §. 135. N. 2.)

$$\delta = \frac{x}{r}, \quad \delta' = \frac{y}{r}, \quad \delta'' = \frac{z}{r} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{x_1}{r}, \quad \varepsilon' = \frac{y_1}{r}, \quad \varepsilon'' = \frac{z_1}{r};$$

außerdem aber ist noch (nach §. 135. N. 9.)

$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon\cdot\alpha + \varepsilon'\cdot\alpha' + \varepsilon''\cdot\alpha'' & \quad \varepsilon &= \delta\cdot\alpha + \delta'\cdot\beta + \delta''\cdot\gamma \\ \delta' &= \varepsilon\cdot\beta + \varepsilon'\cdot\beta' + \varepsilon''\cdot\beta'' \quad \text{und} & \quad \varepsilon' &= \delta\cdot\alpha' + \delta'\cdot\beta' + \delta''\cdot\gamma' \\ \delta'' &= \varepsilon\cdot\gamma + \varepsilon'\cdot\gamma' + \varepsilon''\cdot\gamma'' & \quad \varepsilon'' &= \delta\cdot\alpha'' + \delta'\cdot\beta'' + \delta''\cdot\gamma''. \end{aligned}$$

Werden nun hier herein statt δ, δ', δ'', ε, ε' und ε'' ihre so eben vorgezeigten Werthe gesetzt, so hat man sogleich die Gleichungen 2.) und 1.).

Die Gleichungen 3.) und 5.) sind keine anderen als die Gleichung §. 135. N. 3.). — Die Gleichungen 4.) und 6.) endlich sind keine anderen als die Gleichung §. 135. N. 10.), in so fern die neuen Axen paarweise unter sich rechte Winkel bilden, und dasselbe auch mit den alten Axen der Fall ist.

II. Von den 9 Kosinussen α, α', α'', β, β', β'', γ, γ' und γ'' bleiben nur drei völlig willkührlich; die übrigen sind von diesen dreien abhängig, wie solches aus der geometrischen Betrachtung der Figur hervorgeht. — Man kann aber drei neue unabhängige Werthe φ, ψ und θ einführen, so daß alle 9 Kosinusse α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' und sonach die alten Koordinaten-Werthe x, y, z (in die neuen x_1, y_1, z_1 und noch) in φ, ψ und θ ausgedrückt erscheinen, während φ, ψ und θ ganz willkührlich gedacht werden können.

Es werden sich nämlich die beiden Koordinaten-Ebenen X_1OY_1 und XOY in einer Gerade D'OD (Fig. 28.) schneiden, welche wir die Knoten-Linie nennen, und es ist nun die Lage der neuen Koordinaten-Axen OX_1, OY_1 und OZ_1 völlig bestimmt, 1) wenn man den Winkel φ kennt, welchen OD mit OX macht, 2) den Winkel ψ, welchen OX_1 mit OD macht, und 3) den Winkel θ, welchen die Ebenen XOY und X_1OY_1, oder die Geraden OZ und OZ_1 mit einander machen und der spitz oder stumpf seyn wird, je nachdem man die eine Richtung von OZ_1 oder die entgegengesetzte zur positiven Seite der neuen Koordinaten-Axen wählt und durch OZ_1 bezeichnet. Der Winkel θ ist also derjenige, dessen Kosinus wir vorher durch γ'' bezeichnet haben.

Man nimmt also

$XOD = \varphi$, $YOD = 90^\circ + \varphi$, $X_1OD = \psi$, $Y_1OD = 90^\circ + \psi$
und $\cos\theta = \gamma''$

und sucht nun die übrigen Kosinusse α, β, γ, etc. etc. alle in φ, ψ und θ auszudrücken. Dies geschieht leicht mittelst des Satzes der sphärischen Trigonometrie, nach welchem allemal

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

ist, so oft a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks ausdrücken, und A den, der Seite a gegenüberliegenden Winkel vorstellt. Diesen Satz wendet man auf die 8 körperlichen Dreiecke an, welche bezüglich gebildet werden aus den Kanten
OD, OX, OX_1; OD, OX, OY_1; OD, OY, OX_1; OD, OY, OY_1;
OD, OZ, OX_1; OD, OZ, OY_1; OD, OX, OZ_1; OD, OY, OZ_1;
während man statt des Winkels A immer den Winkel an der Kante OD setzt, welcher bald θ, bald $180^\circ - \theta$, bald $90^\circ - \theta$, bald auch $90^\circ + \theta$ ist.

Man findet dann, wenn alle Kosinus und Sinus der Winkel $90^\circ + \varphi$, $90^\circ + \psi$, $180^\circ - \theta$, $90^\circ - \theta$, $90^\circ + \theta$, auf *cos* und *sin* der Winkel φ, ψ, θ zurückgebracht sind, die nachstehenden Resultate, nämlich

$$7)\quad \begin{cases} \alpha = \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos\theta; \\ \beta = -\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos\theta; \\ \gamma = -\sin\psi \cdot \sin\theta; \\ \alpha' = -\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi \cdot \cos\theta; \\ \beta' = \sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \cos\psi \cdot \cos\theta; \\ \gamma' = \cos\psi \cdot \sin\theta; \\ \alpha'' = -\sin\varphi \cdot \sin\theta; \\ \beta'' = -\cos\varphi \cdot \sin\theta; \\ \gamma'' = \cos\theta. \end{cases}$$

Und in der That genügen diese Werthe den 12 Gleichungen (I. 3.—6.) vollständig.

III. Legt man durch einen Punkt O', dessen Koordinaten-Werthe p, q, r seyn mögen, neue Koordinaten-Axen O'X',

$O'Y'$, $O'Z'$ parallel mit den alten OX, OY, OZ; und legt man dann durch O' noch ein drittes Koordinaten-Axen-System $O'X_1$, $O'Y_1$, $O'Z_1$, dessen Lage gegeben ist durch die Winkel

$$X_1O'X',\quad X_1O'Y',\quad X_1O'Z';\quad Y_1O'X',\quad Y_1O'Y',\quad Y_1O'Z';$$
$$Z_1O'X',\quad Z_1O'Y',\quad Z_1O'Z',$$

deren Kosinusse bezüglich

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha',\ \beta',\ \gamma';\quad \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$$

sind, so hat man (nach I. N. 2. u. §. 135. II.), wenn x_1, y_1, z_1 die, auf diese letztern Axen bezogenen Koordinaten-Werthe desselben Punktes M sind, dessen ersteren Koordinaten-Werthe durch x, y, z vorgestellt werden,

$$8)\cdots\quad \begin{cases} x = p + \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 \\ y = q + \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 \\ z = r + \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1, \end{cases}$$

wo die 9 Kosinusse von den 3 Winkeln φ, ψ, θ mittelst der vorstehenden Gleichungen 7.) abhängen, sobald φ die Lage der Knoten-Linie $O'D$ d. h. den Winkel $X'OD$, ψ die Lage von $O'X_1$ d. h. den Winkel $DO'X_1$, endlich θ die Lage der Ebene $X_1O'Y_1$ d. h. den Winkel $Z'O'Z_1$ vorstellt.

§. 138.

Man kann auch statt rechtwinklicher Koordinaten-Werthe x, y, z, **Polar-Koordinaten** φ, θ, r für denselben Punkt M einführen. Es ist nämlich der Punkt M gegeben, wenn man den Winkel θ (von 0 bis 2π gedacht) kennt, welchen die Ebene MOX mit der Ebene YOX macht; ferner wenn in dieser Ebene MOX der Winkel $MOX = \varphi$ bekannt ist (der von 0 bis π gerechnet wird), endlich wenn man noch die Länge r des **Radius-Vektor** OM hat.

Und man findet sogleich

$$x = r\cdot\cos\varphi;\quad y = r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta\quad \text{und}\quad z = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta.$$

Viertes Kapitel.

Wie Flächen und Linien im Raume durch Gleichungen ausgedrückt werden.

§. 139.

I. Hat man drei auf einander senkrechte Axen OX, OY, OZ (Fig. 26.), und sind x, y und z die drei zugehörigen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M, (so daß x und y die Koordinaten-Werthe seiner Projektion M_1 auf XOY vorstellen, und $z = \pm MM_1$ ist); und liefert eine Gleichung

$$f_{x,y,z} = 0$$

zu stetig neben einander liegenden reellen Werthen von x und y, auch reelle Werthe von z, so ist die Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ der Repräsentant irgend einer ebenen oder krummen Fläche, sobald man unter den unendlich vielen zusammengehörigen reellen Werthen von x, y, z, welche dieser Gleichung genügen, Koordinaten-Werthe zugehöriger Punkte versteht. — Es sind nämlich x und y ganz beliebig zu nehmen, und z ergiebt sich dann aus der Gleichung $f = 0$ jedesmal dazu.

II. Bezieht man zwei solche Gleichungen

$$1) \quad f_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad 2) \quad \varphi_{x,y,z} = 0$$

auf dieselben Koordinaten-Axen OX, OY und OZ, so hat man zwei solche Flächen, sobald man in jeder Gleichung unter z etwas anderes, nämlich jedesmal die Funktion von x und y (d. h. den Ausdruck in x und y) versteht, der aus der Gleichung sich für z ergiebt, und der in jeder Gleichung ein anderer ist. — Denkt man sich aber in beiden Gleichungen die x, y und auch die z als genau dieselben, so finden sich y und z als Funktio-

nen von x allein, d. h. in x allein ausgedrückt, und man hat dann nur die Punkte im Auge, welche beide Flächen mit einander gemein haben, d. h. die Durchschnittslinie beider Flächen. Und da man jede gerade oder krumme Linie im Raume als die Durchschnittslinie zweier durch sie gelegten Flächen betrachten kann, so kann man jede gerade oder krumme Linie im Raume durch zwei solche Gleichungen zwischen x, y und z vorstellen, welche y und z in x ausgedrückt liefern.

III. Hat man nun eine Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ für irgend eine Fläche; führt man die neuen Koordinaten-Axen des §. 137 III.) ein; und setzt man in $f = 0$ statt x, y, z diese Werthe aus §. 137. III. 8.), so erhält man augenblicklich die neue Gleichung $F_{x_1,y_1,z_1} = 0$ für dieselbe Fläche, jedoch auf dieses andere, also auf ein ganz beliebiges neues, aber wiederum rechtwinkliches Axen-System bezogen.

Es geht aber sogleich aus der Form der Gleichungen des §. 137. III. 8.) hervor:

1) Die beiden Gleichungen $f_{x,y,z} = 0$ und $F_{x_1,y_1,z_1} = 0$ sind beide zu gleicher Zeit algebraische, oder beide zu gleicher Zeit transcendente.

2) Im Falle sie algebraische sind, sind sie auch beide allemal von einer und derselben Dimension.

IV. Daher kann man die Flächen eintheilen in a) **algebraische** und b) **transcendente**, je nachdem die Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ derselben, algebraisch oder transcendent ist. Und die algebraischen Flächen werden dann wieder eingetheilt in

α) Flächen der **ersten Ordnung**, deren Gleichung von der ersten Dimension ist, also die Form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

hat;

β) Flächen der **zweiten Ordnung**, deren Gleichung von der zweiten Dimension ist, also die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

hat;

γ) Flächen der dritten, vierten, n^{ten} Ordnung, deren Gleichungen von der dritten, vierten, n^{ten} Dimension sind.

V. Wird eine gegebene Fläche von den drei Koordinaten-Ebenen geschnitten, so nennt man die Durchschnitts-Figuren die Grundschnitte. — Ist $f_{x,y,z} = 0$ die Gleichung der Fläche, so ist, je nachdem 0 statt z, statt y oder statt x gesetzt wird

$f_{x,y,0} = 0$ die Gleichung des Grundschnittes in der Ebene XOY auf die Axen OX und OY bezogen;

$f_{x,0,z} = 0$ die Gleichung des Grundschnittes in der Ebene XOZ auf die Axen OX und OZ bezogen;

$f_{0,y,z} = 0$ die Gleichung des Grundschnittes in der Ebene YOZ auf die Axen OY und OZ bezogen.

VI. Setzt man aber in der Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ der Fläche, statt z, y, x abwechselnd und bezüglich c, b, a, so ist

$f_{x,y,c} = 0$ die Gleichung eines Schnittes, welcher mit XOY parallel, und von XOY um $\pm c$ entfernt gelegt ist, auf Axen bezogen, welche in der Ebene des Schnittes parallel mit OX und OY gedacht sind, und durch den Punkt, in welchem diese Ebene des Schnittes von OZ getroffen wird.

Ferner ist

$f_{x,b,z} = 0$ die Gleichung eines mit XOZ parallelen und von XOZ um $\pm b$ entfernten Schnittes

und

$f_{a,y,z} = 0$ die Gleichung eines mit YOZ parallelen und von YOZ um $\pm a$ entfernten Schnittes, jedesmal auf Axen bezogen, welche in der Ebene des Schnittes durch den Punkt, in denen die Ebene des Schnittes von der einen der drei Koordinaten-Axen getroffen wird, mit den beiden andern der Koordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel gelegt sind.

VII. Will man aber durch die, vermöge der Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ gegebene Fläche einen beliebigen ebenen Schnitt legen, so muß man entweder die Gleichung der durchgelegten Ebene

aufsuchen und dann beide Gleichungen in Verbindung als die Punkte des Schnittes bestimmend beibehalten (nach II.), oder man muß diese Ebene als eine neue Koordinaten-Ebene ansehen, und die neue Gleichung der gegebenen Fläche suchen (nach III.), welche sich auf diese und noch zwei andere beliebig auf ihr und auf einander senkrecht genommenen Koordinaten-Ebenen bezieht. Dann ist der gesuchte Schnitt der (nach V.) leicht zu findende neue Grundschnitt.

§. 140.

Von den Flächen der ersten Ordnung.

Betrachten wir nun die algebraische Fläche der ersten Ordnung, wie solche durch die Gleichung der ersten Ordnung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegeben ist.

I. Die Gleichungen ihrer drei Grundschnitte sind (nach §. 139. V.)

$Ax + By + D = 0$; $Ax + Cz + D = 0$ und $By + Cz + D = 0$; also wird die Fläche der ersten Ordnung von allen drei Koordinaten-Ebenen in geraden Linien geschnitten.

II. Führt man neue Koordinaten-Ebenen ein, so nimmt die neue Gleichung derselben Fläche der ersten Ordnung die Form

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_2 = 0$$

an (nach §. 139. III. 2.); also sind die neuen Grundschnitte wiederum g e r a d e Linien.

Die Fläche der ersten Ordnung wird also von jeder Ebene nach jeder Richtung in einer g e r a d e n Linie geschnitten. Dies ist aber der Charakter einer E b e n e. Also drückt die Gleichung der ersten Ordnung allemal eine Ebene aus. — Und umgekehrt; jede Ebene kann und wird allemal durch eine Gleichung der ersten Ordnung ausgedrückt werden, wenn man sie nur auf rechtwinkliche Koordinaten-Axen bezieht.

III. Um nämlich die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x, y, und z eines jeden Punktes M einer gegebenen

Ebene zu finden, denke man sich, wenn OX, OY, OZ die drei auf einander senkrechten Coordinaten-Axen vorstellen, von O aus auf die gegebene Ebene ein Perpendikel OH gefällt, welches der fraglichen Ebene in H begegnet. Die Lage der Ebene ist nun völlig gegeben, sobald man die Länge $OH = h$ des Perpendikels kennt und noch die Winkel HOX, HOY, HOZ, welche dieses Perpendikel mit den drei Axen macht, und deren Cosinusse beziehlich α, β, γ seyn mögen. Dann aber folgt aus §. 136, daß h allemal der Summe der Projektionen von x, y und z auf OH gleich ist, so oft x, y, z einem Punkte M der fraglichen Ebene angehören; also hat man

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = h;$$

und dieß ist die Gleichung der Ebene. — Diese Gleichung kann aber auch noch mit einer beliebigen Zahl r multiplicirt erscheinen.

IV. Ist daher eine Ebene gegeben durch die Gleichung

1) $$Ax + By + Cz = D,$$

und ist h die Länge des von O aus auf dieselbe gefällten Perpendikels OM; sind ferner α, β, γ die Cosinusse der Winkel HOX, HOY, HOZ, welche das Perpendikel OH mit den drei Axen OX, OY, OZ macht, so ist die Gleichung derselben Ebene auch

2) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = h.$$

Es muß also die eine dieser Gleichungen 1) und 2) aus der andern sich ergeben, wenn man die andere mit irgend einer unbekannten Zahl r multiplicirt. Folglich muß es eine unbekannte Zahl r geben, so daß

$A = r\alpha$, $B = r\beta$, $C = r\gamma$ und $D = rh$ ist.

Quadrirt und addirt man aber die drei ersten dieser Gleichungen, so erhält man (wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$)

3) $$A^2 + B^2 + C^2 = r^2, \quad \text{also} \quad r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und

4) $$\alpha = \frac{A}{r}, \quad \beta = \frac{B}{r}, \quad \gamma = \frac{C}{r};$$

so wie dann

5) $$h = \frac{D}{r}.$$

Mittelst der Gleichungen 3.—5.) hat man also für jede durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

gegebene Ebene, die Länge h des von O aus auf dieselbe gefällten Perpendikels OH, so wie die Winkel HOX, HOY, HOZ gefunden, welche solches mit den drei Axen macht.

V. Sind daher zwei Ebenen gegeben durch die Gleichungen

1) $$Ax + By + Cz = D$$

und

2) $$A'x + B'y + C'z = D',$$

so sind solche offenbar mit einander parallel, wenn diese Winkel HOX, HOY, HOZ für beide dieselben werden, also wenn, sobald $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = r$ und $\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} = r'$ gesetzt wird,

$$\frac{A}{r} = \frac{A'}{r'}, \quad \frac{B}{r} = \frac{B'}{r'} \quad \text{und} \quad \frac{C}{r} = \frac{C'}{r'},$$

d. h. wenn

3) $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

ist *). — Der Abstand der beiden parallelen Ebenen von einander ist dann $= \pm\left(\frac{D}{r} - \frac{D'}{r'}\right)$.

VI. Laufen aber die beiden Ebenen, die durch die Gleichungen

1) $$Ax + By + Cz = D$$

2) $$A'x + B'y + C'z = D'$$

gegeben sind, nicht mit einander parallel, so schneiden sie sich in einer Geraden; und diese Gerade ist durch dieselben beiden

*) Diese Bedingung des Parallelismus zweier Ebenen findet man auch, wenn man die Bedingungen aufsucht, welche erfüllt seyn müssen, damit die Grundschnitte der beiden Ebenen mit jeder von zwei Koordinaten-Ebenen, unter sich parallel sind.

Gleichungen gegeben, sobald man in beiden nicht nur x und y, sondern auch z als dieselben Werthe vorstellend sich denkt. Die Ebenen bilden an dieser Geraden einen Winkel mit einander, welcher dem Winkel HOH′ gleich ist, den die von O aus auf diese Ebenen gefällten Perpendikel OH und OH′ mit einander machen. Und nach §. 135. N. 9.), so wie nach der vorliegenden N. IV.) ist sogleich

$$3)\quad \cos HOH' = \frac{A}{r}\cdot\frac{A'}{r'}+\frac{B}{r}\cdot\frac{B'}{r'}+\frac{C}{r}\cdot\frac{C'}{r'}$$

$$= \frac{A\cdot A'+B\cdot B'+C\cdot C'}{r\cdot r'},$$

wo $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ und $r'=\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$ ist.

Die beiden Ebenen 1.) und 2.) stehen also auf einander senkrecht, wenn man

$$4)\qquad A\cdot A'+B\cdot B'+C\cdot C'=0$$

hat.

VII. Will man die Gleichung aller Ebenen finden, welche durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, dessen Koordinaten-Werthe a, b, c sind, so schreibt man nur

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

und nimmt A, B, C ganz willkührlich.

Denn die Gleichung

$$Ax+By+Cz+D=0$$

drückt jede Ebene aus. Weil wir aber nur diejenigen haben wollen, welche durch den gegebenen Punkt (a, b, c) gehen, so müssen a, b, c statt x, y, z gesetzt, der Gleichung genügen; also muß

$$Aa+Bb+Cc+D=0$$

eine identische Gleichung seyn. Eliminirt man nun D, dadurch daß man die beiden letztern Gleichungen von einander subtrahirt, so erhält man die obige.

VIII. Soll eine Ebene durch die drei gegebenen Punkte hindurchgehen, deren Koordinaten-Werthe bezüglich a, b, c; a′, b′, c′ und a″, b″, c″ sind, so nimmt man ihre Gleichung

$$1)\qquad Ax+By+Cz+D=0$$

und hat dann die drei Gleichungen

$$2) \quad \begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0 \\ Aa' + Bb' + Cc' + D = 0 \\ Aa'' + Bb'' + Cc'' + D = 0, \end{cases}$$

findet daraus die Werthe m, n, p der drei Unbekannten $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, und dadurch geht die Gleichung 1.), wenn man sie vorher durch D dividirt, über in

$$3) \quad mx + ny + pz + 1 = 0$$

und diese Gleichung der gesuchten Ebene kann man nun auch noch mit einer ganz beliebigen Zahl D multipliciren, so daß man als Gleichung derselben Ebene noch hat

$$4) \quad Dm \cdot x + Dn \cdot y + Dp \cdot z + D = 0.$$

IX. Soll die Gleichung einer Ebene hingeschrieben werden, welche durch einen, mittelst der Koordinaten-Werthe a, b, c gegebenen Punkt hindurchgeht, und noch mit der durch die Gleichung

$$1) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebenen Ebene parallel läuft, so schreibe man nur

$$2) \quad A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$

und man hat die verlangte Gleichung (nach VI. und V.).

X. Soll aber die Ebene durch den Punkt (a, b, c) hindurchgehen und auf der Ebene VIII. 1.) senkrecht stehen, so ist ihre Gleichung

$$3) \quad A'(x-a) + B'(y-b) + C'(z-c) = 0,$$

sobald A', B' beliebig gewählt sind, C' aber aus der Gleichung

$$4) \quad A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C' = 0 \text{ (V. VI. N. 4.)}$$

dazu gefunden ist. — Es giebt daher unendlich viele solche Ebenen, die durch einen gegebenen Punkt gehen und zu gleicher Zeit auf einer gegebenen Ebene senkrecht stehen.

XI. Soll aber die Ebene durch zwei gegebene Punkte (a, b, c) und (a', b', c') hindurchgehen und auf der durch die Gleichung VIII. 1.) gegebenen Ebene senkrecht stehen, so ist ihre

Gleichung die 3.), sobald außer der Gleichung 4.) auch noch die Gleichung

5) $A'(a'-a)+B'(b'-b)+C'(c'-c)=0$

zur Bestimmung der Koefficienten B' und C' genommen wird. — Es giebt aber nur eine einzige Ebene der Art.

§. 141.

Von den Flächen der zweiten Ordnung.

Die allgemeinste Gleichung der Flächen der zweiten Ordnung, auf rechtwinkliche Axen bezogen ist

1) $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0.$

I. Denkt man sich hier einen bestimmten Werth z' statt z gesetzt, so hat man (nach §. 139. VI.) für den mit XOY parallelen und von XOY um $\pm z'$ entfernten Schnitt, die Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x und y, deren Glieder der höchsten Dimension $Ax^2+Dxy+By^2$ sind, so daß, wenn diese Gleichungen wirklich Kurven vorstellen, diese Schnitte lauter Parabeln sind (im Falle $D^2-4AB=0$), oder lauter Ellipsen (wenn D^2-4AB negativ), oder endlich lauter Hyperbeln (wenn D^2-4AB positiv ist). Und da auch $z'=0$ seyn kann, so ist der in XOY liegende Grundschnitt darunter mit begriffen.

Die mit den Koordinaten-Ebenen parallelen Schnitte treffen also die krumme Fläche der zweiten Ordnung (den Körper) entweder gar nicht, oder doch immer in lauter gleichnamigen Kegelschnitten; denn, was für die eine der Koordinaten-Ebenen gesagt ist, gilt offenbar auch für jede der beiden andern.

II. Führt man neue Koordinaten-Axen ein, genau wie im §. 137. III.), so wird die neue Gleichung derselben Fläche genau wieder von derselben Form, wie die Gleichung 1.), nämlich

2) $A'x_1^2+B'y_1^2+C'z_1^2+D'x_1y_1+E'x_1z_1+F'y_1z_1+G'x_1$
$+H'y_1+K'z_1+L'=0,$

nur daß die Koefficienten A', B', C', D', etc. etc. die sechs

beliebigen Stücke p, q, r und φ, ψ, θ in sich aufnehmen, während p, q, r die Koordinaten-Werthe des Anfangs-Punkts der neuen Koordinaten, φ, ψ, θ aber die Winkel sind, wodurch die Lage der neuen Koordinaten-Ebenen gegen die alten festgestellt sich sieht. — Da demnach die mit diesen neuen Koordinaten-Ebenen parallelen Schnitte, wenn sie die Fläche wirklich treffen (nach I.), entweder lauter Parabeln, lauter Ellipsen, oder lauter Hyperbeln sind, jede dieser neuen Koordinaten-Ebenen aber eine ganz beliebige Ebene im Raume ist, so folgt

daß jede Fläche der zweiten Ordnung von jeder beliebigen Ebene in einer Linie der zweiten Ordnung geschnitten wird, und daß alle mit dieser Ebene parallelen Schnitte, wenn sie die Fläche der zweiten Ordnung wirklich treffen, immer Kegelschnitte derselben Art sind, nämlich lauter Parabeln, oder lauter Ellipsen, oder lauter Hyperbeln *).

Während aber die mit irgend einer Ebene parallelen Schnitte z. B. lauter Ellipsen sind, können die mit einer andern Ebene parallelen Schnitte lauter Parabeln, und die mit einer dritten Ebene parallelen Schnitte lauter Hyperbeln seyn.

III. Weil durch Einführung neuer Koordinaten-Axen sechs unbestimmt bleibende Stücke p, q, r, φ, ψ, θ in die Gleichung hineinkommen, so kann man über letztere nachgehends so disponiren, daß sechs Glieder der neuen Gleichung Null werden und herausfallen. Namentlich kann man aber die mit x_1y_1, x_1z_1 und y_1z_1 behafteten Glieder herausfallen lassen, so daß noch alle Flächen der zweiten Ordnung durch die einfachere Gleichung

3) $$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

vorgestellt sind, wenn sie sich auf rechtwinkliche Axen OX, OY und OZ bezieht.

Wird aber diese Gleichung 3.) zu Grunde gelegt, so kann man noch folgern:

---

*) Unter den Hyperbeln kann sich ausnahmsweise der Schnitt befinden, der bloß zwei gerade Linien giebt (vgl. Note zu §. 127. II.), welche sich schneiden oder welche mit einander parallel laufen.

a) Alle mit XOY parallelen Ebenen schneiden den Körper in lauter Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem $A \cdot B$ Null, positiv oder negativ ist.

b) Alle mit XOZ parallelen Ebenen schneiden den Körper in lauter Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem $A \cdot C$ Null, positiv oder negativ ist.

c) Alle mit YOZ parallelen Ebenen schneiden den Körper in lauter Parabeln, Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem $B \cdot C$ Null, positiv oder negativ ist. Daraus folgt aber noch:

d) Wenn von den drei Reihen Schnitten, welche parallel mit den drei Koordinaten-Ebenen gelegt gedacht werden, zwei Reihen lauter Ellipsen, oder beide Reihen lauter Hyperbeln sind, so muß die dritte Reihe jedesmal lauter Ellipsen geben (so daß nicht alle drei Reihen Hyperbeln seyn können).

Denn, ist $A \cdot B$ und $A \cdot C$ positiv, so sind entweder A, B und C alle drei zugleich positiv, oder alle drei zugleich negativ; folglich ist dann $B \cdot C$ nothwendig auch positiv. — Sind aber $A \cdot B$ und $A \cdot C$ beide negativ, so ist $\frac{A \cdot B}{A \cdot C}$ d. h. $\frac{B}{C}$ positiv, also ist dann $B \cdot C$ ebenfalls positiv.

Sind aber alle drei Reihen der Schnitte Ellipsen, so nennt man den Körper ein Ellipsoid; und sind zwei Reihen der Schnitte Hyperbeln, so wird der Körper Hyperboloid genannt.

e) Ist einer der drei Koefficienten A, B oder C, z. B. C, der Null gleich, so sind zwei Reihen der mit den Koordinaten-Ebenen parallelen Schnitte, Parabeln; die dritte Reihe der Schnitte kann dann ebenfalls lauter Parabeln liefern (wenn noch ein zweiter Koefficient z. B. B der Null gleich ist) oder auch lauter Ellipsen (wenn $A \cdot B$ positiv) oder auch lauter Hyperbeln (wenn $A \cdot B$ negativ ist). Einen solchen Körper kann man ein Paraboloid nennen, wenn man nicht vorziehen will, unter Paraboloid ausschließlich den Körper zu verstehen, dessen drei Reihen, mit den Koordinaten-Axen XOY, XOZ, YOZ paralleler Schnitte, alle drei lauter Parabeln geben.

IV. Bestimmt man die sechs Unbestimmten p, q, r, φ, ψ, θ so

so, daß in der Gleichung 2.) nicht bloß die mit x_1y_1, x_1z_1 und y_1z_1 multiplicirten Glieder, sondern auch die mit x_1, y_1 und z_1 afficirten herausfallen, so findet man die Gleichung von der Form

$$4)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2=D,$$

welche noch alle Ellipsoide und alle Hyperboloide aber nicht mehr die Paraboloide liefert, weil im Falle der Paraboloide die sechs Gleichungen, welche zur Bestimmung der sechs Unbestimmten p, q, r, φ, ψ und θ dienen sollen, auf Widersprüche führen, und diese anzeigen, daß für die Paraboloide diese Form 4.) der Gleichung nicht statt finden kann.

Dagegen enthält die Gleichung von der Form

$$5)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz=0$$

noch alle Flächen der zweiten Ordnung.

V. Sind in der Gleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D$$

A, B und C alle drei positiv, so liefert sie alle Ellipsoide. Sind aber zwei dieser drei Koefficienten positiv und der dritte negativ, so liefert sie alle Hyperboloide.

Diese Gleichung läßt übrigens sehen, daß alle Ellipsoide und alle Hyperboloide durch drei auf einander senkrechte Ebenen XOY, XOZ, YOZ, in acht congruente Theile getheilt werden. Der Punkt O selbst heißt dann der Mittel-Punkt dieser Körper.

VI. Sind in der Gleichung

$$1)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2=D$$

A, B, C positiv, so daß sie alle Ellipsoiden vorstellt, so sind $\sqrt{\frac{D}{A}}$, $\sqrt{\frac{D}{B}}$, $\sqrt{\frac{D}{C}}$ die drei Entfernungen des Mittel-Punktes O von den Punkten, in denen die Fläche des Ellipsoids von den drei Axen OX, OY, OZ geschnitten werden, und die man die Scheitel des Ellipsoids nennen kann. Diese drei Entfer-

γ) Flächen der dritten, vierten, n^{ten} Ordnung, deren Gleichungen von der dritten, vierten, n^{ten} Dimension sind.

V. Wird eine gegebene Fläche von den drei Koordinaten-Ebenen geschnitten, so nennt man die Durchschnitts-Figuren die Grundschnitte. — Ist $f_{x,y,z} = 0$ die Gleichung der Fläche, so ist, je nachdem 0 statt z, statt y oder statt x gesetzt wird

$f_{x,y,0} = 0$ die Gleichung des Grundschnittes in der Ebene XOY auf die Axen OX und OY bezogen;

$f_{x,0,z} = 0$ die Gleichung des Grundschnittes in der Ebene XOZ auf die Axen OX und OZ bezogen;

$f_{0,y,z} = 0$ die Gleichung des Grundschnittes in der Ebene YOZ auf die Axen OY und OZ bezogen.

VI. Setzt man aber in der Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ der Fläche, statt z, y, x abwechselnd und bezüglich c, b, a, so ist

$f_{x,y,c} = 0$ die Gleichung eines Schnittes, welcher mit XOY parallel, und von XOY um $\pm c$ entfernt gelegt ist, auf Axen bezogen, welche in der Ebene des Schnittes parallel mit OX und OY gedacht sind, und durch den Punkt, in welchem diese Ebene des Schnittes von OZ getroffen wird.

Ferner ist

$f_{x,b,z} = 0$ die Gleichung eines mit XOZ parallelen und von XOZ um $\pm b$ entfernten Schnittes

und

$f_{a,y,z} = 0$ die Gleichung eines mit YOZ parallelen und von YOZ um $\pm a$ entfernten Schnittes, jedesmal auf Axen bezogen, welche in der Ebene des Schnittes durch den Punkt, in denen die Ebene des Schnittes von der einen der drei Koordinaten-Axen getroffen wird, mit den beiden andern der Koordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel gelegt sind.

VII. Will man aber durch die, vermöge der Gleichung $f_{x,y,z} = 0$ gegebene Fläche einen beliebigen ebenen Schnitt legen, so muß man entweder die Gleichung der durchgelegten Ebene

aufsuchen und dann beide Gleichungen in Verbindung als die Punkte des Schnittes bestimmend beibehalten (nach II.), oder man muß diese Ebene als eine neue Koordinaten-Ebene ansehen, und die neue Gleichung der gegebenen Fläche suchen (nach III.), welche sich auf diese und noch zwei andere beliebig auf ihr und auf einander senkrecht genommenen Koordinaten-Ebenen bezieht. Dann ist der gesuchte Schnitt der (nach V.) leicht zu findende neue Grundschnitt.

§. 140.

Von den Flächen der ersten Ordnung.

Betrachten wir nun die algebraische Fläche der ersten Ordnung, wie solche durch die Gleichung der ersten Ordnung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegeben ist.

I. Die Gleichungen ihrer drei Grundschnitte sind (nach §. 139. V.)

$Ax + By + D = 0$; $Ax + Cz + D = 0$ und $By + Cz + D = 0$;

also wird die Fläche der ersten Ordnung von allen drei Koordinaten-Ebenen in geraden Linien geschnitten.

II. Führt man neue Koordinaten-Ebenen ein, so nimmt die neue Gleichung derselben Fläche der ersten Ordnung die Form

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0$$

an (nach §. 139. III. 2.); also sind die neuen Grundschnitte wiederum gerade Linien.

Die Fläche der ersten Ordnung wird also von jeder Ebene nach jeder Richtung in einer geraden Linie geschnitten. Dies ist aber der Charakter einer Ebene. Also drückt die Gleichung der ersten Ordnung allemal eine Ebene aus. — Und umgekehrt; jede Ebene kann und wird allemal durch eine Gleichung der ersten Ordnung ausgedrückt werden, wenn man sie nur auf rechtwinkliche Koordinaten-Axen bezieht.

III. Um nämlich die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x, y, und z eines jeden Punktes M einer gegebenen

Ebene zu finden, denke man sich, wenn OX, OY, OZ die drei auf einander senkrechten Koordinaten-Axen vorstellen, von O aus auf die gegebene Ebene ein Perpendikel OH gefällt, welches der fraglichen Ebene in H begegnet. Die Lage der Ebene ist nun völlig gegeben, sobald man die Länge $OH = h$ des Perpendikels kennt und noch die Winkel HOX, HOY, HOZ, welche dieses Perpendikel mit den drei Axen macht, und deren Kosinusse bezüglich α, β, γ seyn mögen. Dann aber folgt aus §. 136.), daß h allemal der Summe der Projektionen von x, y und z auf OH gleich ist, so oft x, y, z einem Punkte M der fraglichen Ebene angehören; also hat man

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = h;$$

und dies ist die Gleichung der Ebene. — Diese Gleichung kann aber auch noch mit einer beliebigen Zahl r multiplicirt erscheinen.

IV. Ist daher eine Ebene gegeben durch die Gleichung

1) $$Ax + By + Cz = D,$$

und ist h die Länge des von O aus auf dieselbe gefällten Perpendikels OM; sind ferner α, β, γ die Kosinusse der Winkel HOX, HOY, HOZ, welche das Perpendikel OH mit den drei Axen OX, OY, OZ macht, so ist die Gleichung derselben Ebene auch

2) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = h.$$

Es muß also die eine dieser Gleichungen 1.) und 2.) aus der andern sich ergeben, wenn man die andre mit irgend einer unbekannten Zahl r multiplicirt. Folglich muß es eine unbekannte Zahl r geben, so daß

$$A = r\alpha, \quad B = r\beta, \quad C = r\gamma \quad \text{und} \quad D = rh \quad \text{ist.}$$

Quadrirt und addirt man aber die drei erstern dieser Gleichungen, so erhält man (wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$)

3) $$A^2 + B^2 + C^2 = r^2, \quad \text{also} \quad r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und

4) $$\alpha = \frac{A}{r}, \quad \beta = \frac{B}{r}, \quad \gamma = \frac{C}{r};$$

so wie dann

$$5) \qquad h = \frac{D}{r}.$$

Mittelst der Gleichungen 3.—5.) hat man also für jede durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

gegebene Ebene, die Länge h des von O aus auf dieselbe gefällten Perpendikels OH, so wie die Winkel HOX, HOY, HOZ gefunden, welche solches mit den drei Axen macht.

V. Sind daher zwei Ebenen gegeben durch die Gleichungen

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D$$

und

$$2) \qquad A'x + B'y + C'z = D',$$

so sind solche offenbar mit einander parallel, wenn diese Winkel HOX, HOY, HOZ für beide dieselben werden, also wenn, sobald $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = r$ und $\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} = r'$ gesetzt wird,

$$\frac{A}{r} = \frac{A'}{r'}, \quad \frac{B}{r} = \frac{B'}{r'} \quad \text{und} \quad \frac{C}{r} = \frac{C'}{r'},$$

d. h. wenn

$$3) \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

ist *). — Der Abstand der beiden parallelen Ebenen von einander ist dann $= \pm\left(\frac{D}{r} - \frac{D'}{r'}\right)$.

VI. Laufen aber die beiden Ebenen, die durch die Gleichungen

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D$$

$$2) \qquad A'x + B'y + C'z = D'$$

gegeben sind, nicht mit einander parallel, so schneiden sie sich in einer Geraden; und diese Gerade ist durch dieselben beiden

*) Diese Bedingung des Parallelismus zweier Ebenen findet man auch, wenn man die Bedingungen aufsucht, welche erfüllt seyn müssen, damit die Grundschnitte der beiden Ebenen mit jeder von zwei Koordinaten-Ebenen, unter sich parallel sind.

Gleichungen gegeben, sobald man in beiden nicht nur x und y, sondern auch z als dieselben Werthe vorstellend sich denkt. Die Ebenen bilden an dieser Geraden einen Winkel mit einander, welcher dem Winkel HOH′ gleich ist, den die von O aus auf diese Ebenen gefällten Perpendikel OH und OH′ mit einander machen. Und nach §. 135. N. 9.), so wie nach der vorliegenden N. IV.) ist sogleich

$$3)\quad \cos \mathrm{HOH'} = \frac{A}{r}\cdot\frac{A'}{r'} + \frac{B}{r}\cdot\frac{B'}{r'} + \frac{C}{r}\cdot\frac{C'}{r'}$$
$$= \frac{A\cdot A' + B\cdot B' + C\cdot C'}{r\cdot r'},$$

wo $r = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ und $r' = \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$ ist.

Die beiden Ebenen 1.) und 2.) stehen also auf einander senkrecht, wenn man

$$4)\qquad A\cdot A' + B\cdot B' + C\cdot C' = 0$$

hat.

VII. Will man die Gleichung aller Ebenen finden, welche durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen, dessen Koordinaten-Werthe a, b, c sind, so schreibt man nur

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$$

und nimmt A, B, C ganz willkührlich.

Denn die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

drückt jede Ebene aus. Weil wir aber nur diejenigen haben wollen, welche durch den gegebenen Punkt (a, b, c) gehen, so müssen a, b, c statt x, y, z gesetzt, der Gleichung genügen; also muß

$$Aa + Bb + Cc + D = 0$$

eine identische Gleichung seyn. Eliminirt man nun D, dadurch daß man die beiden letztern Gleichungen von einander subtrahirt, so erhält man die obige.

VIII. Soll eine Ebene durch die drei gegebenen Punkte hindurchgehen, deren Koordinaten-Werthe bezüglich a, b, c; a′, b′, c′ und a″, b″, c″ sind, so nimmt man ihre Gleichung

$$1)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

und hat dann die drei Gleichungen

$$2)\qquad \begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0 \\ Aa' + Bb' + Cc' + D = 0 \\ Aa'' + Bb'' + Cc'' + D = 0, \end{cases}$$

findet daraus die Werthe m, n, p der drei Unbekannten $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, und dadurch geht die Gleichung 1.), wenn man sie vorher durch D dividirt, über in

$$3)\qquad mx + ny + pz + 1 = 0$$

und diese Gleichung der gesuchten Ebene kann man nun auch noch mit einer ganz beliebigen Zahl D multipliciren, so daß man als Gleichung derselben Ebene noch hat

$$4)\qquad Dm \cdot x + Dn \cdot y + Dp \cdot z + D = 0.$$

IX. Soll die Gleichung einer Ebene hingeschrieben werden, welche durch einen, mittelst der Koordinaten-Werthe a, b, c gegebenen Punkt hindurchgeht, und noch mit der durch die Gleichung

$$1)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebenen Ebene parallel läuft, so schreibe man nur

$$2)\qquad A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$

und man hat die verlangte Gleichung (nach VI. und V.).

X. Soll aber die Ebene durch den Punkt (a, b, c) hindurchgehen und auf der Ebene VIII. 1.) senkrecht stehen, so ist ihre Gleichung

$$3)\qquad A'(x-a) + B'(y-b) + C'(z-c) = 0,$$

sobald A', B' beliebig gewählt sind, C' aber aus der Gleichung

$$4)\qquad A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C' = 0 \quad (\text{B. VI. N. 4.})$$

dazu gefunden ist. — Es giebt daher unendlich viele solche Ebenen, die durch einen gegebenen Punkt gehen und zu gleicher Zeit auf einer gegebenen Ebene senkrecht stehen.

XI. Soll aber die Ebene durch zwei gegebene Punkte (a, b, c) und (a', b', c') hindurchgehen und auf der durch die Gleichung VIII. 1.) gegebenen Ebene senkrecht stehen, so ist ihre

Gleichung die 3.), sobald außer der Gleichung 4.) auch noch die Gleichung

5) $A'(a'-a)+B'(b'-b)+C'(c'-c)=0$

zur Bestimmung der Koefficienten B' und C' genommen wird. — Es giebt aber nur eine einzige Ebene der Art.

§. 141.

Von den Flächen der zweiten Ordnung.

Die allgemeinste Gleichung der Flächen der zweiten Ordnung, auf rechtwinkliche Axen bezogen ist

1) $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0.$

I. Denkt man sich hier einen bestimmten Werth z' statt z gesetzt, so hat man (nach §. 139. VI.) für den mit XOY parallelen und von XOY um $\pm z'$ entfernten Schnitt, die Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x und y, deren Glieder der höchsten Dimension $Ax^2+Dxy+By^2$ sind, so daß, wenn diese Gleichungen wirklich Kurven vorstellen, diese Schnitte lauter Parabeln sind (im Falle $D^2-4AB=0$), oder lauter Ellipsen (wenn D^2-4AB negativ), oder endlich lauter Hyperbeln (wenn D^2-4AB positiv ist). Und da auch $z'=0$ seyn kann, so ist der in XOY liegende Grundschnitt darunter mit begriffen.

Die mit den Koordinaten-Ebenen parallelen Schnitte treffen also die krumme Fläche der zweiten Ordnung (den Körper) entweder gar nicht, oder doch immer in lauter gleichnamigen Kegelschnitten; denn, was für die eine der Koordinaten-Ebenen gesagt ist, gilt offenbar auch für jede der beiden andern.

II. Führt man neue Koordinaten-Axen ein, genau wie im §. 137. III.), so wird die neue Gleichung derselben Fläche genau wieder von derselben Form, wie die Gleichung 1.), nämlich

2) $A'x_1^2+B'y_1^2+C'z_1^2+D'x_1y_1+E'x_1z_1+F'y_1z_1+G'x_1$
$+H'y_1+K'z_1+L'=0,$

nur daß die Koefficienten A', B', C', D', etc. etc. die sechs

beliebigen Stücke p, q, r und φ, ψ, θ in sich aufnehmen, während p, q, r die Koordinaten-Werthe des Anfangs-Punkts der neuen Koordinaten, φ, ψ, θ aber die Winkel sind, wodurch die Lage der neuen Koordinaten-Ebenen gegen die alten festgestellt sich sieht. — Da demnach die mit diesen neuen Koordinaten-Ebenen parallelen Schnitte, wenn sie die Fläche wirklich treffen (nach I.), entweder lauter Parabeln, lauter Ellipsen, oder lauter Hyperbeln sind, jede dieser neuen Koordinaten-Ebenen aber eine ganz beliebige Ebene im Raume ist, so folgt

daß jede Fläche der zweiten Ordnung von jeder beliebigen Ebene in einer Linie der zweiten Ordnung geschnitten wird, und daß alle mit dieser Ebene parallelen Schnitte, wenn sie die Fläche der zweiten Ordnung wirklich treffen, immer Kegelschnitte derselben Art sind, nämlich lauter Parabeln, oder lauter Ellipsen, oder lauter Hyperbeln *).

Während aber die mit irgend einer Ebene parallelen Schnitte z. B. lauter Ellipsen sind, können die mit einer andern Ebene parallelen Schnitte lauter Parabeln, und die mit einer dritten Ebene parallelen Schnitte lauter Hyperbeln seyn.

III. Weil durch Einführung neuer Koordinaten-Axen sechs unbestimmt bleibende Stücke p, q, r, φ, ψ, θ in die Gleichung hineinkommen, so kann man über letztere nachgehends so disponiren, daß sechs Glieder der neuen Gleichung Null werden und herausfallen. Namentlich kann man aber die mit x_1y_1, x_1z_1 und y_1z_1 behafteten Glieder herausfallen lassen, so daß noch alle Flächen der zweiten Ordnung durch die einfachere Gleichung

3) $$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

vorgestellt sind, wenn sie sich auf rechtwinkliche Axen OX, OY und OZ bezieht.

Wird aber diese Gleichung 3.) zu Grunde gelegt, so kann man noch folgern:

*) Unter den Hyperbeln kann sich ausnahmsweise der Schnitt befinden, der bloß zwei gerade Linien giebt (vgl. Note zu §. 127. II.), welche sich schneiden oder welche mit einander parallel laufen.

Erstes Kapitel.

Der Taylor'sche Lehrsatz oder die Elemente der Ableitungs-Rechnung.

§. 145.

Wenn Ausdrücke a, x, b, y etc. etc. noch keine bestimmten Ziffern-Werthe angenommen haben, sondern noch ganz unbestimmt (allgemein) gedacht sind, so werden sie veränderliche (variable) genannt. — Beständige, unveränderliche (konstante) heissen sie, so lange man sich bei ihnen einen völlig bestimmten Werth denkt, der unverändert derselbe bleiben soll.

§. 146.

Wenn der Werth eines Ausdrucks f von den veränderlichen Werthen der Ausdrücke a, x, b, y etc. etc. abhängig ist, so wird f eine Funktion dieser letztern Veränderlichen genannt, und dieser Ausdruck f ist (in der Regel) dann selbst ein Veränderlicher. — Besteht diese Abhängigkeit des Ausdrucks f von a, x, b, y etc. etc. darin, daß f unmittelbar aus a, x, b, y etc. etc. zusammengesetzt ist, so sagt man: „diese letzteren „Veränderlichen a, x, b, y etc. etc. kommen in dem Ausdrucke „f explicit (unmittelbar) vor" und f selbst wird dann eine explicite (unmittelbare) Funktion von a, x, b, y etc. etc. genannt. — Ist aber f bloß eine unmittelbare Zusammensetzung, z. B. aus b, y, z etc. etc. allein, ohne a oder x zu enthalten, während jedoch z. B y, z selber wieder Funktionen von a und x vorstellen, so sagt man: „a und x kommen in f „implicit (mittelbar) vor", und f heißt dann (zwar immer

noch eine explicite Funktion von b, y, z etc. etc. aber) eine **implicite** (**mittelbare**) Funktion von a und x.

Eben so kann f die Veränderlichen a und x **explicit** und **implicit** zugleich enthalten.

Enthält aber f einen Veränderlichen x gar nicht, weder explicit noch implicit, so sagt man: „f sey **nach x konstant**."

Uebrigens theilt man die (expliciten) Funktionen von x ein in **algebraische**, wenn sie x nicht im Exponenten und auch nicht unter dem Logarithmen-Zeichen, enthalten, dabei aber auch keine unendliche Reihen nach x sind, die sich nicht auf einen algebraischen endlichen Ausdruck zurückführen ließen; und in **transcendente**, wenn sie eine der drei letztgenannten Formen enthalten, und wenn im Falle der unendlichen Reihe, solche keine algebraische Funktion zur Summe hat.

Die algebraischen Funktionen von x theilt man wieder ein in **rationale**, welche x nicht unter einer gebrochenen Potenz (oder Wurzelzeichen) enthalten, — und **irrationale**, welche x unter dem Wurzelzeichen haben.

Die rationalen werden dann wieder in die **ganzen Funktionen** von x getheilt, welche wir §. 42.) kennen gelernt haben, und in **gebrochene**, welche Quotienten zweier ganzen Funktionen sind, ohne selbst einer ganzen Funktion gleich zu seyn.

§. 147.

Eine explicite Funktion f der Veränderlichen a, x, b, y, z etc. etc. kann **entwickelt**, d. h. schon völlig hergestellt, oder **verwickelt**, d. h. mittelst einer Gleichung zwischen f, a, x, b, y etc. etc. gegeben seyn. Im letztern Falle muß diese Gleichung erst noch nach f aufgelöst werden, wenn man f entwickelt haben will. — Im erstern Falle schreiben wir

1) $$f = f_{a,x,b,y,z\ \text{etc. etc.}},$$

wo das Zeichen zur Rechten des (=) Zeichens den, aus a, x, b, y, z etc. etc. zusammengesetzten Ausdruck vorstellt, der (selber nicht f enthält, sondern) durch den einzigen Buchstaben f

(wie solcher zur Linken zu sehen ist) bezeichnet wird. — Im andern Falle schreibt man, indem man sich die Gleichung auf Null gebracht denkt, z. B.

2) $\Pi_{f, a, x, b, y, z \text{ etc. etc.}} = 0,$

wo das Zeichen zur Linken einen (durch Π bezeichneten) Ausdruck vorstellt, der aus f, a, x, b, y, z etc. etc. auf eine gegebene Weise explicit zusammengesetzt ist (und der natürlich nicht noch Π enthält).

In beiden Fällen aber kann man die Gleichung 1.) oder 2.) zwischen den Veränderlichen f, a, x, b, y, z etc. etc., nach jedem dieser Veränderlichen aufgelöst sich denken, und aus diesem Gesichts-Punkte erscheint dann jeder dieser Veränderlichen als eine (verwickelt gegebene, aber) explicite Funktion der übrigen.

Sind zwischen m solchen Veränderlichen, μ solche Gleichungen gegeben, so erscheinen je μ von diesen m Veränderlichen als (in der Regel verwickelt gegebene, aber) explicite Funktionen der m—μ übrigen Veränderlichen.

§. 148.

Ist f eine explicite Funktion mehrerer Veränderlichen a, x, b, y, z etc. etc., und ist sie deshalb durch $f_{a, x, b, y, z \text{ etc. etc.}}$ bezeichnet, so ist sie natürlich auch eine explicite Funktion von a allein, oder von x allein, und in so fern wird dieselbe Funktion auch bloß so

$$f_a \quad \text{oder} \quad f_x$$

geschrieben. — Sie ist aber auch zugleich eine explicite Funktion von je zweien dieser Veränderlichen, und in so fern wird sie dann auch durch

$$f_{a,x}, \quad f_{a,b}, \quad f_{x,y}, \quad f_{a,y}, \quad f_{b,z} \quad \text{etc. etc.}$$

bezeichnet. U. s. w. f. — Dieselbe Funktion f kann aber a, oder x, implicit enthalten, oder explicit und implicit zugleich, und dann wird sie, um dies anzudeuten, so geschrieben

$$f_{(a)} \quad \text{oder} \quad f_{(x)}.$$

Und enthält sie a und x zugleich bloß implicit, oder explicit und auch implicit, so wird sie, will man dies sichtbar machen, so geschrieben

$$f_{(a,x)} \quad \text{oder auch so} \quad f_{(a),(x)}.$$

— U. s. w. f.

§. 149.

Wir haben im §. 54.) gesehen, daß wenn f_x eine beliebige ganze Funktion von x ist, dann allemal seyn muß

$$(\odot)\cdots \quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

wo das (runde) ∂ ein Operations-Zeichen ist, und zwar so, daß $\partial\varphi_x$ das vorstellt, was aus φ_x wird, wenn jedes Glied von φ_x mit dem Exponenten von x multiplicirt und dann 1 vom Exponenten subtrahirt wird. — Zieht man aber von beiden Seiten dieser Gleichung f_x ab, dividirt man durch h, und setzt man zuletzt Null statt h, so erhält man dasselbe ∂f_x auch noch auf eine andere Weise, nämlich:

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad \partial f_x = \frac{f_{x+h} - f_x}{h} = \frac{f_{x+h} - f_x}{(x+h) - x} \quad \text{für} \quad h = 0,$$

nachdem man zur Rechten vorher wirklich durch h dividirt hat, ehe Null statt h gesetzt wird, damit nicht Null im Nenner erscheine.

Fassen wir das Operations-Zeichen ∂ von nun an für jede Gattung von Funktionen in dieser größeren Allgemeinheit ($\mathfrak{C}$.) auf, so gilt derselbe Satz ($\odot$) für jede Gattung von Funktionen für ganze wie für gebrochene, für algebraische wie für transcendente und wird dann der Taylor'sche Lehrsatz schlechthin genannt. — Das Auffinden der durch ∂f_x, $\partial(\partial f_x)$ oder $\partial^2 f_x$, $\partial(\partial^2 f_x)$ oder $\partial^3 f_x$ etc. etc. bezeichneten neuen Funktionen von x, kann man das Ableiten nach x nennen.

Um sich von der Wahrheit dieser Behauptung zu überzeugen, kann man sich das Problem von vorne herein stellen: „die Funktion f_{x+h} ist „eine

„eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln.“ — Man setzt zur Lösung dieser Aufgabe

1) $$f_{x+h} = A_x + A'_x \cdot h + A''_x \cdot \frac{h^2}{2!} + A'''_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

und sucht nun die unbestimmt gelassenen Koefficienten A_x, A'_x, A''_x, A'''_x etc. etc., dieser Gleichung gemäß zu bestimmen. — Setzt man aber Null statt h, so findet man zuerst

2) $$f_x = A_x.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so findet sich, wenn man durch h dividirt, und dann wieder Null statt h setzt,

3) $$\frac{f_{x+h} - f_x}{h} \text{ (für } h = 0) = A'_x.$$

Also ist $A'_x = \partial f_x$ nach unserem erweiterten Begriff des Ableitens in (C.). — Man hat daher (nach 2. und 3.)

4) $$f_{x+k} = f_x + \partial f_x \cdot k + \text{ die übrigen Glieder;}$$

also auch

5) $$A'_{x+k} = A'_x + \partial A'_x \cdot k + \text{ die übrigen Glieder;}$$

6) $$A''_{x+k} = A''_x + \partial A''_x \cdot k + \text{ die übrigen Glieder;}$$

u. s. w. f.

Setzt man nun in 1.) zuerst $x+k$ statt x, so bekommt man

7) $$f_{x+h+k} = f_{x+k} + A'_{x+k} \cdot h + A''_{x+k} \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots,$$

während man statt f_{x+k}, A'_{x+k}, A''_{x+k} etc. etc. sogleich die Reihen nach k (aus 4.—6.) setzen kann. Wird nachgehends noch in 1.) $h+k$ statt h gesetzt, so erhält man noch

8) $$f_{x+h+k} = f_x + \partial f_x \cdot (h+k) + A''_x \cdot \frac{(h+k)^2}{2!} + A'''_x \cdot \frac{(h+k)^3}{3!} + \cdots,$$

während man rechts statt $(h+k)^2$, $(h+k)^3$ etc. etc. sogleich die Glieder der Binomial-Entwickelung substituirt. Auf diese Weise erhält man (in 7. und 8. zur Rechten) zwei Entwickelungen in Doppel-Reihen nach h und nach k, welche ein und dasselbe, nämlich f_{x+h+k}, ausdrücken, welche also einander gleich seyn müssen. Vergleicht man aber in beiden Entwicklungen die mit k^1 afficirten Glieder, so ergiebt sich sogleich als Resultat dieser Vergleichung

$$A''_x = \partial A'_x = \partial(\partial f_x) = \partial^2 f_x,$$
$$A'''_x = \partial A''_x = \partial(\partial^2 f_x) = \partial^3 f_x,$$
$$A^{IV}_x = \partial A'''_x = \partial(\partial^3 f_x) = \partial^4 f_x,$$

u. s. w. f. — Und so sieht sich der Satz (⊙) allgemein erwiesen, besonders, wenn man noch zeigt, daß wenn in (⊙) einmal $x+k$ statt x, dann auch $h+k$ statt h gesetzt werden, die Doppel-Reihen zur Rechten, die

man jedesmal für f_{x+k+h} erhält, nicht bloß in den mit k^1 afficirten, sondern auch wirklich in allen Gliedern mit einander übereinstimmen. — Diese letztere Nachweisung ist jedoch gänzlich überflüssig, wenn man vorher nachweist, daß, so lange x keinen bestimmten Werth hat, jede Funktion von $x+h$ sich allemal wirklich in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln läßt (Vgl. „System der Math." III. Th. I. Kap.).

Will man aber die wenigen Ausnahms-Werthe von x haben, für welche f_{x+h} sich nicht in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln läßt, so darf man nur die Nenner der Ausdrücke ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$ etc. etc., wenn solche vorhanden sind, der Null gleich setzen, und daraus die Werthe von x finden, welche diesen Gleichungen genügen. Da für diese wenigen und bestimmten Werthe von x, die Nenner eines, mehrerer, oder aller Koefficienten der Taylor'schen Reihe ⊙.) die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, so ist eben diese im Kalkul unzulässige Form das Kennzeichen, daß dasmal, d. h. für diese besonderen Werthe von x, eine solche, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe nicht existirt.

§. 150.

Um für jede Funktion F_x die Ableitung ∂F_x in jedem Einzelfalle herstellen zu können, muß man

1) die Ableitungen finden der drei einfachsten Funktionen, nämlich Ax^m+B, a^x und $log\,x$, unter $log\,x$ allemal den natürlichen Logarithmen verstanden;

2) nachweisen, wie die Ableitung einer jeden, aus zwei andern Funktionen φ_x und ψ_x, oder aus einer einzigen Funktion φ_x und einem nach x konstanten Ausdruck A, zusammengesetzten Funktion F_x, in die Ableitungen der Theile φ_x und ψ_x, oder des Theils φ_x allein, ausgedrückt werden. —

Durch das letztere werden nämlich die Ableitungen der zu-

sammengesetztesten Funktionen auf die Ableitungen der einfachsten (nach und nach) zurückgeführt.

A. Was nun die Ableitungen der drei einfachsten Funktionen $A \cdot x^m + B$, a^x und $log\, x$ betrifft, so wird man sie dadurch am bequemsten erhalten, daß man eine nach der andern statt f_x setzt, jedesmal f_{x+h} direkt nach Potenzen von h entwickelt, und dann jedesmal den Koefficienten von h^1 nimmt. Auf diesem Wege findet man sogleich

1) $\quad \partial(Ax^m + B)_x = mAx^{m-1};$

2) $\quad \partial(a^x)_x = a^x \cdot log\, a; \quad$ also $\quad \partial(e^x)_x = e^x;$

3) $\quad \partial(log\, x)_x = \frac{1}{x}.$

Ist nämlich $f_x = Ax^m + B$, so ist $f_{x+h} = A(x+h)^m + B$; also nach dem binomischen Lehrsatze

$$f_{x+h} = (Ax^m + B) + mAx^{m-1} \cdot h + \frac{m(m-1)}{2} \cdot Ax^{m-2} \cdot h^2 + \cdots,$$

mithin $\quad \partial f_x = mAx^{m-1}$.

Ist aber $f_x = a^x$, so hat man $f_{x+h} = a^{x+h} = a^x \cdot a^h$. Weil aber (nach §. 91.)

$$a^h = 1 + h \cdot log\, a + \frac{h^2 \cdot (log\, a)^2}{2!} + \cdots$$

ist, so giebt dies

$$f_{x+h} = a^x + (a^x \cdot log\, a) \cdot h + a^x \cdot (log\, a)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots,$$

so daß man nun $\partial f_x = a^x \cdot log\, a$ gefunden sieht.

Ist endlich $f_x = log\, x$, so ist $f_{x+h} = log\,(x+h)$ und

$$f_{x+h} - f_x = log\,(x+h) - log\, x = log\, \frac{x+h}{x} = log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\text{(nach §§. 47. 65. 66.)} = \frac{h}{x} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{x^2} + \cdots;$$

also ist $\quad f_{x+h} = f_x + \frac{1}{x} \cdot h - \frac{1}{2x^2} \cdot h^2 + \cdots,$

mithin ist $\partial f_x = \frac{1}{x}$ gefunden.

Sollen die Ableitungen gefunden werden von $\frac{1}{x}$ oder von

$\sqrt[m]{x^n}$, so muß man x^{-1} statt $\frac{1}{x}$, und $x^{\frac{n}{m}}$ statt $\sqrt[m]{x^n}$ schreiben, und dann stecken diese Funktionen als besondere Fälle in Ax^m+B.

B. Was aber den zweiten Theil des Zweckes dieses Paragraphen betrifft, nämlich die Ableitungen der aus φ_x und ψ_x oder aus φ_x und einem nach x konstanten Ausdruck A, zusammengesetzten Funktionen F_x auf die Ableitungen der Bestandtheile zurückzuführen, so ist derselbe bereits in dem §. 55.), nämlich durch die Formeln

$$1)\qquad \partial(\varphi_x \pm \psi_x)_x = \partial\varphi_x \pm \partial\psi_x;$$

$$2)\qquad \partial(\varphi_x \cdot \psi_x)_x = \psi_x \cdot \partial\varphi_x + \varphi_x \cdot \partial\psi_x;$$

$$3)\qquad \partial\left(\frac{\varphi_x}{\psi_x}\right)_x = \frac{\psi_x \cdot \partial\varphi_x - \varphi_x \cdot \partial\psi_x}{\psi_x^{\,2}};$$

$$4)\qquad \partial(A \cdot \varphi_x)_x = A \cdot \partial\varphi_x$$

für die gewöhnlichsten Fälle erledigt, wenn man nur jetzt überall unter φ_x und ψ_x beliebige Funktionen von x versteht; in so fern nämlich die dortigen Beweise hier nur wörtlich wiederholt werden dürfen.

Aber auch der Satz des §. 56.) gilt für alle Funktionen; und wir geben ihn seiner Wichtigkeit wegen hier wörtlich wieder, nämlich:

Ist f_z eine beliebige explicite Funktion von z, welche nicht x enthält, und wird statt z eine beliebige Funktion z_x von x gesetzt, so daß f_z eine implicite Funktion $f_{(x)}$ von x wird, so hat man allemal

$$\text{I.}\qquad \partial f_{(x)} = \partial f_z \cdot \partial z_x \;*).$$

Auch hier darf der Beweis des §. 56.) nur wörtlich wiederholt werden.

---

*) Da hier f kein x explicit enthalten soll, so würde es hier nichts schaden, wenn man statt $\partial f_{(x)}$ auch bloß ∂f_x oder $\partial(f_z)_x$ schriebe, weil keine Zweideutigkeit zu befürchten ist (Vgl. §. 148.).

Unter den unendlich vielen besondern Fällen, welche in dieser Formel I.) stecken, wollen wir hier sogleich drei derselben nachweisen.

Ist nämlich

$$f_z = z^m = z_x^m,$$

so findet sich $\partial f_z = m \cdot z^{m-1}$, also (nach I.)

5) $$\partial(z^m)_x = mz^{m-1} \cdot \partial z_x.$$

Und ist $f_z = A^z$, so findet sich $\partial f_z = A^z \cdot \log A$; also ist, wenn z wieder eine beliebige Funktion von x vorstellen sollte (nach I.)

6) $$\partial(A^z)_x = A^z \cdot \log A \cdot \partial z_x.$$

Ist aber $f_z = \log z$, so findet sich $\partial f_z = \frac{1}{z}$; also (nach I.)

7) $$\partial(\log z)_x = \frac{1}{z} \cdot \partial z_x = \frac{\partial z_x}{z}.$$

In diesen Formeln 5.—7.) stecken wieder die Formeln A. 1.—3.) für den besondern Fall, daß $z = x = 1 \cdot x = x^1 = 1 \cdot x^1$ seyn sollte, weil dann

8) $$\partial z_x = \partial x_x = 1$$

sich ausweist. — Auch ist es bequem, wenn man bemerkt, daß man allemal findet (vgl. A. 1. mit B. 2.)

9) $\partial(B)_x = 0$, so oft B nach x constant ist.

Beispiele. Nach diesen Formeln findet man nun sogleich:

1) $\partial(ax^m)_x = $ (nach B. 4.) $a \cdot \partial(x^m) = amx^{m-1}$;

2) $\partial^2(ax^m)_x = \partial(max^{m-1})_x = m(m-1)ax^{m-2}$;

3) $\partial^3(ax^m)_x = \partial[m(m-1)ax^{m-2}]_x = m(m-1)(m-2)ax^{m-3}$;

4) $\partial(ax^m)_m = a \cdot \partial(x^m)_m = ax^m \cdot \log x$ (nach A. 2.);

5) $\partial(ax^m)_a = x^m \cdot \partial a_a$ (nach B. 4., weil x^m jetzt nach a constant ist)

$= x^m$ (weil nach B. 8. $\partial a_a = 1$ sich findet);

6) $\partial(ax^{\frac{2}{3}} - bx^4 + cx^5)_x = \frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} - 4bx^3 + 5cx^4$ (nach B. 1.);

7) $\quad \partial\left(\frac{b}{x}\right)_x = \partial(b \cdot x^{-1})_x = b \cdot \partial(x^{-1})_x = -b \cdot x^{-2} = -\frac{b}{x^2};$

8) $\quad \partial^2\left(\frac{b}{x}\right)_x = \partial\left(-\frac{b}{x^2}\right)_x = -b \cdot \partial(x^{-2})_x = +2bx^{-3} = \frac{2b}{x^3};$

9) $\quad \partial^3\left(\frac{b}{x}\right)_x = \partial\left(\frac{2b}{x^3}\right)_x = 2b \cdot \partial(x^{-3})_x = -6bx^{-4} = -\frac{6b}{x^4};$

10) $\quad \partial(b\sqrt[3]{x})_x = b \cdot \partial(x^{\frac{1}{3}})_x = \frac{1}{3}bx^{-\frac{2}{3}} = \frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}};$

11) $\quad \partial^2(b\sqrt[3]{x})_x = \partial\left(\frac{b}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)_x = \frac{b}{3} \cdot \partial(x^{-\frac{2}{3}})_x = -\frac{2}{9}bx^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}};$

12) $\quad \partial^3(b\sqrt[3]{x})_x = \partial\left(-\frac{2}{9} \cdot \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}\right)_x = -\frac{2}{9}b \cdot \partial(x^{-\frac{5}{3}})_x = \frac{10}{27}b \cdot x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27} \cdot \frac{b}{x^2\sqrt[3]{x^2}};$

13) $\quad \partial(x^2 \cdot \log x)_x =$ (nach B. 2.) $\log x \cdot \partial(x^2)_x + x^2 \cdot \partial(\log x)_x = 2x \cdot \log x + x;$

$$\partial\left(\frac{3x^2-1}{4x}\right)_x = \frac{4x \cdot \partial(3x^2-1)_x - (3x^2-1) \cdot \partial(4x)_x}{16x^2} \text{ (nach B. 3.)};$$

weil aber

$$\partial(3x^2-1)_x = 6x \quad \text{und} \quad \partial(4x)_x = 4$$

ist, so findet sich

14) $\quad \partial\left(\frac{3x^2-1}{4x}\right)_x = \frac{12x^2+4}{16x^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4x^2}$ *);

14b) $\quad \partial\left(\frac{3x^2+1}{4x^2}\right)_x = \frac{4x^2 \cdot \partial(3x^2+1)_x - (3x^2+1)\partial(4x^2)_x}{16x^4}$

$$= \frac{4x^2 \cdot 6x - (3x^2+1) \cdot 8x}{16x^4} = \frac{-8x}{16x^4} = -\frac{1}{2x^3} \text{ **)}.$$

Ferner findet man:

$$\partial(\sin x)_x = \partial\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)_x = \frac{1}{2i} \cdot [\partial(e^{xi})_x - \partial(e^{-xi})_x] \text{(nach B. 4. u. 1.)},$$

---

*) Es ist auch $\frac{3x^2-1}{4x} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^{-1}$; nimmt man aber von diesem letztern Ausdruck die Ableitung nach x, so erhält man das obige Endresultat unmittelbar.

**) Es ist $\frac{3x^2-1}{4x^2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^{-2}$; nimmt man nun von diesem letztern Ausdruck die Ableitung nach x, so erhält man das obige Endresultat augenblicklich.

oder, weil (nach B. 6.) $\partial(e^{px})_x = e^{px}\cdot\partial(px)_x = p\cdot e^{px}$ gefunden wird,

15) $\partial(\sin x)_x = \frac{1}{2i}[i\cdot e^{xi} + i\cdot e^{-xi}] = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} = \cos x$;

16) $\partial(\cos x)_x = \partial\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)_x = \frac{1}{2}\partial(e^{xi})_x + \frac{1}{2}\partial(e^{-xi})_x$

$= \frac{1}{2}i\cdot e^{xi} - \frac{1}{2}i\cdot e^{-xi} = -\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} = -\sin x$;

17) $\partial(tg\,x)_x = \partial\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot\partial(\sin x)_x - \sin x\cdot\partial(\cos x)_x}{\cos x^2} = \frac{1}{\cos x^2}$;

18) $\partial(cotg\,x) = \partial\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)_x = -\frac{1}{\sin x^2}$;

19) $\partial(\sec x)_x = \partial\left(\frac{1}{\cos x}\right)_x = \partial(\cos x^{-1})_x = -\cos x^{-2}\cdot\partial(\cos x)_x$

$= \frac{\sin x}{\cos x^2} = tg\,x\cdot\sec x$;

20) $\partial(cosec\,x)_x = \partial\left(\frac{1}{\sin x}\right)_x = \partial(\sin x^{-1})_x = -\sin x^{-2}\cdot\partial(\sin x)_x$

$= -\frac{\cos x}{\sin x^2} = -cotg\,x\cdot cosec\,x$.

Noch mehrere Beispiele irrationaler Funktionen.

21) $\partial(\sqrt{2ax-x^2})_x = \partial(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}_x =$ (nach B. I., indem man $2ax-x^2=z$ setzt) $= \frac{1}{2}(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\partial(2ax-x^2)_x = \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$;

22) $\partial^2(\sqrt{2ax-x^2})_x = \partial\left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)_x = \partial((a-x)\cdot(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}})_x$

$= (a-x)\cdot\partial((2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}})_x + (2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\partial(a-x)_x$ (nach B. 2.)

$= -\frac{(a-x)^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{-a^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

23) $\partial^3(\sqrt{2ax-x^2})_x = \partial\left(\frac{a^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)_x = a^2\cdot\partial((2ax-x^2)^{-\frac{3}{2}})_x$

$= -3a^2\cdot\frac{a-x}{(2ax-x^2)^{\frac{5}{2}}}$;

24) $\partial^4(\sqrt{2ax-x^2})_x = -3a^2\cdot\partial\left(\frac{a-x}{(2ax-x^2)^{\frac{5}{2}}}\right)_x = 3a^2\cdot\frac{5a^2-8ax+4x^2}{(2ax-x^2)^{\frac{7}{2}}}$;

25) $\partial(\sqrt[3]{3x-2x^3})_x = \partial((3x-2x^3)^{\frac{1}{3}})_x = \frac{1-2x^2}{(3x-2x^3)^{\frac{2}{3}}}$;

26) $\partial^2(\sqrt[3]{3x-2x^3})_x = \partial\left(\frac{1-2x^2}{(3x-2x^3)^{\frac{2}{3}}}\right)_x = -2\frac{1+2x^2}{(3x-2x^3)^{\frac{5}{3}}}$.

27) $\partial(\sqrt[3]{x^2-1})_x = \partial(x^2-1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot\partial(x^2-1)_x = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$;

28) $\partial^2(\sqrt[3]{x^2-1})_x = \partial\left(\frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}\right)_x = -\frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}}$.

Noch mehr Beispiele transcendenter Funktionen:

29) $\partial(a^{px+q})_x = a^{px+q}\cdot log\,a\cdot\partial(px+q)_x = p\cdot log\,a\cdot a^{px+q}$;

30) $\partial(e^{-bx^2})_x = e^{-bx^2}\cdot\partial(-bx^2)_x = -2bx\cdot e^{-bx^2}$;

31) $\partial(e^{-bx^2})_b = e^{-bx^2}\cdot\partial(-bx^2)_b = -x^2\cdot e^{-bx^2}$;

32) $\partial\,log(1+x^2)_x = \frac{1}{1+x^2}\cdot\partial(1+x^2)_x = \frac{2x}{1+x^2}$;

33) $\partial\,log(x+\sqrt{1+x^2})_x = \frac{\partial(x+\sqrt{1+x^2})_x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

34) $\partial\,log(x-\sqrt{1+x^2})_x = \frac{\partial(x-\sqrt{1+x^2})_x}{x-\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$$\partial\left(\frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+ix}{1-ix}\right)_x = \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)_x : \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$$

aber $\partial\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)_x = \frac{(1-ix)\cdot\partial(1+ix)_x-(1+ix)\cdot\partial(1-ix)_x}{(1-ix)^2} = \frac{2i}{(1-ix)^2}$;

folglich

35) $\partial\left(\frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+ix}{1-ix}\right)_x = \frac{1}{1+x^2}$ *);

36) $\partial\left(\frac{1}{i}\cdot log(x+\sqrt{x^2-1})\right)_x = \frac{1}{i}\cdot\partial\,log(x+\sqrt{x^2-1})_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

37) $\partial\left(\frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-x^2}+ix)\right)_x = \frac{1}{i}\cdot\partial\,log(\sqrt{1-x^2}+ix)_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

---

*) Man kann auch statt $log\frac{1+ix}{1-ix}$ die Differenz $log(1+ix)-log(1-ix)$ setzen, und von letzterer die Ableitung nach x nehmen. Dann erhält man $\frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{i}{1+ix}+\frac{i}{1-ix}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ viel schneller.

38) $\partial \sin(px+q)_x = \cos(px+q)\cdot\partial(px+q)_x = p\cdot\cos(px+q)$;

39) $\partial \cos(px+q)_x = -\sin(px+q)\cdot\partial(px+q)_x = -p\cdot\sin(px+q)$;

40) $\partial \log\sin(px+q)_x = \frac{\partial \sin(px+q)_x}{\sin(px+q)} = p\cdot\cotg(px+q)$;

41) $\partial \log\cos(px+q)_x = \frac{\partial \cos(px+q)_x}{\cos(px+q)} = -p\cdot tg(px+q)$.

§. 151.

Will man die Ableitungen nach x haben von den durch $\frac{1}{\sin}x$ oder $arc.\sin x$, $\frac{1}{\cos}x$ oder $arc.\cos x$, $\frac{1}{tg}x$ oder $arc.tg\, x$, $\frac{1}{\cotg}x$ oder $arc.\cotg\, x$, $\frac{1}{\sec}x$ und $\frac{1}{\cosec}x$ bezeichneten Funktionen von x, so muß man letztere (welche Zusammensetzungen aus den sieben Operationen seyn müssen) erst wirklich herstellen. Dies geschieht allemal mittelst der Formeln des §. 70. III. IV.), nämlich

1) $e^{zi} = \cos z + i\cdot\sin z$

2) $e^{-zi} = \cos z - i\cdot\sin z$,

welche, wenn man sie durch einander dividirt,

3) $e^{2zi} = \frac{1+i\cdot tg\, z}{1-i\cdot tg\, z} = \frac{\cotg z + i}{\cotg z - i}$

geben. —

Aus diesen Gleichungen 1.) und 2.) geht sogleich hervor

4) $z = \frac{1}{i}\cdot\log(\cos z + i\cdot\sin z) = -\frac{1}{i}\cdot\log(\cos z - i\cdot\sin z)$;

während die Gleichung 3.) sogleich liefert:

5) $z = \frac{1}{2i}\cdot\log\frac{1+i\cdot tg\, z}{1-i\cdot tg\, z} = \frac{1}{2i}\cdot\log\frac{\cotg z+i}{\cotg z-i}$.

Ist nun $\sin z = x$, so ist $z = \frac{1}{\sin}x$ und $\cos z = \sqrt{1-x^2}$, und die Gleichung 4.) giebt sogleich:

I. $\frac{1}{\sin}x = \frac{1}{i}\cdot\log(\sqrt{1-x^2}+i\cdot x) = -\frac{1}{i}\cdot\log(\sqrt{1-x^2}-i\cdot x)$.

Ist aber $\cos z = x$, also $z = \frac{1}{\cos} x$ und $\sin z = \sqrt{1-x^2}$, so giebt dieselbe Gleichung 4.)

II. $\frac{1}{\cos} x = \frac{1}{i} \cdot \log(x + \sqrt{x^2-1}) = -\frac{1}{i} \cdot \log(x - \sqrt{x^2-1})$.

Ist $tg\, z = x$, also $z = \frac{1}{tg} x$, so giebt die Gleichung 5.) sogleich

III. $$\frac{1}{tg} x = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{1+i\cdot x}{1-i\cdot x}.$$

Ist aber $cotg\, z = x$, also $z = \frac{1}{cotg} x$, so giebt dieselbe Gleichung 5.) augenblicklich

IV. $$\frac{1}{cotg} x = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{x+i}{x-i} = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{-1+i\cdot x}{1+i\cdot x}\ ^{*)}.$$

Ist ferner $\sec z = x$, so ist $\cos z = \frac{1}{x}$, also ist $z = \frac{1}{\sec} x = \frac{1}{\cos} \frac{1}{x}$; die Gleichung II.) giebt daher

V. $$\frac{1}{\sec} x = \frac{1}{i} \cdot \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -\frac{1}{i} \cdot \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Eben so erhält man aus der I.):

VI. $$\frac{1}{cosec} x = \frac{1}{i} \cdot \log \frac{\sqrt{x^2-1}+i}{x} = -\frac{1}{i} \cdot \log \frac{\sqrt{x^2-1}-i}{x}.$$

Diese Gleichungen I.—VI.) geben zur Rechten immer unendlich viele Werthe, weil (nach §. 88.) die natürlichen Logarithmen jedesmal unendlich viele Werthe haben. In der That aber giebt es auch (nach §§. 78.—81.) zu jedem gegebenen Sinus, oder Kosinus, aber auch zu jeder gegebenen Tangente oder

---

*) Dieser Ausdruck in IV.) zur Rechten geht aus dem in III.) zur Rechten hervor, wenn daselbst $\frac{1}{x}$ statt x gesetzt wird. Ist nämlich $cotg\, z = x$, so ist $tg\, z = \frac{1}{x}$, also $z = \frac{1}{cotg} x = \frac{1}{tg} \frac{1}{x}$.

Kotangente, u. s. w. f., jedesmal unendlich viele Bogen. Deshalb sind die Gleichungen I.—VI.) ganz vollständige Gleichungen.

Sind aber auf diese Weise in den Gleichungen I.—VI.) die gedachten Funktionen von x wirklich hergestellt, so kann man nun auch sogleich ihre Ableitungen finden. Man findet nämlich (Vgl. §. 150. Beispiele 35.—37.)

$$\text{I}_1.\quad \partial\left(\frac{1}{sin}x\right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \text{also}\quad \partial\left(\frac{1}{sin}z\right)_x = \frac{\partial z_x}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$\text{II}_1.\quad \partial\left(\frac{1}{cos}x\right)_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \text{also}\quad \partial\left(\frac{1}{cos}z\right)_x = -\frac{\partial z_x}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$\text{III}_1.\quad \partial\left(\frac{1}{tg}x\right)_x = \frac{1}{1+x^2};\quad \text{also}\quad \partial\left(\frac{1}{tg}z\right)_x = \frac{\partial z_x}{1+z^2};$$

$$\text{IV}_1.\quad \partial\left(\frac{1}{cotg}x\right)_x = -\frac{1}{1+x^2};\quad \text{also}\quad \partial\left(\frac{1}{cotg}z\right)_x = -\frac{\partial z_x}{1+z^2};$$

$$\text{V}_1.\quad \partial\left(\frac{1}{sec}x\right)_x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};\quad \text{also}\quad \partial\left(\frac{1}{sec}z\right)_x = \frac{\partial z_x}{z\sqrt{z^2-1}};$$

$$\text{VI}_1.\quad \partial\left(\frac{1}{cosec}x\right)_x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};\quad \text{also}\quad \partial\left(\frac{1}{cosec}z\right)_x = -\frac{\partial z_x}{z\sqrt{z^2-1}}.$$

§. 152.

I. Man kann jedoch auch von solchen Funktionen y von x die Ableitungen nach x finden, welche nicht wirklich entwickelt gegeben sind, sondern zwischen denen man nur eine Gleichung gegeben hat. Denkt man sich nämlich in einer solchen Gleichung zwischen x und y, unter y diejenige Funktion von x, welche aus der Auflösung der Gleichung nach y, für y hervorgehen würde, — so sind die beiden Seiten der Gleichung genau eine und dieselbe Funktion von x; — oder, beide Seiten sind genau eine und dieselbe Konstante nach x, wenn nämlich die eine Seite eine solche ist, so daß sich dann auf der andern Seite die expliciten x und die implicit in y enthaltenen x gegenseitig aufheben; — oder, es sind beide Seiten der Gleichung genau Null, wenn die eine Seite nämlich Null ist, so

daß dann auf der andern Seite wiederum die expliciten und die impliciten x einander aufheben und vernichten. — In allen drei Fällen aber müssen deshalb die Ableitungen beider Seiten der Gleichung nach allem x (d. h. nach dem expliciten und implicit in y enthaltenen x) einander gleich seyn, so daß, wenn die eine Seite der Gleichung nach x konstant oder Null ist, ihre Ableitung nach x also der Null gleich sich ausweist, dann auch die Ableitung der andern Seite der Gleichung nach x, der Null gleich seyn muß.

Auf diese Weise giebt jede Gleichung zwischen y und x, augenblicklich eine Gleichung zwischen ∂y_x, y und x, welche eine Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung genannt wird; so daß man dann aus beiden Gleichungen, die beiden Funktionen von x, nämlich y und ∂y_x (in x ausgedrückt) finden kann.

Wenden wir dies zunächst auf einige der früheren Beispiele an.

Beispiel 1. Es sey nämlich y gegeben durch die Gleichung

1) $$a^y = x,$$

so daß $y = \overset{a}{log}\, x = \frac{log\, x}{log\, a}$ wird, welches $\partial y_x = \frac{1}{x \cdot log\, a}$ giebt. — Nimmt man aber von der Gleichung 1.) links und rechts die Ableitungen nach x, so erhält man, weil $\partial x_x = 1$ ist,

2) $$a^y \cdot log\, a \cdot \partial y_x = 1;$$

Daraus folgt dann sogleich, wenn aus 1.) und 2.) a^y d. h. y eliminirt wird, $\partial y_x = \frac{1}{x \cdot log\, a}$; wie vorher auch.

Beispiel 2. Es sey

1) $$sin\, y = x, \quad \text{also} \quad cos\, y = \sqrt{1-x^2},$$

so giebt diese erstere Gleichung, wenn sie nach x abgeleitet wird, weil $\partial x_x = 1$ ist,

2) $$cos\, y \cdot \partial y_x = 1, \quad \text{also} \quad \partial y_x = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

welches Resultat genau mit §. 151. I_2.) stimmt, weil y nichts anders als $\overset{-1}{sin}\, x$ ist.

Beispiel 3. Ist dagegen

1) $$cos\, y = x, \quad \text{also} \quad sin\, y = \sqrt{1-x^2},$$

so giebt diese erstere Gleichung, nach x abgeleitet,

2) $\quad \sin y \cdot \partial y_x = 1, \quad$ also $\quad \partial y_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

welches mit §. 151. II_1.) übereinstimmt.

Beispiel 4. Hat man

1) $\quad tg\, y = x$,

so giebt diese Gleichung, wenn man links und rechts die Ableitungen nach allem x nimmt,

2) $\quad \frac{1}{\cos y^2} \cdot \partial y_x = 1, \quad$ also $\quad \partial y_x = \cos y^2 = \frac{1}{\sec y^2} = \frac{1}{1+x^2}$,

welches Resultat wiederum mit §. 151. III_1.) stimmt.

Beispiel 5. Wäre gegeben die Gleichung

1) $\quad x^3 - 2xy^2 + 4y^3 = 0$,

so würde solche, wenn man nach allem x die Ableitungen nimmt, sogleich geben

$$3x^2 - 2y^2 - 4xy \cdot \partial y_x + 12y^2 \cdot \partial y_x = 0,$$

oder

2) $\quad 3x^2 - 2y^2 + (12y^2 - 4xy) \cdot \partial y_x = 0$.

Eliminirt man nun aus 1.) und 2.) den Ausdruck y, so erhält man eine Gleichung zwischen x und ∂y_x, welche nach ∂y_x eine kubische wird, so daß man für ∂y_x drei Werthe bekommt. — Es hat aber auch aus der Gleichung 1.) der Unbekannte y drei Werthe, und jede Form von y giebt eine Ableitung (∂y_x) nach x.

II. Vermöge derselben Betrachtung kann man auch die Ableitungen zweier Funktionen y und z von x finden, welche mittelst zweier Gleichungen zwischen x, y und z gegeben sind. Man nimmt von jeder Gleichung die Ableitung nach allem x, — bekommt zwei neue (Ableitungs-) Gleichungen zwischen x, y, z, welche auch noch ∂y_x und ∂z_x enthalten, und kann dann aus allen vier Gleichungen die vier Funktionen y, z, ∂y_x, ∂z_x in x ausgedrückt finden.

Sind z. B. y und z gegeben durch die beiden Gleichungen

1) $\quad ax + by + cz + d = 0$

und 2) $\quad (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = h^2$,

so giebt die erstere, wenn sie nach allem x abgeleitet wird,

3) $\quad a + b \cdot \partial y_x + c \cdot \partial z_x = 0$;

die andere dagegen giebt, nachdem man sie durch 2 dividirt hat,

4) $\quad (x-p) + (y-q) \cdot \partial y_x + (z-r) \cdot \partial z_x = 0$;

und aus diesen vier Gleichungen, wenn man sie nach den vier Unbekann-

ten y, z, ∂y_x, ∂z_x algebraisch auflöst, erhält man ∂y_x und ∂z_x genau eben so, wie wenn man aus 1.) und 2.) sogleich y und z in x ausgedrückt gefunden, und dann von jedem der beiden gefundenen Werthe y_x und z_x, die Ableitung nach x genommen hätte.

III. Auf dieselbe Weise kann man aber auch die Ableitungen dreier Funktionen y, z, u von x finden, welche durch drei Gleichungen zwischen y, z, u und x gegeben sind; dadurch nämlich, daß man von jeder Gleichung die Ableitung (beider Seiten der Gleichung) nach allem x nimmt, und so die drei neuen Gleichungen sich bildet, welche ∂y_x, ∂z_x und ∂u_x enthalten.

Und dasselbe kann man beliebig weiter ausdehnen.

IV. Nimmt man aber von solchen Ableitungs-Gleichungen der ersten Ordnung (welche bereits ∂y_x, ∂z_x etc. etc. enthalten) noch einmal die Ableitungen nach allem x, so erhält man Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung, welche auch noch $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ etc. etc. enthalten. — Sind daher eben so viele Gleichungen als unbekannte Funktionen y, z etc. etc. gegeben, so bekommt man auch eben so viele Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung, als zweite Ableitungen $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ etc. etc. zu finden sind, und man kann daher (durch Auflösung dieser Gleichungen) auch noch $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ etc. etc. finden, ohne y, z etc. etc. vorher hergestellt zu haben.

Nimmt man also in dem vorstehenden Beispiele zu II.) von den Gleichungen 3.) und 4.) der ersten Ordnung noch einmal die Ableitungen nach allem x, so erhält man

$$5) \qquad b \cdot \partial^2 y_x + c \cdot \partial^2 z_x = 0$$

und

$$6) \qquad 1 + \partial y_x{}^2 + \partial z_x{}^2 + (y-q) \cdot \partial^2 y_x + (z-r) \cdot \partial^2 z_x = 0 \text{*)}$$

als Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung; und diese sechs Gleichungen (1.—6.) reichen aus, um die sechs unbekannten, unter y, z, ∂y_x, ∂z_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ vorgestellten Funktionen von x, auf algebraischem Wege vollends zu finden.

---

*) Es ist nämlich $(y-q) \cdot \partial y_x$ ein Produkt aus der Funktion $y-q$ (von x) und ∂y_x (als Funktion von x). Man muß daher die Formel §. 150. B. 2.) in Anwendung bringen. — Dasselbe gilt von dem nächsten Gliede $(z-r) \cdot \partial z_x$ in der Gleichung 4.).

§. 153.

Erweiterung des Taylor'schen Lehrsatzes für Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen.

I. Wiederholt man ganz genau das Verfahren des §. 60.); denkt man sich aber dabei statt einer ganzen Funktion eine völlig beliebige Funktion $f_{x,y}$ von x und y, so erhält man hier wie dort genau denselben Satz, nämlich

$$1) \quad f_{x+h,y+k} = f_{x,y} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial f_y \cdot k + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \frac{hk}{2!} + 3\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \frac{h^2 k}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \frac{hk^2}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial^3 f_y \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Dies ist der „Taylor'sche Lehrsatz für Funktionen zweier Veränderlichen", während $\partial^{1,1} f_{x,y}$ mit $\partial(\partial f_x)_y$ oder mit $\partial(\partial f_y)_x$ gleichbedeutend genommen ist, und eben so zu gleicher Zeit auch

$$\partial^{2,1} f_{x,y} = \partial(\partial^2 f_x)_y = \partial^2(\partial f_y)_x = \partial(\partial(\partial f_x)_y)_x$$

und

$$\partial^{1,2} f_{x,y} = \partial(\partial^2 f_y)_x = \partial^2(\partial f_x)_y = \partial(\partial(\partial f_y)_x)_y$$

gedacht ist.

Daß aber die Ordnung des Ableitens nach x und nach y ganz beliebig ist, daß z. B. $\partial(\partial^2 f_x)_y = \partial^2(\partial f_y)_x$ ist, geht (wie §. 60. sehen läßt) daraus hervor, daß man $f_{x+h,y+k}$ auf doppelte Art entwickelt erhalten kann, einmal, indem man zuerst $f_{x+h,y}$ nach Potenzen von h entwickelt, und nachher erst $y+k$ statt y schreibt, — dann aber auch, indem man zuerst $f_{x,y+k}$ nach Potenzen von k entwickelt, und dann erst $x+h$ statt x setzt. Die Vergleichung beider Resultate führt dann zu den Gleichungen $\partial(\partial f_y)_x = \partial(\partial f_x)_y$; $\partial^2(\partial f_y)_x = \partial(\partial^2 f_x)_y$, u. s. w. f.; und deshalb kann man die Zeichen $\partial^{1,1} f_{x,y}$ statt $\partial(\partial f_x)y$ oder $\partial(\partial f_y)_x$; — $\partial^{2,1} f_{x,y}$ statt $\partial(\partial^2 f_x)_y$ oder statt $\partial^2(\partial f_y)_x$; — u. s. w. f. einführen, welche Bezeichnung die Folge der Ableitungen so läßt, wie sie ist, nämlich willkührlich.

II. Ist aber f eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, z, so kann man zuerst x+h statt x, und y+k statt y setzen, und man erhält dann die vorstehende Entwicklung 1.). — Setzt man in selbige zuletzt noch z+l statt z, so geht in der Entwicklung zur Rechten, jeder einzelne Koefficient wiederum in eine Reihe nach l über, und man erhält

$$2)\quad f_{x+h,y+k,z+l} = f_{x,y,z} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial f_y \cdot k + \partial^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial f_z \cdot l + \partial^2 f_z \cdot \frac{l^2}{2!} + \cdots$$
$$+ 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \frac{hk}{2!} + \cdots$$
$$+ 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \frac{hl}{2!} + \cdots$$
$$+ 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \frac{kl}{2!} + \cdots,$$

wo wir noch alle Glieder der zweiten Dimension (in Bezug auf h, k, l) hingeschrieben, haben.

Dies ist der „Taylor'sche Lehrsatz für Funktionen dreier Veränderlichen".

III. Auf dieselbe Weise fortfahrend erhält man den „Taylor'schen Lehrsatz für Funktionen von vier, fünf und beliebig viel Veränderlichen".

§. 154.

Man kann aber nun die Gesetze des Ableitens vollends hinstellen.

1) Wir haben nämlich bereits im §. 150.) gesehen, daß wenn f eine explicite Funktion von x ist, die t explicit nicht enthält, — wenn aber unter x selbst wieder eine Funktion von t gedacht wird, dann allemal

$$\text{I.}\qquad \partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t$$

seyn müsse.

Wir

Wir fügen jetzt noch hinzu:

2) Wenn f eine explicite Funktion von x und y ist, die aber t explicit nicht enthält, und wenn unter x und y selbst wieder Funktionen von t verstanden werden, so ist allemal

$$\text{II.} \qquad \partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t.$$

3) Wenn f eine explicite Funktion von x, y und z ist, die aber t nicht explicit enthält, und wenn x, y, z selbst wieder beliebige Funktionen von t vorstellen, so ist allemal

$$\text{III.} \qquad \partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t.$$

4) Und dies läßt sich auf explicite Funktionen von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen, welche t selbst nicht explicit enthalten, während die erstern Veränderlichen wieder als beliebige Funktionen von t gedacht werden.

Soll nämlich im Falle der N. 2.) $\partial f_{(t)}$ gefunden werden, so muß man $f_{(t+g)}$ in eine nach Potenzen von g fortlaufende Reihe entwickeln und den Koefficienten von g^1 statt $\partial f_{(t)}$ nehmen. — So wie aber t+g statt t gesetzt wird, geht (nach dem Taylor'schen Lehrsatze §. 149. ⊙)

α) x_t über in x_{t+g} d. h. in x+h, wo $h = \partial x_t \cdot g + \partial^2 x_t \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$

und

β) y_t über in y_{t+g} d. h. in y+k, wo $k = \partial y_t \cdot g + \partial^2 y_t \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$;

und es wird also

$$f_{(t+g)} = f_{x+h, y+k}.$$

Nimmt man nun statt $f_{x+h,y+k}$ die Entwicklung aus §. 153. N. 1.), substituirt man in solche statt h und k die Werthe aus α.) und β.) ordnet man alles nach Potenzen von g und hebt man bloß die [illegible] hervor, welche g^1 enthalten, so findet man $\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t$, als Koefficient von g^1, wodurch die Formel II.) außer Zweifel gesetzt ist.

Soll aber $\partial f_{(t)}$ im Falle der N. 3.) gefunden werden [illegible] bemerken, daß wenn t+g [illegible] gesetzt wird, dann [illegible] Reihen x+h und [illegible] solche in α.) und [illegible] — sondern [illegible] übergeht

[illegible] $_{t+g}$ d. [illegible]

[illegible]

Nimmt man hier aber statt des Ausdrucks zur Rechten seine Entwickelung aus §. 153. N. 2.); — substituirt man zu gleicher Zeit statt h, k, l die Reihen nach g aus α.), β.) und γ.), — und hebt man bloß die mit g^1 afficirten Glieder heraus, so findet sich sogleich als Koefficient von g^1

$$\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t,$$

wodurch die Formel III.) außer Zweifel gestellt sich sieht.

U. s. w. f.

Drückt man aber in Worte aus, was die Formeln II.), III.), etc. etc. lehren, so kann man sagen:

Man findet von jeder Funktion f, welche t bloß implicit (in x, y, z, u, etc. etc.) enthält die Ableitung nach allem t, wenn man die Ableitungen derselben Funktion f nach dem t nimmt, welches einzeln in x, oder in y, oder in z, oder in u, oder etc. etc. steckt, (alle die übrigen dieser Veränderlichen dabei jedesmal als constant ansieht, so daß jedesmal bloß die Formel I. in Anwendung kommt) zuletzt aber alle diese Partial-Ableitungen addirt.

§. 154bis.

Betrachten wir dieselben Fälle 1.) 2.) 3.) etc. des §. 154.), jetzt unter der Voraussetzung, daß f jedesmal den Veränderlichen t auch noch explicit enthält, so findet man

1) im Falle des §. 154. N. 1.)

$$\partial f_{(t)} = \partial f_t + \partial f_x \cdot \partial x_t;$$

2) im Falle des §. 154. N. 2.)

$$\partial f_{(t)} = \partial f_t + \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t;$$

3) im Falle des §. 154. N. 3.)

$$\partial f_{(t)} = \partial f_t + \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t;$$

u. s. w. f.

Diese Gesetze findet man aber wieder dadurch, daß man $f_{(t+g)}$ nach g entwickelt und dann jedesmal den Koefficienten von g^1 heraussucht, welcher $= \partial f_{(t)}$ seyn muß.

Man erhält jedoch auch die hiesige 1.) aus der Formel II.) des §. 154.) unmittelbar, indem man daselbst statt y_t die einfachste aller Funktionen von t, nämlich $1 \cdot t$ oder t^1 oder t selbst setzt, so daß $\partial y_t = \partial t_t = 1$ wird.

Eben so erhält man die hiesige 2.) unmittelbar aus der Formel III.) des §. 154.), wenn man in jene bloß t statt z_t setzt, so daß $\partial z_t = \partial t_t = 1$ wird. — U. s. w. f.

Anmerkung. Denkt man sich aber unter x, y, z, etc. solche Funktionen von t, welche $f_{(t)}$ identisch der Null (oder nur einer Constanten nach x) gleich machen, so ist allemal das so gefundene $\partial f_{(t)}$ der Null gleich (nach §. 152.).

§. 155.

Dieser Gesetze der §. 154.) und §. 154[bis].) kann man sich sogleich bedienen, um Ausdrücke, welche außer mehreren Veränderlichen x, y, etc. etc., auch noch Ableitungen z. B. von y nach x enthalten, sogleich in andere, den gegebenen gleiche Ausdrücke zu verwandeln, in denen dieselben Ableitungen nicht mehr, wohl aber Ableitungen von x nach y, oder wohl auch Ableitungen von x und y nach irgend einem dritten Veränderlichen t genommen, vorkommen.

Soll z. B. der Ausdruck

$$(\odot)\cdots \qquad \frac{y^2}{x}\cdot\frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

auf diese Weise umgeformt werden, daß man sich unter x, also auch unter y eine Funktion eines neuen Veränderlichen t denkt, und nun statt der Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$ lieber die Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ eingehen sollen, — so geht man von der Formel §. 154. I.) aus, nämlich von

$$\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t,$$

und nimmt von solcher links und rechts auf's Neue die Ableitungen nach allem t, und man erhält, indem man jedesmal von der neuen Gleichung abermals links und rechts die Ableitungen nach allem t nimmt,

1) $\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t$;

2) $\partial^2 y_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t{}^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t$ *);

*) Nimmt man von der 1.) links und rechts die Ableitungen nach t, um aus ihr die Gleichung 2.) zu erhalten, so muß man sich erinnern, daß

3) $\partial^3 y_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t^3 + 3\partial^2 y_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_x \cdot \partial^3 x_t$;

u. s. w. f.

Löst man diese Gleichungen nach ∂y_x, $\partial^2 y_x$, etc. etc. algebraisch auf, so erhält man

$$\text{I.} \qquad \partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t};$$

$$\text{II.} \qquad \partial^2 y_x = \frac{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^3};$$

u. s. w. f.*)

Diese Gleichungen aber gehen, wenn man $t = y$ nimmt, wo dann $\partial y_t = \partial y_y = 1$, $\partial^2 y_t = \partial^2 y_y = 0$, u. s. f. wird,

$$\text{I}_1. \qquad \partial y_x = \frac{1}{\partial x_y};$$

$$\text{II}_1. \qquad \partial^2 y_x = -\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3};$$

u. s. w. f.

Substituirt man aber diese Werthe aus I.) und II.) statt ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in den Ausdruck ⊙.), so wird solcher

$$(\odot_1) \cdots \qquad = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{(\partial x_t^2 + \partial y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}.$$

Substituirt man jedoch die Werthe aus I_1.) und II_1.) statt ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in den Ausdruck ⊙.), so wird derselbe

---

∂y_x wie y selbst, eine Funktion von x ist, daß daher nach derselben Formel 1.), wenn man ∂y_x statt y setzt,

$$\partial(\partial y_x)_t = \partial(\partial y_x)_x \cdot \partial x_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t$$

wird. — Eben so muß man bei den übrigen Ableitungen verfahren. —

*) Man kann die II.) etc. etc. auch unmittelbar aus der I.) dadurch ableiten, daß man von der I.) hinter einander die Ableitungen nach t nimmt, endlich auch dadurch, daß man von der I.) hinter einander die Ableitungen nach x nimmt, rechts aber $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ durch φ bezeichnet und nur nicht übersieht, daß nach derselben Formel I.) $\partial \varphi_x = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_t}$ ist.

$$(\odot_2)\cdots \qquad = -\frac{y^2}{x}\cdot\frac{(\partial x_y{}^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y},$$

wo man, wenn man will, das — Zeichen noch weglassen kann, weil die Potenz im Zähler doch zweideutig ist, so daß der Ausdruck $\odot$) oder $\odot_1$) oder $\odot_2$) doch immer + und — zugleich vor sich stehen hat.

Substituirt man in den Ausdruck $\odot_1$) wiederum statt ∂y_t und $\partial^2 y_t$ deren Werthe aus 1.) und 2.), so heben sich ∂x_t und $\partial^2 x_t$ von selber weg, und man erhält den Ausdruck $\odot$.) wieder. — Hätte man aber einen andern beliebig gegebenen Ausdruck $F_{x,y,\partial x_t,\partial y_t,\partial^2 x_t,\partial^2 y_t}$ gehabt, welcher nächst x und y die Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ enthält; substituirte man in denselben statt ∂y_t und $\partial^2 y_t$ ihre Werthe (aus 1. und 2.), und fielen dann die Ableitungen ∂x_t, $\partial^2 x_t$ nicht von selber heraus, so wäre dies ein Beweis, daß es nicht möglich ist, den Ausdruck F so umzuformen, daß in ihm y bloß als eine Funktion von x angesehen werden kann, so nämlich, daß in ihm außer x und y bloß Ableitungen von y nach x vorkämen und von t gar nicht mehr die Rede wäre.

Diese Umformung der Ausdrücke mit Ableitungen nennt man übrigens das „Uebertragen der Unabhängigkeit „von einem Veränderlichen (x) auf einen andern „(t oder y)."

§. 156.

Der Maclaurin'sche Lehrsatz.

I. Setzt man in dem Taylor'schen Lehrsatze

$$1)\qquad f_{x+h} = f_x + \partial f_x\cdot\frac{h}{1} + \partial^2 f_x\cdot\frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

zuerst α statt x, dann aber wiederum $x-\alpha$ statt h, so erhält man

$$2)\ f_x = f_\alpha + \partial f_\alpha\cdot(x-\alpha) + \partial^2 f_\alpha\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^3 f_\alpha\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

wenn f_α, ∂f_α, $\partial^2 f_\alpha$, $\partial^3 f_\alpha$, etc. etc. die Werthe der Funktionen

f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, etc. etc. bedeuten sollen, welche letztere, wenn sie vorher hergestellt sind, für $x = \alpha$ annehmen.

Dieser Satz 2.) heißt der allgemeinere Maclaurin'sche Lehrsatz, in welchem der gemeine Maclaurin'sche Lehrsatz als derjenige besondere Fall steckt, in welchem $\alpha = 0$ gesetzt ist. Dieser letztere kann so geschrieben werden:

$$3) \qquad f_x = f_0 + \partial f_0 \cdot x + \partial^2 f_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^3 f_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

II. Man sieht, wie der Maclaurin'sche Lehrsatz dazu dient, jede beliebige Funktion von x in eine nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$, also auch in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln. — Weil aber die Koefficienten dieser Reihen anfänglich hergestellte Funktionen von x, dann aber die Werthe derselben für $x = \alpha$, oder für $x = 0$ sind, so können zuweilen für einen bestimmten Werth von α, oder auch für $x = 0$, diese Koefficienten die Form $\frac{p}{0}$, oder eine andere, im Kalkul unzulässige Form annehmen (vgl. §. 149. Ende). Dies zeigt aber dann jedesmal an, daß dasmal eine solche Entwickelung, im erstern Falle nach ganzen Potenzen dieser bestimmten Differenz $x - \alpha$, im andern Falle nach ganzen Potenzen von x, nicht möglich ist. — Man darf aber dann nur dem α einen andern und einen solchen Werth geben, für welchen jede der gedachten Funktionen f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, etc. etc. wirklich einen bestimmten Werth annimmt, und die Entwickelung nach ganzen Potenzen dieser neuen Differenz $x - \alpha$ ist wiederum möglich und zugleich wiederum mittelst der N. 2.) verwirklicht.

Beispiel 1. Will man z. B. $log(1+x)$ nach ganzen Potenzen von x entwickeln, so hat man

$$f_x = log(1+x); \quad \partial f_x = \frac{1}{1+x}, \quad \partial^2 f_x = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \partial^3 f_x = +\frac{2}{(1+x)^3};$$

$$\partial^4 f_x = -\frac{3!}{(1+x)^4}; \quad \partial^5 f_x = +\frac{4!}{(1+x)^5}; \quad \partial^6 f_x = -\frac{5!}{(1+x)^6}; \text{ etc. etc.}$$

Der gemeine Maclaurin'sche Lehrsatz (N. 3.) giebt also nun, indem man hier Null statt x setzt,

$$log(1+x) = log\,1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \cdots,$$

wo $log\,1 = 0$, aber auch $log\,1 = \pm 2n\pi \cdot i$ (§. 89.) genommen werden kann.

Wollte man $log(1+x)$ nach ganzen Potenzen von $x-1$ entwickeln, so müßte man in N. 2.) $\alpha = 1$ nehmen; und man erhielte dann

$$log(1+x) = log\,2 + \frac{x-1}{2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \cdots.$$

Setzt man hier z. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{1}{10}$, also $x = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$, so daß $1 + x = \frac{11}{5}$ wird, so findet sich hieraus

$$log\,\tfrac{11}{5} = log\,2 + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{1000} - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{10000} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{100000} - \text{etc. etc.}$$

Da nun $log\,\frac{11}{5} = log\,11 - log\,5$ ist, so folgt hieraus, wenn $log\,2$ und $log\,5$ bekannt sind, sogleich $log\,11$ mit sehr geringer Mühe bis auf 7 Decimalstellen genau.

Beispiel 2. Wollte man $log\,x$ nach ganzen Potenzen von x entwickeln, so hätte man

$$f_x = log\,x;\quad \partial f_x = \frac{1}{x};\quad \partial^2 f_x = -\frac{1}{x^2};\quad \partial^3 f_x = \frac{2}{x^3};\quad \partial^4 f_x = -\frac{3!}{x^4};\ \text{etc.}$$

und setzte man hier 0 statt x, so würden die Nenner alle Null werden. Eine Entwicklung von $log\,x$ nach ganzen Potenzen von x ist daher nicht möglich. Wohl aber ergiebt sich aus N. 2.) sogleich die Entwicklung von $log\,x$ nach ganzen Potenzen von $x-1$.

Beispiel 3. Wollte man $\frac{1}{sin}x$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickeln, so hätte man

$$f_x = \frac{1}{sin}x;\quad \partial f_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \partial^2 f_x = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};\quad \partial^3 f_x = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\partial^4 f_x = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}};\quad \partial^5 f_x = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}};\ \text{etc. etc.}$$

Setzt man nun hier überall 0 statt x, wie es der Satz N. 3.) verlangt, so erhält man aus N. 3.)

$$\frac{1}{sin}x = \frac{1}{sin}0 + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

wo man $\frac{1}{sin}0 = 0$, aber auch $\frac{1}{sin}0 = n\pi$ setzen kann, unter n Null und jede positive und auch jede negative ganze Zahl verstanden (nach §. 78.). — Diese Reihe giebt also, wenn man statt x irgend einen Sinus setzt, allemal sogleich den zugehörigen Bogen.

Das Gesetz, nach welchem diese Reihe für $\frac{1}{sin}x$ fortschreitet, ist hier zwar sichtbar gemacht, jedoch auf diesem Wege schwer zu erkennen. Wenn man aber bedenkt, daß

ten y, z, ∂y_x, ∂z_x algebraisch auflöst, erhält man ∂y_x und ∂z_x genau eben so, wie wenn man aus 1.) und 2.) sogleich y und z in x ausgedrückt gefunden, und dann von jedem der beiden gefundenen Werthe y_x und z_x, die Ableitung nach x genommen hätte.

III. Auf dieselbe Weise kann man aber auch die Ableitungen dreier Funktionen y, z, u von x finden, welche durch drei Gleichungen zwischen y, z, u und x gegeben sind; dadurch nämlich, daß man von jeder Gleichung die Ableitung (beider Seiten der Gleichung) nach allem x nimmt, und so die drei neuen Gleichungen sich bildet, welche ∂y_x, ∂z_x und ∂u_x enthalten.

Und dasselbe kann man beliebig weiter ausdehnen.

IV. Nimmt man aber von solchen Ableitungs-Gleichungen der ersten Ordnung (welche bereits ∂y_x, ∂z_x etc. etc. enthalten) noch einmal die Ableitungen nach allem x, so erhält man Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung, welche auch noch $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ etc. etc. enthalten. — Sind daher eben so viele Gleichungen als unbekannte Funktionen y, z etc. etc. gegeben, so bekommt man auch eben so viele Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung, als zweite Ableitungen $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ etc. etc. zu finden sind, und man kann daher (durch Auflösung dieser Gleichungen) auch noch $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ etc. etc. finden, ohne y, z etc. etc. vorher hergestellt zu haben.

Nimmt man also in dem vorstehenden Beispiele zu II.) von den Gleichungen 3.) und 4.) der ersten Ordnung noch einmal die Ableitungen nach allem x, so erhält man

$$5) \qquad b\cdot\partial^2 y_x + c\cdot\partial^2 z_x = 0$$

und

$$6) \qquad 1+\partial y_x{}^2+\partial z_x{}^2+(y-q)\cdot\partial^2 y_x+(z-r)\cdot\partial^2 z_x = 0\,^{*})$$

als Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung; und diese sechs Gleichungen (1.—6.) reichen aus, um die sechs unbekannten, unter y, z, ∂y_x, ∂z_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^2 z_x$ vorgestellten Funktionen von x, auf algebraischem Wege vollends zu finden.

---

*) Es ist nämlich $(y-q)\cdot\partial y_x$ ein Produkt aus der Funktion $y-q$ (von x) und ∂y_x (als Funktion von x). Man muß daher die Formel §. 150. B. 2.) in Anwendung bringen. — Dasselbe gilt von dem nächsten Gliede $(z-r)\cdot\partial z_x$ in der Gleichung 4.).

§. 153.

Erweiterung des Taylor'schen Lehrsatzes für Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen.

I. Wiederholt man ganz genau das Verfahren des §. 60.); denkt man sich aber dabei statt einer ganzen Funktion eine völlig beliebige Funktion $f_{x,y}$ von x und y, so erhält man hier wie dort genau denselben Satz, nämlich

$$1)\quad f_{x+h,y+k} = f_{x,y} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial f_y \cdot k + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \frac{hk}{2!} + 3\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \frac{h^2 k}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \frac{hk^2}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial^3 f_y \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Dies ist der „Taylor'sche Lehrsatz für Funktionen zweier Veränderlichen", während $\partial^{1,1} f_{x,y}$ mit $\partial(\partial f_x)_y$ oder mit $\partial(\partial f_y)_x$ gleichbedeutend genommen ist, und eben so zu gleicher Zeit auch

$$\partial^{2,1} f_{x,y} = \partial(\partial^2 f_x)_y = \partial^2(\partial f_y)_x = \partial(\partial(\partial f_x)_y)_x$$

und

$$\partial^{1,2} f_{x,y} = \partial(\partial^2 f_y)_x = \partial^2(\partial f_x)_y = \partial(\partial(\partial f_y)_x)_y$$

gedacht ist.

Daß aber die Ordnung des Ableitens nach x und nach y ganz beliebig ist, daß z. B. $\partial(\partial^2 f_x)_y = \partial^2(\partial f_y)_x$ ist, geht (wie §. 60. sehen läßt) daraus hervor, daß man $f_{x+h,y+k}$ auf doppelte Art entwickelt erhalten kann, einmal, indem man zuerst $f_{x+h,y}$ nach Potenzen von h entwickelt, und nachher erst y+k statt y schreibt, — dann aber auch, indem man zuerst $f_{x,y+k}$ nach Potenzen von k entwickelt, und dann erst x+h statt x setzt. Die Vergleichung beider Resultate führt dann zu den Gleichungen $\partial(\partial f_y)_x = \partial(\partial f_x)_y$; $\partial^2(\partial f_y)_x = \partial(\partial^2 f_x)_y$, u. s. w. f.; und deshalb kann man die Zeichen $\partial^{1,1} f_{x,y}$ statt $\partial(\partial f_x)y$ oder $\partial(\partial f_y)_x$; — $\partial^{2,1} f_{x,y}$ statt $\partial(\partial^2 f_x)_y$ oder statt $\partial^2(\partial f_y)_x$; — u. s. w. f. einführen, welche Bezeichnung die Folge der Ableitungen so läßt, wie sie ist, nämlich willkührlich.

II. Ist aber f eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, z, so kann man zuerst $x+h$ statt x, und $y+k$ statt y setzen, und man erhält dann die vorstehende Entwicklung 1.). — Setzt man in selbige zuletzt noch $z+l$ statt z, so geht in der Entwicklung zur Rechten, jeder einzelne Koefficient wiederum in eine Reihe nach l über, und man erhält

$$2)\quad f_{x+h,y+k,z+l} = f_{x,y,z} + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial f_y \cdot k + \partial^2 f_y \cdot \frac{k^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \partial f_z \cdot l + \partial^2 f_z \cdot \frac{l^2}{2!} + \cdots$$
$$+ 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \frac{hk}{2!} + \cdots$$
$$+ 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \frac{hl}{2!} + \cdots$$
$$+ 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \frac{kl}{2!} + \cdots,$$

wo wir noch alle Glieder der zweiten Dimension (in Bezug auf h, k, l) hingeschrieben, haben.

Dies ist der „Taylor'sche Lehrsatz für Funktionen dreier Veränderlichen".

III. Auf dieselbe Weise fortfahrend erhält man den „Taylor'schen Lehrsatz für Funktionen von vier, fünf und beliebig viel Veränderlichen".

§. 154.

Man kann aber nun die Gesetze des Ableitens vollends hinstellen.

1) Wir haben nämlich bereits im §. 150.) gesehen, daß wenn f eine explicite Funktion von x ist, die t explicit nicht enthält, — wenn aber unter x selbst wieder eine Funktion von t gedacht wird, dann allemal

$$\text{I.}\qquad \partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t$$

seyn müsse.

Wir

Wir fügen jetzt noch hinzu:

2) Wenn f eine explicite Funktion von x und y ist, die aber t explicit **nicht** enthält, und wenn unter x und y selbst wieder Funktionen von t verstanden werden, so ist allemal

II. $$\partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t.$$

3) Wenn f eine explicite Funktion von x, y und z ist, die aber t nicht explicit enthält, und wenn x, y, z selbst wieder beliebige Funktionen von t vorstellen, so ist allemal

III. $$\partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t.$$

4) Und dies läßt sich auf explicite Funktionen von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen, welche t selbst **nicht** explicit enthalten, während die erstern Veränderlichen wieder als beliebige Funktionen von t gedacht werden.

Soll nämlich im Falle der N. 2.) $\partial f_{(t)}$ gefunden werden, so muß man $f_{(t+g)}$ in eine nach Potenzen von g fortlaufende Reihe entwickeln und den Koefficienten von g^1 statt $\partial f_{(t)}$ nehmen. — So wie aber t+g statt t gesetzt wird, geht (nach dem Taylor'schen Lehrsatze §. 149. ⊙)

α) x_t über in x_{t+g} d. h. in $x+h$, wo $h = \partial x_t \cdot g + \partial^2 x_t \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$

und

β) y_t über in y_{t+g} d. h. in $y+k$, wo $k = \partial y_t \cdot g + \partial^2 y_t \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$;

und es wird also

$$f_{(t+g)} = f_{x+h, y+k}.$$

Nimmt man nun statt $f_{x+h,y+k}$ die Entwicklung aus §. 153. N. 1.), substituirt man in solche statt h und k die Werthe aus α.) und β.), ordnet man alles nach Potenzen von g und hebt man bloß die Glieder hervor, welche g^1 enthalten, so findet man $\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t$ als Koefficient von g^1, wodurch die Formel II.) außer Zweifel gesetzt ist.

Soll aber $\partial f_{(t)}$ im Falle der N. 3.) gefunden werden, so muß man bemerken, daß, wenn t+g statt t gesetzt wird, dann nicht bloß x und y in die Reihen x+h und y+k, wie solche in α.) und β.) zu finden sind, übergehen, — sondern daß auch noch übergeht

γ) z_t in z_{t+g} d. h. in $z+l$, wo $l = \partial z_t \cdot g + \partial^2 z_t \cdot \frac{g^2}{2!} + \cdots$ ist.

Deshalb wird nun

$$f_{(t+g)} = f_{x+h, y+k, z+l}.$$

Nimmt man hier aber statt des Ausdrucks zur Rechten seine Entwicklung aus §. 153. N. 2.); — substituirt man zu gleicher Zeit statt h, k, l die Reihen nach g aus α.), β.) und γ.), — und hebt man bloß die mit g^1 afficirten Glieder heraus, so findet sich sogleich als Koefficient von g^1

$$\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t,$$

wodurch die Formel III.) außer Zweifel gestellt sich sieht.

u. s. w. f.

Drückt man aber in Worte aus, was die Formeln II.) III.), etc. etc. lehren, so kann man sagen:

Man findet von jeder Funktion f, welche t bloß implicit (in x, y, z, u, etc. etc.) enthält die Ableitung nach allem t, wenn man die Ableitungen derselben Funktion f nach dem t nimmt, welches einzeln in x, oder in y, oder in z, oder in u oder etc. etc. steckt, (alle die übrigen dieser Veränderlichen dabei jedesmal als constant ansieht, so daß jedesmal bloß die Formel I. in Anwendung kommt) zuletzt aber alle diese Partial-Ableitungen addirt.

§. 154bis.

Betrachten wir dieselben Fälle 1.) 2.) 3.) etc. des §. 154.) jetzt unter der Voraussetzung, daß f jedesmal den Veränderlichen t auch noch explicit enthält, so findet man

1) im Falle des §. 154. N. 1.)
$$\partial f_{(t)} = \partial f_t + \partial f_x \cdot \partial x_t;$$
2) im Falle des §. 154. N. 2.)
$$\partial f_{(t)} = \partial f_t + \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t;$$
3) im Falle des §. 154. N. 3.)
$$\partial f_{(t)} = \partial f_t + \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t;$$
u. s. w. f.

Diese Gesetze findet man aber wieder dadurch, daß man $f_{(t+g)}$ nach g entwickelt und dann jedesmal den Koefficienten von g^1 heraussucht, welcher $= \partial f_{(t)}$ seyn muß.

Man erhält jedoch auch die hiesige 1.) aus der Formel II.) des §. 154.) unmittelbar, indem man daselbst statt y_t die einfachste aller Funktionen von t, nämlich $1 \cdot t$ oder t^1 oder t selbst setzt, so daß $\partial y_t = \partial t_t = 1$ wird.

Eben so erhält man die hiesige 2.) unmittelbar aus der Formel III.) des §. 154.), wenn man in jene bloß t statt z_t setzt, so daß $\partial z_t = \partial t_t = 1$ wird. — U. s. w. f.

Anmerkung. Denkt man sich aber unter x, y, z, etc. solche Funktionen von t, welche $f_{(t)}$ identisch der Null (oder nur einer Constanten nach x) gleich machen, so ist allemal das so gefundene $\partial f_{(t)}$ der Null gleich (nach §. 152.).

§. 155.

Dieser Gesetze der §. 154.) und §. 154bis.) kann man sich sogleich bedienen, um Ausdrücke, welche außer mehreren Veränderlichen x, y, etc. etc., auch noch Ableitungen z. B. von y nach x enthalten, sogleich in andere, den gegebenen gleiche Ausdrücke zu verwandeln, in denen dieselben Ableitungen nicht mehr, wohl aber Ableitungen von x nach y, oder wohl auch Ableitungen von x und y nach irgend einem dritten Veränderlichen t genommen, vorkommen.

Soll z. B. der Ausdruck

$$(\odot)\cdots \qquad \frac{y^2}{x}\cdot\frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

auf diese Weise umgeformt werden, daß man sich unter x, also auch unter y eine Funktion eines neuen Veränderlichen t denkt, und nun statt der Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$ lieber die Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ eingehen sollen, — so geht man von der Formel §. 154. I.) aus, nämlich von

$$\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t,$$

und nimmt von solcher links und rechts auf's Neue die Ableitungen nach allem t, und man erhält, indem man jedesmal von der neuen Gleichung abermals links und rechts die Ableitungen nach allem t nimmt,

1) $\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t$;

2) $\partial^2 y_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t{}^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t$ *);

*) Nimmt man von der 1.) links und rechts die Ableitungen nach t, um aus ihr die Gleichung 2.) zu erhalten, so muß man sich erinnern, daß

3) $\partial^3 y_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t^3 + 3\partial^2 y_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_x \cdot \partial^3 x_t$;
u. s. w. f.

Löst man diese Gleichungen nach ∂y_x, $\partial^2 y_x$, etc. etc. algebraisch auf, so erhält man

$$\text{I.} \qquad \partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t};$$

$$\text{II.} \qquad \partial^2 y_x = \frac{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^3};$$

u. s. w. f.*)

Diese Gleichungen aber gehen, wenn man $t = y$ nimmt, wo dann $\partial y_t = \partial y_y = 1$, $\partial^2 y_t = \partial^2 y_y = 0$, u. s. f. wird,

$$\text{I}_1. \qquad \partial y_x = \frac{1}{\partial x_y};$$

$$\text{II}_1. \qquad \partial^2 y_x = -\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3};$$

u. s. w. f.

Substituirt man aber diese Werthe aus I.) und II.) statt ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in den Ausdruck ⊙.), so wird solcher

$$(\odot_1)\cdots \qquad = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{(\partial x_t^2 + \partial y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}.$$

Substituirt man jedoch die Werthe aus I_1.) und II_1.) statt ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in den Ausdruck ⊙.), so wird derselbe

---

∂y_x wie y selbst, eine Funktion von x ist, daß daher nach derselben Formel 1.), wenn man ∂y_x statt y setzt,

$$\partial(\partial y_x)_t = \partial(\partial y_x)_x \cdot \partial x_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t$$

wird. — Eben so muß man bei den übrigen Ableitungen verfahren. —

*) Man kann die II.) etc. etc. auch unmittelbar aus der I.) dadurch ableiten, daß man von der I.) hinter einander die Ableitungen nach t nimmt, endlich auch dadurch, daß man von der I.) hinter einander die Ableitungen nach x nimmt, rechts aber $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$ durch φ bezeichnet und nun nicht übersieht, daß nach derselben Formel I.) $\partial \varphi_x = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_t}$ ist.

$$(\odot_2)\cdots \qquad = -\frac{y^2}{x}\cdot\frac{(\partial x_y{}^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y},$$

wo man, wenn man will, das — Zeichen noch weglassen kann, weil die Potenz im Zähler doch zweideutig ist, so daß der Ausdruck $\odot$) oder $\odot_1$) oder $\odot_2$) doch immer + und — zugleich vor sich stehen hat.

Substituirt man in den Ausdruck $\odot_1$) wiederum statt ∂y_t und $\partial^2 y_t$ deren Werthe aus 1.) und 2.), so heben sich ∂x_t und $\partial^2 x_t$ von selber weg, und man erhält den Ausdruck $\odot$.) wieder. — Hätte man aber einen andern beliebig gegebenen Ausdruck $F_{x,y,\partial x_t,\partial y_t,\partial^2 x_t,\partial^2 y_t}$ gehabt, welcher nächst x und y die Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ enthält; substituirte man in denselben statt ∂y_t und $\partial^2 y_t$ ihre Werthe (aus 1. und 2.), und fielen dann die Ableitungen ∂x_t, $\partial^2 x_t$ nicht von selber heraus, so wäre dies ein Beweis, daß es nicht möglich ist, den Ausdruck F so umzuformen, daß in ihm y bloß als eine Funktion von x angesehen werden kann, so nämlich, daß in ihm außer x und y bloß Ableitungen von y nach x vorkämen und von t gar nicht mehr die Rede wäre.

Diese Umformung der Ausdrücke mit Ableitungen nennt man übrigens das „Uebertragen der Unabhängigkeit „von einem Veränderlichen (x) auf einen andern „(t oder y)."

§. 156.

Der Maclaurin'sche Lehrsatz.

I. Setzt man in dem Taylor'schen Lehrsatze

$$1)\qquad f_{x+h} = f_x + \partial f_x\cdot\frac{h}{1} + \partial^2 f_x\cdot\frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

zuerst α statt x, dann aber wiederum $x-\alpha$ statt h, so erhält man

$$2)\ f_x = f_\alpha + \partial f_\alpha\cdot(x-\alpha) + \partial^2 f_\alpha\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^3 f_\alpha\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

wenn f_α, ∂f_α, $\partial^2 f_\alpha$, $\partial^3 f_\alpha$, etc. etc. die Werthe der Funktionen

f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, etc. etc. bedeuten sollen, welche letztere, wenn sie vorher hergestellt sind, für $x = \alpha$ annehmen.

Dieser Satz 2.) heißt der allgemeinere Maclaurin'sche Lehrsatz, in welchem der gemeine Maclaurin'sche Lehrsatz als derjenige besondere Fall steckt, in welchem $\alpha = 0$ gesetzt ist. Dieser letztere kann so geschrieben werden:

$$3) \qquad f_x = f_0 + \partial f_0 \cdot x + \partial^2 f_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^3 f_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

II. Man sieht, wie der Maclaurin'sche Lehrsatz dazu dient, jede beliebige Funktion von x in eine nach ganzen Potenzen von $x-\alpha$, also auch in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln. — Weil aber die Koefficienten dieser Reihen anfänglich hergestellte Funktionen von x, dann aber die Werthe derselben für $x = \alpha$, oder für $x = 0$ sind, so können zuweilen für einen bestimmten Werth von α, oder auch für $x = 0$, diese Koefficienten die Form $\frac{p}{0}$, oder eine andere, im Kalkul unzulässige Form annehmen (vgl. §. 149. Ende). Dies zeigt aber dann jedesmal an, daß dasmal eine solche Entwickelung, im erstern Falle nach ganzen Potenzen dieser bestimmten Differenz $x-\alpha$, im andern Falle nach ganzen Potenzen von x, nicht möglich ist. — Man darf aber dann nur dem α einen andern und einen solchen Werth geben, für welchen jede der gedachten Funktionen f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, etc. etc. wirklich einen bestimmten Werth annimmt, und die Entwickelung nach ganzen Potenzen dieser neuen Differenz $x-\alpha$ ist wiederum möglich und zugleich wiederum mittelst der N. 2.) verwirklicht.

Beispiel 1. Will man z. B. $log(1+x)$ nach ganzen Potenzen von x entwickeln, so hat man

$$f_x = log(1+x); \quad \partial f_x = \frac{1}{1+x}, \quad \partial^2 f_x = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f_x = +\frac{2}{(1+x)^3};$$

$$\partial^4 f_x = -\frac{3!}{(1+x)^4}; \quad \partial^5 f_x = +\frac{4!}{(1+x)^5}; \quad \partial^6 f_x = -\frac{5!}{(1+x)^6}; \text{ etc. etc.}$$

Der gemeine Maclaurin'sche Lehrsatz (N. 3.) giebt also nun, indem man hier Null statt x setzt,

$$log(1+x) = log\,1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \cdots,$$

wo $log\,1 = 0$, aber auch $log\,1 = \pm 2n\pi\cdot i$ (§. 89.) genommen werden kann.

Wollte man $log(1+x)$ nach ganzen Potenzen von $x-1$ entwickeln, so müßte man in N. 2.) $\alpha = 1$ nehmen; und man erhielte dann

$$log(1+x) = log\,2 + \frac{x-1}{2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \cdots.$$

Setzt man hier z. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{1}{10}$, also $x = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$, so daß $1+x = \frac{11}{5}$ wird, so findet sich hieraus

$$log\,\tfrac{11}{5} = log\,2 + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{1000} - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{10000} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{100000} - \text{etc. etc.}$$

Da nun $log\,\frac{11}{5} = log\,11 - log\,5$ ist, so folgt hieraus, wenn $log\,2$ und $log\,5$ bekannt sind, sogleich $log\,11$ mit sehr geringer Mühe bis auf 7 Decimalstellen genau.

Beispiel 2. Wollte man $log\,x$ nach ganzen Potenzen von x entwickeln, so hätte man

$$f_x = log\,x;\quad \partial f_x = \frac{1}{x};\quad \partial^2 f_x = -\frac{1}{x^2};\quad \partial^3 f_x = \frac{2}{x^3};\quad \partial^4 f_x = -\frac{3!}{x^4};\ \text{etc.}$$

und setzte man hier 0 statt x, so würden die Nenner alle Null werden. Eine Entwicklung von $log\,x$ nach ganzen Potenzen von x ist daher nicht möglich. Wohl aber ergiebt sich aus N. 2.) sogleich die Entwicklung von $log\,x$ nach ganzen Potenzen von $x-1$.

Beispiel 3. Wollte man $\frac{1}{sin}x$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickeln, so hätte man

$$f_x = \frac{1}{sin}x;\quad \partial f_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \partial^2 f_x = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};\quad \partial^3 f_x = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\partial^4 f_x = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}};\quad \partial^5 f_x = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}};\ \text{etc. etc.}$$

Setzt man nun hier überall 0 statt x, wie es der Satz N. 3.) verlangt, so erhält man aus N. 3.)

$$\frac{1}{sin}x = \frac{1}{sin}0 + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

wo man $\frac{1}{sin}0 = 0$, aber auch $\frac{1}{sin}0 = n\pi$ setzen kann, unter n Null und jede positive und auch jede negative ganze Zahl verstanden (nach §. 78.). — Diese Reihe giebt also, wenn man statt x irgend einen Sinus setzt, allemal sogleich den zugehörigen Bogen.

Das Gesetz, nach welchem diese Reihe für $\frac{1}{sin}x$ fortschreitet, ist hier zwar sichtbar gemacht, jedoch auf diesem Wege schwer zu erkennen. Wenn man aber bedenkt, daß

$$\partial f_x = \partial\left(\frac{1}{sin}x\right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ist, daß also

$$\partial^n f_x = \partial^{n-1}((1-x^2)^{-\frac{1}{2}})_x$$

seyn muß; so kommt alles darauf an, den Werth von $\partial^{n-1}((1-x^2)^{-\frac{1}{2}})_x$ für $x=0$ auszumitteln, um auch $\partial^n f_x$ für $x=0$ zu haben. — Dies wird aber durch den nächsten Paragraphen möglich werden.

§. 157.

Man kann sich auch umgekehrt des Taylor'schen Lehrsatzes bedienen, um in allen den Fällen, wo man f_{x+h} ohne Zuziehung desselben in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe, also z. B. wo man

1) $f_{x+h} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots + A_n h^n + \cdots$

gefunden hat, — die n^{te} Ableitung $\partial^n f_x$ sogleich und unmittelbar zu finden, ohne die auf einander folgenden Ableitungen ∂f_x, $\partial^2 f_x$, etc. etc. erst nach und nach aus einander entwickeln zu müssen. Vergleicht man nämlich die Entwicklung 1.) mit der des Taylor'schen Satzes, so findet man

2) $$\frac{\partial^n f_x}{n!} = A_n; \qquad \text{also} \qquad \partial^n f_x = n!\, A_n.$$

Anmerkung 1. Will man z. B. $\partial^n(\varphi\cdot\psi)_x$ auf diesem Wege direkt finden, während φ und ψ irgend gegebene Funktionen von x sind, so hat man

$$(\varphi\cdot\psi)_{x+h} = \varphi_{x+h}\cdot\psi_{x+h}$$
$$= \left(\varphi_x + \partial\varphi_x\cdot h + \partial^2\varphi_x\cdot\frac{h^2}{2!} + \cdots\right)\left(\psi_x + \partial\psi_x\cdot h + \partial^2\psi_x\cdot\frac{h^2}{2!} + \cdots\right).$$

Multiplicirt man aber diese beiden Reihen mit einander (nach §. 45.), so findet sich als Koefficient von $\frac{h^n}{n!}$

$$(\odot)\cdots \partial^n(\varphi\psi)_x = \partial^n\varphi_x \times \psi_x + n\cdot\partial^{n-1}\varphi_x\cdot\partial\psi_x + n_2\cdot\partial^{n-2}\varphi_x\cdot\partial^2\psi_x + \cdots$$
$$+ n_r\cdot\partial^{n-r}\varphi_x\cdot\partial^r\psi_x + \cdots + n_{n-1}\cdot\partial\varphi_x\cdot\partial^{n-1}\psi_x + \varphi_x\cdot\partial^n\psi_x,$$

wo die einzelnen Koefficienten n_1, n_2, n_3, $\cdots$ n_r, $\cdots$ die Binomial-

Koefficienten der n^{ten} Potenz eines Binomiums vorstellen, so daß $n_r = \frac{n^{r|-1}}{r!}$ ist*).

Setzt man in diesem Resultate 3.), statt n nach und nach 2, 3, 4, 5 etc. etc., so erhält man:

$$(\mathfrak{C})\cdots\begin{cases}\partial^2(\varphi\psi) = \psi\cdot\partial^2\varphi + 2\cdot\partial\varphi\cdot\partial\psi + \varphi\cdot\partial^2\psi;\\ \partial^3(\varphi\psi) = \psi\cdot\partial^3\varphi + 3\cdot\partial^2\varphi\cdot\partial\psi + 3\cdot\partial\varphi\cdot\partial^2\psi + \varphi\cdot\partial^3\psi;\\ \partial^4(\varphi\psi) = \psi\cdot\partial^4\varphi + 4\cdot\partial^3\varphi\cdot\partial\psi + 6\cdot\partial^2\varphi\cdot\partial^2\psi\\ \qquad + 4\cdot\partial\varphi\cdot\partial^3\psi + \varphi\cdot\partial^4\psi;\\ \partial^5(\varphi\psi) = \psi\cdot\partial^5\varphi + 5\cdot\partial^4\varphi\cdot\partial\psi + 10\cdot\partial^3\varphi\cdot\partial^2\psi\\ \qquad + 10\cdot\partial^2\varphi\cdot\partial^3\psi + 5\cdot\partial\varphi\cdot\partial^4\psi + \varphi\cdot\partial^5\psi;\end{cases}$$

u. s. w. f., wo die Ableitungs-Zeichen ∂ nach x zu nehmen sind.

Um die Anwendbarkeit dieser Resultate durch ein Beispiel nachzuweisen, sey $y = tg\,x$ nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln. — Man muß zu dem Ende von $tg\,x$, die Ableitungen hinter einander entwickeln, um zuletzt 0 statt x setzen zu können, weil dies die Koefficienten der (gemeinen) Maclaurin'schen Reihe sind. Allein dies führt zu sehr unangenehmen und wenig übersichtlichen Rechnungen, wenn man nicht kleine Kunstgriffe anwendet. Es findet sich aber zunächst

$$\partial(tg\,x)_x = \frac{1}{cos\,x^2} = sec\,x^2, \quad \text{d. h.} \quad \partial y_x = 1 + y^2.$$

Daraus folgt

$$\partial^{n+1}y_x = \partial^n(1+y^2)_x = \partial^n(y^2)_x = \partial^n(y\cdot y)_x.$$

Nun wird für $x = 0$, auch $y = 0$, $\partial y_x = 1$ und $\partial^2 y_x = 0$; die Werthe $\partial^3 y_0 = \partial^2(y\cdot y)_0$, $\partial^4 y_0 = \partial^3(y\cdot y)_0$, $\partial^5 y_0 = \partial^4(y\cdot y)_0$, etc. etc. finden sich aber aus den Formeln ($\mathfrak{C}$.) oder $\odot$.), wenn man daselbst $\varphi = \psi = y$ nimmt und $x = 0$ setzt. — Es wird dann (aus $\mathfrak{C}$. oder $\odot$.)

$$\partial^3 y_0 = 2, \quad \partial^4 y_0 = \partial^6 y_0 = \partial^8 y_0 = \partial^{2\mu} y_0 = 0;$$

$$\partial^5 y_0 = 2\cdot 4\cdot\partial y_0\cdot\partial^3 y_0 = 16; \quad \partial^7 y_0 = 2\cdot 6\cdot\partial y_0\cdot\partial^5 y_0 + 20\cdot(\partial^3 y_0)^2;$$

u. s. w. f.;

---

*) Eigentlich ist nach N. 2.) dasjenige Glied von $\partial^n(\varphi\psi)_x$, welches die Faktoren $\partial^{n-r}\varphi_x$ und $\partial^r\psi_x$ bekommt, so: $n! \times \frac{\partial^{n-r}\varphi_x}{(n-r)!}\cdot\frac{\partial^r\psi_x}{r!}$. Weil aber (nach §. 37.) $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ nichts weiter ist als $\frac{n^{r|-1}}{r!}$ d. h. nichts weiter ist als der r^{te} Koefficient von der n^{ten} Potenz eines Binomiums, so ist die obige Behauptung richtig.

so daß die Ableitungen der ungeraden Ordnungen aus einander nach einem leicht zu übersehenden Gesetze gefunden werden, für den besondern Werth 0 von x.

Anmerkung 2. Setzt man in der vorstehenden Formel ⊙) $(x-\alpha)^m$ statt ψ, so wird $\partial\psi = m(x-\alpha)^{m-1}$; $\partial^2\psi = m^{2|-1}(x-\alpha)^{m-2}$; $\partial^3\psi = m^{3|-1}(x-\alpha)^{m-3}$; ... $\partial^r\psi = m^{r|-1}(x-\alpha)^{m-r}$ und $\partial^m\psi = m!$, dagegen $\partial^{m+1}\psi = \partial^{m+2}\psi =$ etc. etc. $= 0$. Ist daher $n > m$, so fallen aus der Formel ⊙) alle mit $\partial^{m+1}\psi$, $\partial^{m+2}\psi \cdots \partial^n\psi$ behafteten Glieder heraus, und sie bricht schon mit dem Gliede $n_m \cdot m!\partial^{n-m}\varphi$ ab, und dieses Glied ist zu gleicher Zeit das einzige, welches den Faktor $x-\alpha$ nicht hat; während $n_m \cdot m! = n^{m|-1}$ ist.

1) Für $x=\alpha$ und $n>m$ findet sich also

$$\partial^n((x-\alpha)^m \cdot \varphi_x)_x = n^{m|-1} \cdot \partial^{n-m}\varphi_\alpha,$$

wo $\partial^{n-m}\varphi_\alpha$ das bedeutet, was aus $\partial^{n-m}\varphi_x$ wird, wenn man α statt x setzt.

2) Für $x=\alpha$ und $n=m$ findet sich aus demselben Grunde

$$\partial^n((x-\alpha)^m \cdot \varphi_x)_x = m!\varphi_\alpha.$$

3) Für $x=\alpha$ und $n<m$ wird dagegen

$$\partial^m((x-\alpha)^m \cdot \varphi_x)_x = 0,$$

weil nun alle Glieder in der Entwicklung von $\partial^n(\varphi\psi)_x$ den Faktor $x-\alpha$ enthalten, also $=0$ werden, so oft $x=\alpha$ gesetzt wird.

§. 157bis.

Auf ganz ähnliche Weise kann man sich des Maclaurinschen Lehrsatzes bedienen, um in allen den Fällen, wo man f_x direkt und ohne Zuziehung desselben, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln sich im Stande sieht, den Werth von $\partial^n f_x$ für $x=0$ (also $\partial^n f_0$) direkt zu finden, ohne $\partial^n f_x$ selber vorher herstellen zu müssen. Ist nämlich

4) $f_x = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \cdots + B_n x^n + \cdots$, und vergleicht man diese Reihe mit der des §. 156. N. 3.), so findet sich

5) $$\frac{\partial^n f_0}{n!} = B_n; \quad \text{also} \quad \partial^n f_0 = n! B_n.$$

Beispiel 1. So hat man z. B. wenn $f_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist, nach dem binomischen Lehrsatze

$$f_x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^8 + \cdots + \frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}}x^{2\mu} + \cdots;$$

also ist (nach 5.)

$$\frac{\partial^n f_0}{n!} = 0, \text{ so oft } n \text{ ungerade ist,}$$

und

$$\frac{\partial^n f_0}{n!} = \frac{1^{\frac{1}{2}n|2}}{2^{\frac{1}{2}n|2}}, \text{ so oft } n \text{ gerade ist;}$$

oder es ist für jede positive ganze Zahl μ,

$$\partial^{2\mu+1} f_0 = 0 \quad \text{und} \quad \partial^{2\mu} f_0 = (2\mu)! \frac{1^{\mu|2}}{2^{\mu|2}} \;{}^{*)}.$$

Beispiel 2. So ist $\partial\left(\frac{1}{tg}x\right) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$;

also $$\partial^{n+1}\left(\frac{1}{tg}x\right)_x = \partial^n[(1+x^2)^{-1}]_x.$$

Weil aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} - \cdots$$

---

*) Weil $\partial\left(\frac{1}{sin}x\right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist, so ist $\partial^{n+1}\left(\frac{1}{sin}x\right)_x = \partial^n[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]_x$. Und da dies letztere für $x=0$ selbst der Null gleich wird, so oft n ungerade ($n+1$ gerade) ist, — so ist $\partial^{n+1}\left(\frac{1}{sin}x\right)_0 = 0$, so oft $n+1$ gerade ist. Und da $\partial^n[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]_0 = n!\frac{1^{\frac{1}{2}n|2}}{2^{\frac{1}{2}n|2}}$ wird, so oft n gerade, also $n+1$ ungerade ist, so ist $\partial^{n+1}\left(\frac{1}{sin}x\right)_0 = n!\frac{1^{\frac{1}{2}n|2}}{2^{\frac{1}{2}n|2}}$, so oft $n+1$ ungerade ist. Dadurch aber fällt das Gesetz der Entwickelung von $\frac{1}{sin}x$ (§. 156. Beispiel 3.) erst gehörig in die Augen.

ist, so hat man für $x=0$

$$\partial^{n+1}\left(\frac{1}{tg}x\right)_0 = 0, \text{ so oft } n+1 \text{ gerade}$$

und

$$\partial^{n+1}\left(\frac{1}{tg}x\right)_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n}\cdot n!, \text{ so oft } n+1 \text{ ungerade ist.}$$

Wollte man also z. B. $\frac{1}{tg}x$ mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln, so würde man sogleich finden

$$6)\qquad \frac{1}{tg}x = \frac{1}{tg}0 + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \cdots,$$

wo statt $\frac{1}{tg}0$ die Null, aber auch $n\pi$ gesetzt werden kann (nach §§. 78.—80), wenn n Null oder jede positive und auch jede negative ganze Zahl vorstellt. — Diese Reihe giebt also den Bogen $\frac{1}{tg}x$, so bald die Tangente dieses Bogens statt x gesetzt wird *).

§. 158.

Von der Entwickelung von f_{x+h} nach gebrochenen Potenzen von h, für diejenigen speciellen Werthe von x, für welche die Koefficienten der Taylor'schen Reihe die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, so daß eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe für f_{x+h} dasmal nicht existirt.

Wenn für einen speciellen Werth α von x sowohl f_x, als auch f_{x+h} einen reellen Werth haben, auch wenn h unend-

---

*) Dies giebt ein einfaches Mittel ab, die Zahl π noch auf einem anderen Wege zu berechnen, als solches im §. 59.) geschehen ist. Da nämlich $tg\,\frac{1}{4}\pi = 1$ ist, so setzt man in obige Formel 6.) 1 statt x, und man erhält

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \cdots.$$

Man kann aber zuerst einen Bogen z berechnen, dessen Tangente $=\frac{1}{2}$ ist; dies giebt (nach 6.)

$$z = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{512} - \tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{2048} + \cdots.$$

Hiernach berechnet man einen Bogen z' dessen Tangente $=\frac{1}{3}$ ist; man findet aus 6.)

$$z' = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{243} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{2187} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{19683} - \cdots.$$

Denn addirt man z und z' und man hat wiederum $\frac{1}{4}\pi$. — Denn es ist $tg(z+z') = \frac{tg\,z + tg\,z'}{1 - tg\,z\cdot tg\,z'} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$; folglich ist $z+z' = \frac{1}{4}\pi$. —

lich-klein gedacht wird, so läßt sich die Differenz $f_{x+h}-f_x$ (entweder gar nicht oder doch) nur nach positiven (ganzen oder gebrochenen) Potenzen von h in eine Reihe verwandeln, weil jede negative Potenz von h, z. B. h^{-2}, für $h=0$ ein Glied von der Form $\frac{1}{0}$ liefern würde, während $f_{x+h}-f_x$ in demselben Falle der Null gleich werden muß.

Findet man also für diesen bestimmten Werth α von x auf irgend einem Wege

(♂)··· $f_{x+h}-f_x = A_1\cdot h^{m_1}+A_2\cdot h^{m_2}+A_3\cdot h^{m_3}+A_4\cdot h^{m_4}+\cdots$

nach steigenden Potenzen von x geordnet, so daß wir

$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < \text{ etc. etc.}$$

voraussetzen; so ist $m_1 < 1$ oder $m_1 = 1$; denn zeigte sich der erste Exponent von h, >1, so könnte man das Glied $0\cdot h^1$ noch vorsetzen, so daß man doch wieder $m_1 = 1$ oder $A_1 = 0$ hätte; also kann man behaupten, daß m_1 nie >1 ist.

Setzt man nun $x+h$, oder vielmehr $\alpha+h$, $=z$, so wird, welche Funktion von z unter φ_z verstanden werden mag, weil $\partial z_h = 1$ ist (nach §. 150. I.)

(♀)··· $\partial(\varphi_z)_h = \partial\varphi_z$.

Die obige Gleichung (♂) wird nun (für $x=\alpha$)

1) $f_z - f_x = A_1\cdot h^{m_1}+A_2\cdot h^{m_2}+A_3\cdot h^{m_3}+A_4\cdot h^{m_4}+\cdots$

und giebt, wenn man von ihr hinter einander die Ableitungen nach h nimmt (nach ♀)

2) $\partial f_z = m_1 A_1\cdot h^{m_1-1}+m_2 A_2\cdot h^{m_2-1}+m_3 A_3\cdot h^{m_3-1}$
$\qquad +m_4 A_4\cdot h^{m_4-1}+\cdots;$

3) $\partial^2 f_z = m_1^{2|-1} A_1\cdot h^{m_1-2}+m_2^{2|-1} A_2\cdot h^{m_2-2}+$
$\qquad +m_3^{2|-1} A_3\cdot h^{m_3-2}+\cdots;$

4) $\partial^3 f_z = m_1^{3|-1} A_1\cdot h^{m_1-3}+m_2^{3|-1} A_2\cdot h^{m_2-3}$
$\qquad +m_3^{3|-1} A_3\cdot h^{m_3-3}+\cdots;$

u. s. w. f.; wo die Bezeichnung des §. 25.) gebraucht ist.

Man kann auch 3 Bogen z, z' und z'' berechnen, so daß $tg(z+z'+z'')=1$, also $z+z'+z''=\frac{1}{4}\pi$ wird. — U. s. f.

Wird man in allen diesen Gleichungen (2, 3, 4. etc. etc.) 0 (Null) statt h gesetzt, so erhält man zur Linken die Reihe von ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$ etc. etc. für $x = \alpha$, während das, was dieselben Gleichungen zur Rechten (für $h = 0$) liefern, diesen Werthen bezüglich gleich ist.

Ist nun $m_1 < 1$, so zeigt sich (aus 2.) bereits $\partial f_x = \frac{1}{0}$; ist aber $m_1 = 1$, so giebt dieselbe Gleichung 2.) $\partial f_x = A_1$. Also folgt:

I. „Nimmt ∂f_x für $x = \alpha$ noch nicht die Form $\frac{1}{0}$, sondern einen bestimmten Werth an, so ist das erste Glied der „Entwickelung von $f_{x+h} - f_x$ noch immer $= \partial f_x \cdot h$, wie solches „(nach §. 149. ⊙) der Fall ist, so oft x allgemein gedacht wird."

Ist aber $m_1 = 1$, so ist $m_2 > 1$ und entweder $m_2 < 2$ oder $m_2 = 2$; denn wäre der nächste Exponent von h, > 2, so würde man das Glied $0 \cdot h^2$ einschalten können, so daß man $m_2 = 2$ und $A_2 = 0$ hätte. — Ist aber $m_1 = 1$ und $m_2 < 2$, so giebt die Gleichung 3.), weil aus ihr das mit A_1 afficirte Glied herausgefallen ist (wegen $m_1 = 1$), wenn $h = 0$ gesetzt wird, $\partial^2 f_x = \frac{1}{0}$; ist aber $m_2 = 2$, so giebt dieselbe Gleichung jetzt $\partial^2 f_x = 2 \cdot A_2$, also $A_2 = \partial^2 f_x \cdot \frac{1}{2!}$

Daraus folgt:

II. „Nehmen ∂f_x und $\partial^2 f_x$ für $x = \alpha$ noch nicht die „Form $\frac{1}{0}$ sondern bestimmte Werthe an, so sind die beiden ersten „Glieder der Entwickelung von $f_{x+h} - f_x$, $= \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \frac{h^2}{2!}$, „also genau so, wie wenn x allgemein gedacht ist."

Ist $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, so ist $m_3 > 2$ und entweder < 3, oder $= 3$, weil im Nothfalle das Glied $0 \cdot h^3$ eingeschaltet gedacht werden kann. — Ist aber $m_3 < 3$, so giebt

die Gleichung 4.), wenn $h=0$ gesetzt wird, weil die mit A_1 und A_2 afficirten Glieder vorher schon herausgefallen sind, $\partial^3 f_x = \frac{1}{0}$; ist aber $m_3 = 3$, so giebt dieselbe Gleichung $\partial^3 f_x = 3!A_3$, also $A_3 = \partial^3 f_x \cdot \frac{1}{3!}$. — Daraus folgt:

III. „Nehmen ∂f_x, $\partial^2 f_x$ und $\partial^3 f_x$ für $x=\alpha$ noch nicht „die Form $\frac{1}{0}$ an, so sind die drei ersten Glieder der Entwicke„lung von $f_{x+h} - f_x$ genau dieselben, wie solche der Taylor'sche „Lehrsatz (§. 149. ☉) für jedes allgemeine x liefert."

Man kann aber so fortfahren und findet:

IV. „Wenn der Koefficient $\partial^{n+1} f_x$ der erste ist, welcher für „$x=\alpha$ keinen bestimmten Werth, sondern etwa die Form $\frac{1}{0}$ „annimmt, so hat die Entwickelung von $f_{x+h} - f_x$ für diesen „Werth $x=\alpha$, genau die Glieder der Taylor'schen Reihe „(§. 149. ☉) bis zu dem Gliede $\partial^n f_x \cdot \frac{h^n}{n!}$ einschließlich; das „nächste Glied der Entwickelung hat aber die erste gebrochene „Potenz h^μ, während μ zwischen n und $n+1$ liegen muß."

Beispiel 1. Es sey $f_x = x^4 + b\sqrt{x-\alpha}$, so ist $f_{x+h} = (x+h)^4 + b\sqrt{x-\alpha+h}$; also wird für $x=\alpha$

$$f_{x+h} - f_x = bh^{\frac{1}{2}} + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4;$$

und es nimmt auch bereits $\partial f_x = 4x^3 + \frac{b}{2\sqrt{x-\alpha}}$ für $x=\alpha$ die Form $\frac{1}{0}$ an.

Beispiel 2. Ist aber $f_x = x^4 + b(x-\alpha)^{\frac{7}{3}}$, so wird $f_{x+h} = (x+h)^4 + b(x-\alpha+h)^{\frac{7}{3}}$, und für $x=\alpha$ wird nun

$$f_{x+h} - f_x = 4x^3h + 6x^2h^2 + bh^{\frac{7}{3}} + 4xh^3 + h^4. —$$

Und in der That nimmt jetzt weder $\partial f_x = 4x^3 + \frac{7}{3}b(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}$ noch $\partial^2 f_x = 12x^2 + \frac{28}{9}b(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}$ für $x=\alpha$ den Werth $\frac{1}{0}$ an, sondern erst $\partial^3 f_x = 24x + \frac{28}{27} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{\frac{2}{3}}}$.

Beispiel 3. Hätte man $f_x = a \cdot sin(x-\alpha) + b \cdot log(x-\alpha)$ gehabt, so würde $f_{x+h} = a \cdot sin(x-\alpha+h) + b \cdot log(x-\alpha+h)$ und für $x=\alpha$, $f_{x+h} = a \cdot sin\, h + b \cdot log\, h$, und $f_x = b \cdot log\, 0$ geworden seyn. Dann aber hätte die Differenz $f_{x+h} - f_x$ für $x=\alpha$ bereits keinen bestimmten Werth mehr gehabt, weil $log\, 0$ das z ist, womit e potenzirt werden muß, damit $e^z = 0$ wird, ein solcher Ausdruck z aber, weder ein reeller noch ein imaginärer, nicht existirt. Hier also kann von der Entwickelung von $f_{x+h} - f_x$ für $x=\alpha$ nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von h, nicht weiter die Rede seyn.

Zweites

Zweites Kapitel.

Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes zur Vergleichung zusammengehöriger, besonders unendlich-kleiner Zuwachse. — Die Differential-Rechnung in ihren Elementen.

§. 159.

Wir setzen hier die Sätze vom Unendlich-Kleinen und von den verschiedenen Ordnungen desselben genau so voraus, wie wir solche im §. 50.) bereits hingestellt haben. — Diesen fügen wir jetzt die folgenden noch hinzu:

I. Wird eine Funktion f_x für zwei nächst auf einander folgende Werthe α und $\alpha+h$ von x, wo h unendlich-klein gedacht ist, der Null gleich, so ist nicht bloß $f_x=0$, sondern auch $\partial f_x=0$ für diesen Werth α von x, wenn derselbe nur nicht $\partial f_x=\frac{1}{0}$ macht.

Denn es ist nach der Voraussetzung, für $x=\alpha$, sowohl $f_x=0$, als auch $f_{x+h}=0$, daher nach dem Taylor'schen Lehrsatze, und in's Besondere nach §. 158.)

$$\partial f_x \cdot h + A \cdot h^{1+\mu} + \cdots = 0.$$

Daher ist auch (nach §. 50. N. 9.) $\partial f_x=0$ für $x=\alpha$, weil h unendlich-klein gedacht ist.

II. Wird aber eine Funktion f_x von x, für drei nächst auf einander folgende Werthe von x, nämlich für $x=\alpha$, $x=\alpha+h$ und $x=\alpha+mh$, wo h unendlich-klein gedacht wird, der Null gleich, so ist, nächst $f_x=0$, auch noch $\partial f_x=0$ und $\partial^2 f_x=0$, für $x=\alpha$; sobald nur nicht derselbe Werth $x=\alpha$ die Ableitungen ∂f_x und $\partial^2 f_x$ auf die Form $\frac{1}{0}$ bringt.

Denn es ist dann nicht bloß $f_x = 0$, sondern auch $f_{x+h} = 0$ und $f_{x+mh} = 0$, daher (nach §. 158.)

sowohl 1) $\partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + A \cdot h^{2+\mu} + \cdots = 0$

als auch 2) $\partial f_x \cdot mh + \partial^2 f_x \cdot \frac{m^2 h^2}{2!} + B \cdot h^{2+\mu} + \cdots = 0$;

also auch, wenn man aus letztern beiden Gleichungen ∂f_x dadurch eliminirt, daß man die erstere mit m multiplicirt und von der letztern subtrahirt,

3) $\partial^2 f_x \cdot (m^2 - m) \cdot \frac{h^2}{2!} + (B - mA) \cdot h^{2+\mu} + \cdots = 0$.

Aus 1.) und 3.) folgt aber nun (nach §. 50. N. 9.), weil h unendlich klein ist, daß auch $\partial f_x = 0$ und $\partial^2 f_x = 0$ seyn müsse, für den gedachten Werth α von x.

III. Diese Sätze N. 1.) und N. 2.) kann man beliebig erweitern, und zwar so: Ist f_x der Null gleich für n nächst auf einander folgende Werthe von x, deren einer α ist, während die übrigen durch $\alpha+h$, $\alpha+mh$, $\alpha+ph$, $\alpha+qh$ etc. etc. ausgedrückt sind und h unendlich-klein gedacht wird, so ist für diesen Werth α von x nicht bloß $f_x = 0$, sondern es werden auch noch (für denselben Werth α von x) die ersten n—1 Ableitungen ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, $\cdots$ $\partial^{n-1} f_x$ der Null gleich, wenn nur keine derselben für diesen Werth α von x die Form $\frac{1}{0}$ annimmt.

IV. Hat man eine Gleichung $f_{x,y} = 0$, welche für drei Paare an einander bezüglich nächst anliegender Werthe von x und y identisch wird, nämlich für $x = \alpha$, $y = \beta$; dann für $x = \alpha + h$, $y = \beta + k$; zuletzt für $x = \alpha + mh$, $y = \beta + nk$, während h unendlich-klein gedacht wird, so ist für diese Werthe α und β von x und y, nicht bloß $f_{x,y} = 0$, sondern auch noch $\partial f_x = 0$ und $\partial f_y = 0$.

Denn, entwickelt man $f_{x+h,y+k}$ und $f_{x+mh,y+nk}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze für zwei Veränderliche (§. 153. N. 1.) in Reihen, die nach h und k fortlaufen, und setzt man dabei überall ph statt k;

so erhält man für $x=\alpha$ und $y=\beta$, wenn alles nach Potenzen von h geordnet wird,

$$1)\qquad f_{x,y}=0$$

$$2)\quad (\partial f_x+\partial f_y\cdot p)\cdot h+(\partial^2 f_x+2\partial^{1,1} f_{x,y}\cdot p+\partial^2 f_y\cdot p^2)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots=0$$

$$3)\quad (\partial f_x\cdot m+\partial f_y\cdot np)\cdot h\qquad+\quad(\cdots)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots=0.$$

Daraus folgt wieder (nach §. 50. N. 9.)

4) $\partial f_x+\partial f_y\cdot p=0$ und 5) $m\cdot\partial f_x+n\cdot\partial f_y\cdot p=0$;

und aus diesen beiden letztern Gleichungen folgt wieder

6) $\partial f_x=0$ und $\partial f_y=0$ für $x=\alpha$ und $y=\beta$.

V. **Wenn man in einer Gleichung zwischen Unendlich-Kleinen verschiedener Ordnungen, alle Glieder der niedrigsten Ordnung allein behält, alle Glieder der höhern Ordnungen aber wegläßt, so ist die dadurch entstehende Gleichung allemal eine richtige.**

Denn, bringt man die Gleichung, wie sie gegeben ist, auf Null und ordnet man sie dabei nach den Unendlich-Kleinen in den verschiedenen Ordnungen, und ist die n^{te} Ordnung die niedrigste, so wird die Gleichung die Form annehmen

$$p\cdot z^n+q\cdot z^{n+1}+r\cdot z^{n+2}+\cdots=0,$$

wo $p\cdot z^n$ alle Glieder der niedrigsten n^{ten} Ordnung des Unendlich-Kleinen z in sich vereinigt. Nach §. 50. N. 9.) ist aber nun $p=0$.

VI. Hat man es also mit Gleichungen zwischen Unendlich-Kleinen zu thun, so kann man schon während des Aufbauens der Gleichungen, alle Glieder weglassen, welche das Unendlich-Kleine in einer höhern Ordnung enthalten würden, als diejenige ist, welche in der Gleichung schon vorkommt. Dadurch wird der Aufbau der Gleichungen ungemein erleichtert.

Es kann sich aber bei diesem Verfahren treffen, daß die so entstehende Gleichung identisch wird, d. h. daß sich diese Glieder der niedrigsten Ordnung alle von selber aufheben, das Resultat also zwar richtig ist, aber dem Zwecke nicht mehr entspricht. In diesem Falle muß man alle Glieder der nächst höhern Ordnung in die Gleichung mit aufnehmen, und so eine neue Gleichung sich bilden, welche vielleicht eine Bestimmungs-

Gleichung*) (§. 16.) ist, und deshalb das Verlangte leistet. — U. s. w. f.

§. 160.

I. Hat man zwischen f und x eine Gleichung, so daß f als eine Funktion f_x von x hergestellt werden kann; denkt man sich nun unter x und f zusammengehörige Werthe, die dieser Gleichung genügen; sind endlich andere zusammengehörige, dieser Gleichung genügende Werthe von x und f durch $x+\Delta x$ und $f+\Delta f$ bezeichnet, so hat man

1) $f = f_x$ und 2) $f+\Delta f = f_{x+\Delta x}$.

Wendet man auf den letztern Ausdruck den Taylor'schen Lehrsatz an (§. 149. ⊙), so giebt die Gleichung 2.) sogleich

$$3) \qquad \Delta f = \partial f_x \cdot \Delta x + \partial^2 f_x \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots.$$

Die durch Δx und Δf bezeichneten Ausdrücke sind die Differenzen zwischen den alten und neuen Werthen von bezüglich x und f und werden daher auch so genannt; dieselben heißen auch die Zuwachse (welche positiv, negativ, Null, ja selbst imaginär seyn können, und) welche die alten Werthe von x und f erlitten haben, als sie in die, durch $x+\Delta x$ und $f+\Delta f$ bezeichneten neuen (zusammengehörigen) Werthe übergegangen sind. — Die Gleichung 3.) zeigt also, wie die Differenzen Δx und Δf von einander abhängen. — Für gewisse Werthe von x kann aber die Entwickelung von Δf nach Potenzen von Δx (nach §. 158.) auch gebrochene Potenzen von Δx in sich aufnehmen.

---

*) Man vergesse hier nicht, daß (nach §. 16.) jede Gleichung dem Wesen nach eine identische ist, daß aber die Bestimmungs-Gleichung einen oder mehrere unbekannte, durch x, z etc. etc. bezeichnete Ausdrücke enthält, so daß sich in ihr erst dann alle Glieder gegenseitig wegheben würden, wenn man statt dieser Buchstaben x, z etc. etc. die Ausdrücke, welche sie gerade vorstellen, substituirte. — Deshalb gerade dienen diese Bestimmungs-Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten, einstweilen durch x, z etc. etc. bezeichneten Ausdrücke.

Denkt man sich aber Δx unendlich-klein von der 1ten Ordnung, so wird auch Δf unendlich-klein von der 1ten Ordnung (wie die Gleichung 3. zeigt, in Verbindung mit §. 50. N. 8.), so lange nicht $\partial f_x = 0$ wird, d. h. so lange x allgemein gedacht ist. Man bezeichnet nun dieselben zusammengehörigen Zuwachse Δx und Δf, wenn sie unendlich-klein gedacht werden, allemal bezüglich durch dx und df, und nennt sie dann nicht mehr Differenzen, sondern **Differentialien**. Weil aber, in so fern dx unendlich-klein ist, alle höhern Potenzen von dx gegen die niedrigern außer Acht gelassen werden müssen (nach §. 159. VI.), so geht die Gleichung 3.) nun über in

$$4) \quad df = \partial f_x \cdot dx \text{ *)}, \qquad \text{oder} \qquad 5) \quad \frac{df}{dx} = \partial f_x .$$

Diese Gleichung zeigt also, wie die zusammengehörigen Differenzialien (unendlich-kleinen Zuwachse) dx und df von einander abhängen. — Sie läßt zu gleicher Zeit sehen, daß man die **Ableitung** ∂f_x mit Recht auch (wegen 4.) einen **Differential-Koefficienten**, und ebenfalls mit Recht (wegen 5.) einen **Differential-Quotienten** nennen kann **).

Das Differenital df finden, wenn dx gegeben ist, heißt **differenziiren**. Weil man aber df sogleich hat (aus 4.),

---

*) Man unterscheide von nun an sorgfältig die (stehenden) d von den (runden) ∂. — Letzteres ist allemal ein **Operations-Zeichen**, wie das Multiplikations-, Divisions- oder Wurzel-Zeichen u. dergl.; ersteres (d) bedeutet dagegen an sich gar nichts, aber dz z. B. stellt einen unendlich-kleinen Zuwachs von z vor.

**) Sollte für einen besonderen Werth α von x die Ableitung ∂f_x die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, so wäre (nach §. 158.) $df = A \cdot (dx)^m$, wo $m < 1$ seyn muß; und A müßte für diesen (Ausnahms-) Werth von x, direkt gefunden werden. —

Gewöhnlich denkt man sich aber in allen Fällen unter df nicht den wirklichen Zuwachs von f, sondern die **Form** $\partial f_x \cdot dx$, so daß die Gleichung 5.) für **alle** Werthe von x beibehalten wird.

sobald ∂f_x gefunden ist, so besteht das Wesentlichste des Differenziirens im Auffinden der Ableitungen; und das ist der Grund, warum man das letztere Geschäft auch schon mit dem Namen des Differenziirens belegen kann und belegt.

§. 161.

Ist f eine Funktion von x und y, so kann f drei verschiedene Zuwachse erleiden; a) wenn x allein, b) wenn y allein, und c) wenn x und y zugleich wachsen.

Läßt man x allein um das unendlich-kleine dx wachsen, so wird der Zuwachs df von f aus der Gleichung

$$1) \qquad df = \partial f_x \cdot dx, \qquad \text{oder} \qquad \frac{df}{dx} = \partial f_x$$

gefunden (nach §. 160. N. 4.).

Läßt man y allein um das unendlich-kleine dy wachsen, so wird der zugehörige Zuwachs df (wo aber df jetzt eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Gleichung 1.) aus der Gleichung

$$2) \qquad df = \partial f_y \cdot dy \qquad \text{oder} \qquad \frac{df}{dx} = \partial f_y$$

gefunden.

Und wachsen x und y zugleich um bezüglich dx, dy, so giebt der Taylor'sche Lehrsatz für zwei Veränderliche (des §. 153.), wenn man dx statt h, und dy statt k setzt, auch die Glieder der zweiten und höhern Dimensionen von dx und dy, als Unendlich-Kleine höherer Ordnungen wegläßt, sogleich

$$3) \qquad df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy.$$

In jeder dieser drei Gleichungen (1.—3.) hat dasselbe Zeichen df jedesmal eine andere Bedeutung. Namentlich ist, wie man sieht, der in 3.) durch df bezeichnete unendlich-kleine Zuwachs genau die Summe der beiden verschiedenen Zuwachse, welche in den Gleichungen 1.) und 2.) jedesmal durch df ausgedrückt werden. — Deshalb nennt man die beiden df in 1.) und in

2.), welche man, um sie von einander zu unterscheiden, bezüglich so schreibt, nämlich $\frac{df}{dx}\cdot dx$ und $\frac{df}{dy}\cdot dy$, oder auch so, nämlich $\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx$ und $\left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy$, (welche man aber zweckmäßiger so schreiben würde, nämlich ∂f_x und ∂f_y) die **Theil-Zuwachse** oder **Partial-Differentialien** von f, während der Zuwachs df in 3.) das **totale Differential** von f genannt wird.

Wird also hier bloß df geschrieben, so versteht man das totale Differential von f in 3.) darunter. Die Gleichung 3.) kann man dann auch so schreiben:

$$df = \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy$$

oder

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy,$$

wo zur Rechten, der Nenner dx oder dy allemal erst die Bedeutung des Zeichens df im Zähler näher bezeichnet.

Anmerkung. Ist aber $f_{x,y} = 0$ vorausgesetzt, für alle zusammengehörigen Werthe von x und y, so ist auch $f_{x+dx,y+dy} = 0$, und demnach auch $df = 0$, d. h.

$$\partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy = 0.$$

§. 162.

Ist f eine Funktion dreier Veränderlichen, so ist das totale Differential df (welches man erhält, wenn x, y, z zugleich um bezüglich dx, dy, dz wachsen) allemal der Summe der drei Parzial-Differentialien gleich, welche man erhält, wenn x, oder y, oder z allein um bezüglich dx, dy oder dz wächst. Es ist nämlich (nach §. 153. N. 2.)

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz,$$

oder, nach der andern Schreibweise

$$df = \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy + \frac{df}{dz}\cdot dz,$$

oder

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy + \left(\frac{df}{dz}\right)\cdot dz.$$

Anmerkung 1. Ist aber $f_{x,y,z} = 0$ für alle zusammen gehörigen Werthe von x, y, z, also auch wenn $x+dx$, $y+dy$ und $z+dz$ gleichzeitig statt x, y, z gesetzt werden, so ist auch $df = 0$, d. h.

$$\partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz = 0.$$

Anmerkung 2. Diese Betrachtungen lassen sich auf Funktionen f von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen.

§. 163.

I. Ist f eine Funktion von x allein, also

$$df = \partial f_x \cdot dx,$$

so ist in dem Produkte $\partial f_x \cdot dx$, der Faktor dx nach x constant, dagegen ist der erste Faktor ∂f_x eine Funktion von x; folglich ist df mit f zugleich eine Funktion von x. Man kann daher wiederum nach dem zu dx gehörigen Differential von df d. h. nach d(df) oder d^2f fragen. Man findet dann aus §. 160. N. 4.), wenn daselbst df statt f gesetzt wird, $d^2f = \partial(df)_x \cdot dx$; nun ist aber $\partial(df)_x = \partial(\partial f_x \cdot dx)_x =$ (nach §. 150. B. 4) $dx \cdot \partial(\partial f_x)_x = \partial^2 f_x \cdot dx$;
folglich wird

$$1) \qquad d^2f = \partial^2 f_x \cdot dx^2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = \partial^2 f_x,$$

so daß man sieht, wie das **zweite Differential** d^2f (einer Funktion f von x) unendlich-klein von der zweiten Ordnung ist. — Und aus demselben Grunde, nämlich weil dx ein nach x constanter Faktor und d^2f eine Funktion von x ist, die in die N. 4. des §. 160.) statt f gesetzt werden kann, findet man noch

2) $d^3f = \partial^3 f_x \cdot dx^3$ oder $\frac{d^3f}{dx^3} = \partial^3 f_x$.

Und allgemein findet sich

3) $d^n f_x = \partial^n f_x \cdot dx^n$ oder $\frac{d^n f}{dx^n} = \partial^n f_x$,

so daß das n^t Differential von f unendlich-klein von der n^{ten} Ordnung ist.

II. Ist f noch immer eine Funktion von x, wird aber x selbst wieder als Funktion eines neuen Veränderlichen t gedacht, und wächst nun letzterer um ein unendlich-kleines dt, so werden x und f zugleich mit wachsen, so daß man (nach §. 160, N. 4.) hat

1) $dx = \partial x_t \cdot dt$ und 1′) $df = \partial f_{(t)} \cdot dt$.

Dadurch aber sind dx und df selbst wieder Funktionen von t, so daß man (wenn t auf's neue wächst um dt) die Zuwachse von dx und df, nämlich d^2x und d^2f nach I.) ausgedrückt hat durch

2) $d^2x = \partial^2 x_t \cdot dt^2$ und 2′) $d^2f = \partial^2 f_{(t)} \cdot dt^2$.

Und wächst t noch einmal, so erhält man (nach I.)

3) $d^3x = \partial^3 x_t \cdot dt^3$ und 3′) $d^3f = \partial^3 f_{(t)} \cdot dt^3$.

U. s. w. f.

Allein diese in 2′.), 3′.) durch d^2f, d^3f, etc. etc. bezeichneten zweiten, dritten und höhern Differentialien, in denen dt als constant, dx aber als mit t zugleich sich verändernd gedacht ist, sind ganz andere, als die in I.) durch dieselben Zeichen d^2f, d^3f, etc. ausgedrückten Differentialien, die in der Voraussetzung sich ergeben, daß dx constant gedacht ist.

Es ist nämlich nach den Gesetzen der Ableitungs-Rechnung (§. 150. B. I.)

1″) $\partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t$.

Substituirt man diesen Werth statt $\partial f_{(t)}$ in die Gleichung 1′.), so geht solche (wegen der 1.) in

$$1_1.)\qquad df = \partial f_x \cdot dx$$

über; also ist df in I.), und df hier, ein und dasselbe.

Nimmt man aber in 1''.) links und rechts noch einmal die Ableitungen nach allem t, so erhält man (nach §. 150. B. 2. und I.)

$$2''.)\qquad \partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x_t^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t.$$

Substituirt man diesen Werth in die 2'.), so giebt letztere (wegen der Gleichungen 1. und 2.)

$$2_1.)\qquad d^2 f = \partial^2 f_x \cdot dx^2 + \partial f_x \cdot d^2 x,$$

während das erste der beiden Glieder zur Rechten das ebenfalls durch d^2f bezeichnete zweite Differential von f ist in I.) d. h. unter der Voraussetzung genommen, daß x um dx, nicht aber dx selbst sich verändert.

Nimmt man von der Gleichung 2''.) wiederum die Ableitungen nach allem t, so findet man (nach §. 150. B. 1. 2. und I.)

$$3''.)\quad \partial^3 f_{(t)} = \partial^3 f_x \cdot \partial x_t^3 + 3\partial^2 f_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial f_x \cdot \partial^3 x_t.$$

Wird nun dieser Werth in 3'.) substituirt, so geht letztere Gleichung (wegen 1. und 2.) über in

$$3_1.)\quad d^3 f = \partial^3 f_x \cdot dx^3 + 3 \cdot \partial^2 f_x \cdot dx \cdot d^2 x + \partial f_x \cdot d^3 x,$$

während in dieser Gleichung das erste Glied zur Rechten das ebenfalls durch d^3f bezeichnete dritte Differential von f in I.), d. h. unter der Voraussetzung genommen ist, daß dx constant ist, d. h. daß bloß x allein um dx auf's neue wachsend gedacht ist. — U. s. w. f.

Um aber diese verschiedenen $\partial^2 f$, verschiedenen d^3f, u. s. w. f. nicht mit einander zu verwechseln, schreibt man statt der d^2f, d^3f etc. etc. in I.) lieber $\frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2$, $\frac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3$, etc. etc., so daß man an den Nennern, die deshalb immer stehen bleiben müssen, erst die Bedeutung der Zähler d^2f, d^3f, etc. erkennt. Die Gleichungen 1''.—3''. etc. etc.) können dann so aussehen:

1_2) $df = \frac{df}{dx} \cdot dx$;

2_2) $d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2x$;

3_2) $d^3f = \frac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3 + 3\frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx \cdot d^2x + \frac{df}{dx} \cdot d^3x$;

u. s. w. f.

Dabei sind, wie die Ansicht der Formeln lehrt, alle zweiten Differentialien Unendlich-Kleine der zweiten Ordnung; alle dritten Differentialien Unendlich-Kleine der dritten Ordnung; u. s. w. f.

§. 164.

I. Ist f eine Funktion von x und y, und wachsen x und y gleichzeitig um bezüglich dx und dy, so wird

1) $df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy.$

Wächst aber in df, welches nun eine Funktion von x und y ist, x und y auf's Neue um dx und dy, so erhält man abermals ein Differential von df, welches durch d^2f bezeichnet wird. Dieses d^2f findet sich aber, wenn man in 1.), df statt f setzt, und man hat daher

2) $d^2f = \partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2$,

welches auch so geschrieben wird (nach §. 163.)

$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx \cdot dy} \cdot dx \cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot dy^2 \; *).$$

*) Es ist nämlich

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial(\partial f_y)_x = \frac{d\left(\frac{df}{dy}\right)}{dx} = \partial(\partial f_x)_y = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dy};$$

und diese, wie Bruchsbrüche aussehenden Formen bezeichnet man lieber

Und weil dieses jetzige zweite Differential d^2f abermals eine Funktion von x und y ist, so erleidet d^2f einen neuen Zuwachs $d(d^2f)$, den man durch d^3f bezeichnet, wenn man x und y aufs Neue wachsen läßt um dx und dy, so daß dx und dy selbst allemal constant (nach x und y) bleiben. Dieser letztere findet sich, wenn man in 1.) d^2f statt f schreibt,

3) $d^3f =$

$$\partial^3 f_x \cdot dx^3 + 3\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot dx^2 \cdot dy + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy^2 + \partial^3 f_y \cdot dy^3,$$

welches man gewöhnlich so geschrieben findet

$d^3f =$

$$\frac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2 \cdot dy} \cdot dx^2 \cdot dy + 3\frac{d^3f}{dx \cdot dy^2} \cdot dx \cdot dy^2 + \frac{d^3f}{dy^3} \cdot dy^3,$$

wobei, aus der Vergleichung, die Bedeutung, in welcher die Zeichen $\frac{d^3f}{dx^2 \cdot dy}$ und $\frac{d^3f}{dx \cdot dy^2}$ genommen sind, unmittelbar in die Augen fällt.

II. Denkt man sich immer noch f als eine Funktion von x und y, welche bezüglich um dx und dy wachsen; denkt man sich aber dx, dy selbst wieder veränderlich und zwar so, daß x und y als Funktionen von t gedacht werden, während t um dt wächst, so daß eben dadurch x und y um dx und dy, letztere aber selbst wieder um d^2x und d^2y wachsen, so hat man, wenn die dadurch entstehenden ersten, zweiten, etc. etc. Zuwachse von f durch df, d^2f, etc. etc bezeichnet werden,

1) $$df = \partial f_{(t)} \cdot dt = (\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t) \cdot dt$$

oder

1') $$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy,$$

in so fern $dx = \partial x_t \cdot dt$ und $dy = \partial y_t \cdot dt$ ist.

Ferner hat man

$$d^2f = \partial^2 f_{(t)} \cdot dt,$$

---

durch $\frac{d^2f}{dx \cdot dy}$, obgleich dieses Zeichen ganz überflüssig ist, sobald man sich der Ableitungs-Zeichen (∂) bedient.

aber

$$\partial^2 f_{(t)} = \partial(\partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t)_t$$

d. h.

$$\partial^2 f_{(t)} =$$
$$\partial^2 f_x \cdot \partial x_t^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_t \cdot \partial y_t + \partial^2 f_y \cdot \partial y_t^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t + \partial f_y \cdot \partial^2 y_t;$$

folglich ist, wenn man diesen Werth in $d^2 f$ substituirt,

2) $d^2 f =$
$$\partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2 + \partial f_x \cdot d^2 x + \partial f_y \cdot d^2 y,$$

wo die drei ersten Glieder der Gleichung zur Rechten gerade das in I.) ebenfalls durch $d^2 f$ bezeichnete zweite Differential von f unter der Voraussetzung bilden, daß x und y zwar um dx und dy wachsen, letztere aber selbst unverändert bleiben. Diese Gleichung 2.) schreibt man aber auch häufig so:

2') $d^2 f =$
$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot dx^2 + 2\frac{d^2 f}{dx \cdot dy} \cdot dx \cdot dy + \frac{d^2 f}{dy^2} \cdot dy^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2 x + \frac{df}{dy} \cdot d^2 y.$$

U. s. w. f.

Anmerkung. Dasselbe kann man natürlich auf Funktionen f von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen.

§. 165.

Es finden aber die Formeln §. 164. II. 2. etc. etc.) auch dann noch statt, wenn x und y Funktionen nicht bloß von t allein, sondern von t, u, v, etc. etc. sind, und dadurch um dx, dy wachsen, daß t, u, v, etc. etc. gleichzeitig um dt, du, dv, etc. etc. sich verändern, wenn nur $d^2 f$, $d^3 f$, etc. etc. die totalen Zuwachse vorstellen, welche f, df, etc. etc. durch jedes neue Anwachsen von t, u, v, etc. etc. erleiden.

Dieses Allgemeinere der Differential-Rechnung sieht man aber am bequemsten ein, wenn man für die Differentialien ähn-

liche Sätze hinstellt, wie sie im §. 150. B.) für die Ableitungen hingestellt worden sind, weil man dann die Differentialien aus einander gerade so finden kann und nach ganz analogen Gesetzen, wie man dort die Ableitungen auseinander gefunden hat.

Diese Sätze sind folgende:

Wie und durch welche Veranlassung die beiden Veränderlichen φ und ψ nur immer die unendlich-kleinen Zuwachse $d\varphi$ und $d\psi$ erlangt haben mögen, so ist doch immer

1) wenn $f = \varphi \pm \psi$, dann $df = d\varphi \pm d\psi$,

2) wenn $f = \varphi \cdot \psi$, dann $df = \psi \cdot d\varphi + \varphi \cdot d\psi$,

3) wenn $f = \frac{\varphi}{\psi}$, dann $df = \frac{\psi \cdot d\varphi - \varphi \cdot d\psi}{\psi^2}$,

sobald nur jedesmal unter df der unendlich-kleine Zuwachs verstanden wird, den f durch diese Zuwachse $d\varphi$ und $d\psi$ von φ und ψ erleidet.

Denn es ist im Falle der N. 1.)

$$f + df = (\varphi + d\varphi) \pm (\psi + d\psi) \quad \text{und} \quad f = \varphi \pm \psi;$$

diese beiden Gleichungen von einander subtrahirt, geben aber die N. 1.).

Im Falle der N. 2.) hat man, außer $f = \varphi \cdot \psi$, noch

$$f + df = (\varphi + d\varphi) \cdot (\psi + d\psi) = \varphi\psi + \psi \cdot d\varphi + \varphi \cdot d\psi + d\varphi \cdot d\psi.$$

Subtrahirt man aber die vorige Gleichung von dieser, und bedenkt man, daß $d\varphi \cdot d\psi$ unendlich-klein von der zweiten Ordnung ist, daher nach §. 159. VI.) weggelassen werden muß, augenblicklich die N. 2.).

Ist aber wie in N. 3.) $f = \frac{\varphi}{\psi}$, so ist $f \cdot \psi = \varphi$, also nach N. 2.)

$$\psi \cdot df + f \cdot d\psi = d\varphi.$$

Setzt man nun hier $\frac{\varphi}{\psi}$ statt f, und findet man dann aus der Gleichung den Unbekannten df auf algebraischem Wege, so hat man die N. 3.).

Wendet man z. B. diese Sätze auf die Gleichung

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy$$

an, welche man dadurch erhalten hat, daß f als eine Function von x und y angesehen worden ist, während x und y bezüglich um dx und dy wachsen, — und setzt man dabei voraus, daß

irgend eine Veranlassung gleichzeitig x und y um dx und dy, letztere selbst aber wieder um d^2x und d^2y wachsen macht, so erhält man, wenn d^2f den dadurch sich ergebenden Zuwachs von df vorstellt, vermöge des Satzes N. 1.) zunächst

$$d^2f = d(\partial f_x \cdot dx) + d(\partial f_y \cdot dy);$$

dann aber, vermöge des Satzes N. 2.),

$$d^2f = d(\partial f_x) \cdot dx + \partial f_x \cdot d^2x + d(\partial f_y) \cdot dy + \partial f_y \cdot d^2y.$$

Nun ist aber, weil ∂f_x und ∂f_y wiederum Funktionen von x und y sind (nach dem Satze §. 161.)

$$d(\partial f_x) = \partial(\partial f_x)_x \cdot dx + \partial(\partial f_x)_y \cdot dy$$

und

$$d(\partial f_y) = \partial(\partial f_y)_x \cdot dx + \partial(\partial f_y)_y \cdot dy.$$

Substituirt man daher diese Werthe in die vorstehende Gleichung, so erhält man

$$d^2f =$$

$$\partial^2 f_x \cdot dx^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy + \partial^2 f_y \cdot dy^2 + \partial f_x \cdot d^2x + \partial f_y \cdot d^2y,$$

ganz so, wie solches im §. 164. II.) für den besonderen Fall gefunden worden ist, daß die Zuwachse d^2x und d^2y ihr Entstehen dem besonderen Umstande verdanken, daß x und y Funktionen von t sind, während t selbst um dt wächst.

Aus diesem allgemeinsten Gesichtspunkte, aus dem wir hier (in diesem Paragraphen) die Differential-Rechnung betrachten, kann man aber in allen vorhergehenden Paragraphen die zweiten und höhern Differentialien für jede besondere Annahme unmittelbar aus einander, d. h. also, alle unmittelbar aus dem ersten Differential erhalten, indem man die Nummern 1.—3.) dieses Paragraphen unmittelbar in Anwendung bringt.

Anmerkung. In allen Resultaten der Differential-Rechnung aber, wo gar keine Ableitungs-Zeichen (∂) gebraucht sind, stehen die einzelnen dx, dy, df, etc. etc. statt der unendlich-kleinen Zuwachse; dagegen sind die Formen

$$\frac{df}{dx},\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2f}{dx^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2f}{dx \cdot dy},\quad \frac{d^3f}{dx^2 \cdot dy},\ \text{etc. etc.}$$

völlig gleichbedeutend mit den Funktionen

$$\partial f_x,\quad \partial y_x,\quad \partial^2 f_x,\quad \partial^2 y_x,\quad \partial^{1+1} f_{x,y},\quad \partial^{2+1} f_{x,y},\ \text{etc. etc.}$$

so daß diese Quotienten-Formen gleichsam Operations-Zeichen werden, nämlich gleichbedeutend mit dem Operations-Zeichen d.

IV.

IV.

Erste Reihe

der

Anwendungen der höhern Analysis*).

*) Diese Anwendungen kann man auch überschlagen und sogleich zur nächsten Abtheilung (womit der 2te Band dieses Werkes beginnt) nämlich zur Integral-Rechnung weiter gehen.



Erstes Kapitel.

Bestimmung der $\frac{0}{0}$, der größten und kleinsten, und der Grenz-Werthe.

§. 166.

Bestimmung der $\frac{0}{0}$ Werthe.

I. Nimmt eine Funktion f_x für irgend einen bestimmten Werth a von x die Form $\frac{0}{0}$ an, so kann dies davon herrühren, daß f die Form $\frac{P_x}{Q_x}$ hat, und daß P_x und Q_x (ganze oder gebrochene) positive Potenzen von $x-a$ zu Faktoren haben, so daß also f_x die Form

$$f_x = \frac{P_x}{Q_x} = \frac{(x-a)^\mu \cdot \varphi_x}{(x-a)^\nu \cdot \psi_x}$$

hat.

Kann man nun diese Faktoren im Dividenden und Divisor wirklich herausfinden, so ist für $x=a$,

1) $f_x = 0$, wenn $\mu > \nu$,

2) $f_x = \frac{1}{0}$, d. h. eine im Kalkul nicht weiter zulässige Form, wenn $\mu < \nu$,

und

3) $f_x = \frac{\varphi_a}{\psi_a}$, wenn $\mu = \nu$;

weil die Form $\frac{0}{0}$ gar nicht entstanden seyn würde, wenn man

nicht unterlassen hätte, die Funktion f_x vorher, ehe man x= [illegible] setzte, auf ihre einfachste Form zu bringen.

Es entsteht nun die Frage, wenn bloß P_x und Q_x gegeben sind, — wie kann man diese Werthe (in 1.–3.) finden? —

Dies geschieht aber auf folgende Weise: man setzt zuerst $a+h$ statt x, so daß $x-a=h$ wird.

Dann erhält man

$$4) \qquad f_{a+h}=\frac{P_{a+h}}{Q_{a+h}}.$$

Nun entwickelt man P_{a+h} und Q_{a+h} in, nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen von h fortlaufende Reihen, so wird sich bei der erstern ein Faktor h^μ, bei der andern dagegen ein Faktor h^ν herausrücken lassen, wo μ und ν positive und entweder ganze oder gebrochene Zahlen sind. Dividirt man nun die gemeinschaftlichen Faktoren h^μ und h^ν im Dividenden und Divisor, soweit es geht, fort, so darf man zuletzt nur noch 0 statt h setzen, um den wahren Werth f_a d. h. den wahren Werth von f_x für $x=a$ zu haben.

So oft aber P_{a+h} und Q_{a+h} nach ganzen Potenzen von h entwickelt werden können, so oft hat man, weil der Voraussetzung zu Folge $P_a=Q_a=0$ wird, nach dem Taylor'schen Satze

$$5) \qquad f_{a+h}=\frac{\partial P_a\cdot h+\frac{1}{2}\partial^2P_a\cdot h^2+\frac{1}{6}\partial^3P_a\cdot h^3+\cdots}{\partial Q_a\cdot h+\frac{1}{2}\partial^2Q_a\cdot h^2+\frac{1}{6}\partial^3Q_a\cdot h^3+\cdots}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch h weg, und setzt man dann 0 statt h, so hat man

$$6) \qquad f_a=\frac{\partial P_a}{\partial Q_a}.$$

Sollte aber wiederum $\partial P_a=\partial Q_a=0$ seyn, so würde man (in 5.) Zähler und Nenner durch $\frac{1}{2}h^2$ wegdividiren können und man würde dann für $h=0$ erhalten

$$7) \qquad f_a=\frac{\partial^2P_a}{\partial^2Q_a}.$$

Ist noch immer $\partial^2 P_a = 0$ und auch $\partial^2 Q_a = 0$, so findet sich

8) $$f_a = \frac{\partial^3 P_a}{\partial^3 Q_a}.$$

u. s. w. f.

Nimmt aber irgend einer dieser Differential-Koefficienten von P_x, oder von Q_x, für $x = a$ die Form $\frac{1}{0}$ an, so ist dies ein Zeichen, daß P_{a+h}, oder Q_{a+h}, gebrochene Potenzen von h in sich aufnimmt, und dann muß die Entwickelung in Reihen direkt statt finden.

Nachstehende Beispiele werden dies näher erörtern.

Beispiel 1. Man soll den Werth von $\frac{a^n - x^n}{a^m - x^m}$ für $x = a$ finden. — Hier ist $P = a^n - x^n$, $Q = a^m - x^m$; also $\partial P_x = -nx^{n-1}$, $\partial Q_x = -mx^{m-1}$; also ist der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_a}{\partial Q_a} = \frac{-na^{n-1}}{-ma^{m-1}} = \frac{n}{m} a^{n-m} = \frac{n}{ma^{m-n}}.$$

Beispiel 2. Den Werth von $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ für $x = 1$ zu berechnen. — Hier ist $\partial P_x = nx^{n-1}$, $\partial Q_x = 1$; also der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_1}{\partial Q_1} = \frac{n}{1} = n \text{ *)}.$$

Beispiel 3. Den Werth $\frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ für $x = c$ zu bestimmen. — Man hat hier

$$\partial P_x = 2ax - 2ac; \quad \partial Q_x = 2bx - 2bc;$$

und es wird $\partial P_c = \partial Q_c = 0$; also nimmt man noch

$$\partial^2 P_x = 2a \quad \text{und} \quad \partial^2 Q_x = 2b$$

und hat nun den gesuchten Werth

---

*) Es ist

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1;$$

dieser Ausdruck zur Rechten nimmt aber für $x = 1$ sogleich den Werth n an.

$$= \frac{\partial^2 P_e}{\partial^2 Q_e} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} \text{ *)}.$$

Beispiel 4. Man soll den Werth von $\frac{a^x - b^x}{log(1-x)}$ für $x = 0$ bestimmen. — Hier hat man

$$\partial P_x = a^x \cdot log\, a - b^x \cdot log\, b; \quad \partial Q_x = -\frac{1}{1-x}.$$

Also ist der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_0}{\partial Q_0} = \frac{log\, a - log\, b}{-1} = log\, \frac{b}{a} \text{ **)}.$$

Beispiel 5. Man soll den Werth $\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$ finden für $x = a$. — Hier ist

$$\partial P_x = 3x^2 - 2ax - a^2; \quad \partial Q_x = 2x.$$

Also ist der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_a}{\partial Q_a} = \frac{0}{2a} = 0.$$

Beispiel 6. Man soll den Werth von $\frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}$ für $x = a$ finden. — Dasmal ist

$$\partial P_x = a - 2x; \quad \partial Q_x = -2a^3 + 6ax^2 - 4x^3;$$

und daher wird der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_a}{\partial Q_a} = \frac{-a}{0} \text{ ***)};$$

und dies ist eine im Kalkul unzulässige Form, mit welcher nicht weiter gerechnet werden kann.

Beispiel 7. Den Werth von $(1-x) \cdot tg\, \frac{1}{2}\pi x$ zu berechnen, wenn

---

*) In der That haben Zähler und Nenner der gegebenen Funktion den gemeinschaftlichen Faktor $(x-e)^2$.

**) Setzt man statt a^x und b^x die nach x fortlaufenden Reihen, so wie auch die Reihe statt $log(1-x)$ (nach §. 91. und §. 67.), so kann man mit x Zähler und Nenner sogleich wegdividiren, und man erhält dann dasselbe Resultat (für $x = 0$) ohne Weiteres.

***) Man kann Zähler und Nenner dieser Funktion durch $a - x$ wegdividiren. Dann erhält man (für $x = a$) dasselbe Resultat sogleich, ohne vorher $\frac{0}{0}$ zu erhalten.

$x = 1$ ist. — Man schreibt die gegebene Funktion so: $\frac{1-x}{cotg\,\frac{1}{2}\pi x}$; hat dann

$$P = 1 - x \quad \text{und} \quad Q = cotg\,\tfrac{1}{2}\pi x;$$

also

$$\partial P_x = -1 \quad \text{und} \quad \partial Q_x = -\frac{\frac{1}{2}\pi}{(sin\,\frac{1}{2}\pi x)^2};$$

und so findet sich der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_1}{\partial Q_1} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}\pi} = +\frac{2}{\pi}.$$

Beispiel 8. Den Werth von $\frac{1 - sin\,x + cos\,x}{sin\,x + cos\,x}$ für $x = \frac{1}{2}\pi$ zu finden. — Hier hat man

$$\partial P_x = -cos\,x - sin\,x; \quad \partial Q_x = cos\,x - sin\,x;$$

folglich ist der gesuchte Werth

$$= \frac{-1}{-1} = +1.$$

Beispiel 9. Den Werth von $\frac{sin\,x - x \cdot cos\,x}{(sin\,x)^3}$ zu finden, für $x = 0$. — Man hat hier

$$\partial P_x = x \cdot sin\,x; \quad \partial Q_x = 3(sin\,x)^2 \cdot cos\,x.$$

Also wird der gesuchte Werth

$$= \frac{\partial P_x}{\partial Q_x} = \frac{x}{3 sin\,x \cdot cos\,x} = \frac{2x}{3 sin\,2x} \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Da aber dieser Ausdruck für $x = 0$ wiederum die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so muß man entweder sogleich $\partial^2 P_x$ und $\partial^2 Q_x$ und $\frac{\partial^2 P_x}{\partial^2 Q_x}$ für $x = 0$ nehmen; oder man kann auch, zur Abwechselung, das neue Problem sich stellen, nämlich: den Werth von $\frac{2x}{3 sin\,2x}$ zu finden für $x = 0$. Für diese neue Aufgabe hat man nun $P = 2x$, $Q = 3 sin\,2x$;

also $\quad \partial P_x = 2 \quad$ und $\quad \partial Q_x = 6 cos\,2x$;

also wird der gesuchte Werth

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 10. Man suche noch die Werthe von

1) $tg\,2x \cdot cotg(\frac{1}{4}\pi + x)$ für $x = \frac{1}{4}\pi$;

2) $\frac{a - x - a \cdot log\,a + a \cdot log\,x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$ für $x = a$;

3) $\frac{sin(\alpha + \beta) \cdot sin(\alpha + x) - sin\,\beta \cdot sin\,x}{sin(\alpha + \beta + x)}$ für $x = \pi - \alpha - \beta$;

4) $\frac{x^2-x}{1-x+\log x}$ für $x=1$;

5) $\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}$ d. h. von $\frac{x-1-\log x}{(x-1)\cdot\log x}$ für $x=1$;

6) $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$ d. h. von $\frac{-1+x}{1-x^2}$ für $x=1$;

und man wird solche bezüglich $=\frac{1}{2}$, ∓ 1, $\sin\alpha$, -2, $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ finden.

Beispiel 11. Soll man den Werth von

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$$

für $x=a$ unter der Voraussetzung finden, daß statt der Wurzeln ihr positiven Werthe gesetzt werden (denn nur in diesem Falle nimmt er die Form $\frac{0}{0}$ an), so müßte man bis zu $\partial^4 P_x$ und $\partial^4 Q_x$ fortgehen, weil alle vorhergehenden Ableitungen von P und Q für $x=a$ noch immer der Null gleich werden.

Setzt man aber lieber, ohne die Ableitungs- oder Differential-Rechnung anzuwenden, sogleich $a+h$ statt x, so erhält man

$$\frac{2a^3+2a^2h-ah^2+h^3-2a^2\sqrt{a^2+2ah}}{-2a^2+h^2+2a\sqrt{a^2-h^2}}.$$

Entwickelt man nun hier beide Quadrat-Wurzeln, in so fern man beziehlich $(a^2+2ah)^{\frac{1}{2}}$ und $(a^2-h^2)^{\frac{1}{2}}$ dafür schreibt, mittelst des binomischen Lehrsatzes nach Potenzen von h, so läßt sich Zähler und Nenner mit h^2 wegdividiren; und setzt man dann erst 0 statt h, so erhält man den gesuchten Werth $=-5a$.

Beispiel 12. Soll der Werth von $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}$ d. h. von $\frac{x\cdot\log x-x+1}{(x-1)\cdot\log x}$ für $x=1$ gefunden werden, und setzt man hier sogleich $1+h$ statt x, so giebt diese Funktion den Werth

$$\frac{(1+h)\cdot\log(1+h)-h}{h\cdot\log(1+h)}$$

oder, wenn man statt $\log(1+h)$ die Reihe (aus §. 67.) schreibt,

$$\frac{(1+h)[h-\frac{1}{2}h^2+\cdots]-h}{h(h-\frac{1}{2}h^2+\cdots)}.$$

Ordnet man hier Zähler und Nenner nach h, so kann man mit h^2 wegdividiren, ehe man $h=0$ setzt; und man erhält dann den gesuchten Werth $=\frac{1}{2}$.

Beispiel 13. Soll der Werth von

$$\frac{(x-y)a^n-(a-y)x^n+(a-x)y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)}$$

gefunden werden für $x=y=a$, so setze man zuerst $a+h$ statt x, und man erhält, wenn der Zähler und der Nenner durch h wegdividirt und dann 0 statt h gesetzt wird,

$$\frac{a^n-(a-y)na^{n-1}-y^n}{-(a-y)^2}$$

als Werth der gegebenen Funktion für $x=a$. Nun sucht man noch (auf demselben Wege) den Werth dieser letzten Funktion y für $y=a$; und man findet zuletzt solchen $=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

Beispiel 14. Soll der wahre Werth von $\frac{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}{(x-a)\sqrt{x-a}}$ gefunden werden, für $x=a$; und setzt man direkt $a+h$ statt x, so erhält man zunächst

$$\frac{(2ah+h^2)\sqrt{2ah+h^2}}{h\cdot\sqrt{h}} \quad \text{oder} \quad (2a+h)\sqrt{2a+h},$$

welcher für $h=0$ unmittelbar in $2a\sqrt{2a}$ übergeht.

Beispiel 15. Löst man die kubische Gleichung

$$az^3+bz^2+cz+d=0$$

auf, so findet man für z einen dreideutigen Ausdruck. Für $a=0$ wird nun einer der drei Werthe von z die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, welches anzeigt, daß dieser Werth jetzt gar nicht mehr existirt. Die beiden andern Werthe von z dagegen nehmen (für $a=0$) die Form $\frac{0}{0}$ an, und wenn man den wahren Werth derselben als Funktionen von a für $a=0$ sucht, so findet man genau die beiden Werthe von z, welche aus $bx^2+cx+d=0$ hervorgehen.

II. Ist y durch die Gleichung $\varphi_{x,y}=0$ gegeben, und hat man letztere nach allem x differenziirt, um aus

$$\partial\varphi_x+\partial\varphi_y\cdot\partial y_x=0$$

den Werth von ∂y_x für $x=a$ zu erhalten, und nimmt dann solcher Werth die Form $\frac{0}{0}$ an, weil $\partial\varphi_y=0$ wird, — so darf man nur dieselbe Gleichung noch einmal differenziiren und man erhält

$$\partial^2\varphi_x+2\partial^{1,1}\varphi_{x,y}\cdot\partial y_x+\partial^2\varphi_y\cdot\partial y_x^2+\partial\varphi_y\cdot\partial^2 y_x=0.$$

In dieser Gleichung fällt nun für $x=a$, weil dann der Voraussetzung zufolge $\partial\varphi_y=0$ wird, das letzte, mit $\partial^2 y_x$ afficirte Glied

heraus, so daß aus dieser Gleichung nun ∂y_x für $x = a$ gefunden werden kann.

Ist z. B. gegeben die Gleichung

1) $(y-b)^2-(x-a)^2(x-c)=0$,

so erhält man durch das Differenziiren derselben

2) $2(y-b)\partial y_x - 2(x-a)(x-c)-(x-a)^2=0$.

Soll nun hieraus der Werth von ∂y_x für $x=a$ gefunden werden, so giebt die 1.) $y=b$ dazu, und die 2.) giebt dann $\partial y_x = \frac{0}{0}$. Differenziirt man daher letztere auf's Neue, so erhält man

3) $2(y-b)\partial^2 y_x + 2\partial y_x^2 - 2(x-c)-4(x-a)=0$,

und diese Gleichung giebt für $x=a$, weil dann $y=b$ ist, augenblicklich

$$\partial y_x^2-(a-c)=0, \quad \text{oder} \quad \partial y_x=\sqrt{a-c}.$$

Würde ∂y_x noch einmal die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so müßte man die Differential-Gleichung noch einmal differenziiren. U. s. w. f. — Und dann gelingt diese Methode nicht allemal, wenn man nicht vorher aus der Gleichung $\varphi_{x,y}=0$ alle Wurzeln weggeschafft hat, weil außerdem sehr leicht die Koefficienten von ∂y_x, für $x=a$ die Form $\frac{1}{0}$ annehmen können.

§. 167.

Von den größten und kleinsten Werthen gegebener Funktionen.

I. Alles was wir im §. 58.) über den Gang der reellen Werthe von f_x gesagt haben für den Fall, daß f_x eine rationale ganze Funktion von x ist, kann hier für jede beliebige Funktion wiederholt werden und bitten wir unsere geneigten Leser, jenes nachzulesen und hier eingeschaltet zu denken.

Namentlich also: wenn für irgend einen Werth von x, $\partial f_x=0$ und $\partial^2 f_x \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ wird, so ist für denselben Werth von x, f_x selbst ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$, wie auch die Funktion f_x beschaffen seyn mag.

Weil aber das Daseyn eines größten oder kleinsten Werthes von f_x davon abhängt, ob f_x größer als beide durch f_{x+h} und f_{x-h} vorgestellten nächsten Nachbarwerthe von f_x, oder kleiner als beide ist, während h unendlich-klein gedacht wird; und weil, wenn f_x keine rationale ganze, sondern eine beliebige Funktion von x ist, die Entwickelung von $f_{x\pm h}$ nicht allemal nach ganzen Potenzen von h fortläuft, sondern gerade für den Werth a von x, für welchen f_x ein Maximum oder Minimum ist, gebrochene Potenzen von h in sich aufnehmen könnte, — so wird man diesen Fall hier noch besonders betrachten müssen.

Ist nämlich f_x für $x = a$ wirklich ein Maximum oder ein Minimum, — enthält dabei $f_{a\pm h}$ wirklich gebrochene Potenzen von h, und ist h^μ die erste gebrochene Potenz, welche in der nach steigenden Potenzen von h geordneten Reihe für $f_{a\pm h}$ vorkommt, so ist entweder $\mu > 1$ oder $\mu < 1$. Ist $\mu > 1$, so ist (nach §. 158.) noch immer

$$f_{x\pm h} = f_x \pm \partial f_x \cdot h + \left\{\begin{matrix}\text{die folgenden Glieder mit}\\ \text{höhern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}.$$

Daher findet die Schlußweise des §. 58.) noch immer statt, und es muß also noch immer $\partial f_x = 0$ seyn, im Falle daß f_x ein Maximum oder ein Minimum ist. — Ist aber $\mu < 1$, so wird (nach §. 158.) schon $\partial f_x = \frac{1}{0}$ für $x = a$.

Will man also keinen der Werthe von x, für welchen f_x ein Maximum oder Minimum wird, vernachlässigen, so muß man sie nicht bloß aus der Gleichung $\partial f_x = 0$, sondern auch aus der Gleichung $\frac{1}{\partial f_x} = 0$ herholen.

Man setzt also $\partial f_x = 0$, findet daraus die Werthe von x, welche $\partial f_x = 0$ machen, und prüft jeden derselben, ob $f_{x\pm h} - f_x$ jedesmal positiv oder jedesmal negativ ist, wenn h unendlich-klein gedacht wird. — Dann aber setzt man auch

$\frac{1}{\partial f_x}=0$, oder den Nenner von $\partial f_x=0$; findet die Werthe von x, welche aus dieser Gleichung hervorgehen, und prüft dann auch jeden von diesen letztern Werthen, ob für ihn $f_{x\pm h}-f_x$ jedesmal positiv oder jedesmal negativ wird.

Beispiel 1. Es seyen die Werthe von x zu finden, welche $x^{\frac43}(a-x)^{\frac25}$ zu einem Maximum oder Minimum machen.

Hier ist

$$f_x=x^{\frac43}(a-x)^{\frac25},$$

also

$$\partial f_x=\frac{2(10a-13x)x^{\frac13}}{15(a-x)^{\frac35}}.$$

Setzt man nun $\partial f_x=0$, so giebt dies

$$x^{\frac13}(10a-13x)=0,$$

so daß man für x zwei Werthe bekommt, nämlich

$$x=0 \qquad \text{und} \qquad x=\frac{10}{13}a.$$

Prüft man nun die Differenz $f_{x\pm h}-f_x$ für $x=0$, so findet man

$$f_{0+h}-f_0=h^{\frac43}(a-h)^{\frac25};$$

und diese Differenz wird offenbar jedesmal positiv, man mag h positiv oder negativ nehmen. Also ist f_x für $x=0$ ein Minimum.

Prüft man aber dieselbe Differenz $f_{x\pm h}-f_x$ für $x=\frac{10}{13}a$, so wird man dasmal, weil nun f_{x+h} keine gebrochene Potenz von h in sich aufnimmt, besser thun, den Werth $\partial^2 f_x$ zu berechnen und zu sehen, ob solcher für $x=\frac{10}{13}a$ positiv oder negativ wird.

Man findet aber, wenn φ und ψ Zähler und Nenner von ∂f_x bezeichnen

$$\partial^2 f_x=\frac{\psi\cdot\partial\varphi_x-\varphi\cdot\partial\psi_x}{\psi^2}, \qquad \text{also} \qquad =\frac{\partial\varphi_x}{\psi}$$

sobald man nur $\partial^2 f_x$ für diejenigen Werthe von x haben will, welche $\varphi=0$ machen, oder welche aus $\varphi=0$ hervorgehen. So findet sich für unser Beispiel sogleich $\partial^2 f_x=\frac{2(10a-52x)}{45x^{\frac23}(a-x)^{\frac35}}$ *).

*) Auf diesen kleinen Kunstgriff, wodurch man sich die Herstellung

Und weil dieser Ausdruck für $x=\frac{10}{13}a$ negativ wird, so hat f_x für denselben Werth von x einen größten Werth; d. h. f_x ist für $x=\frac{10}{13}a$ ein Maximum.

Zuletzt muß man aber auch noch $\partial f_x=\frac{1}{0}$ d. h. $\frac{1}{\partial f_x}=0$ setzen; d. h. den Nenner von ∂f_x der Null gleich nehmen. Dies giebt

$$x=a.$$

Setzt man nun $a+h$ statt x, so erhält man

$$f_{a+h}=(a+h)^{\frac{4}{5}}\cdot h^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{4}{5}}h^{\frac{2}{5}}+\tfrac{4}{5}a^{\frac{1}{5}}h^{\frac{7}{5}}+\cdots;$$

und weil $f_a=0$ wird, so ändert dasmal $f_{a+h}-f_a$ sein Vorzeichen nicht, man mag h positiv oder negativ nehmen; diese Differenz ist, wenn nur h unendlich-klein gedacht wird, allemal positiv; folglich ist f_x für $x=a$ nochmal ein Minimum.

Diese Funktion f_x oder $x^{\frac{4}{5}}(a-x)^{\frac{2}{5}}$, ist also für recht große negative Werthe von x positiv und recht groß, und ihr Werth wird immer kleiner, je näher diese negativen Werthe von x nach der Null hin rücken; endlich, für $x=0$, hat f_x einen kleinsten Werth und zwar den Werth Null erreicht, und für die nun folgenden positiven Werthe von x fangen die Werthe von f_x wieder an zu wachsen, bis f_x für $x=\frac{10}{13}a$ einen größten Werth angenommen hat; so daß von da an ihre Werthe wieder abnehmen, für die noch größern Werthe von x. Endlich für $x=a$ hat f_x wiederum einen kleinsten Werth, der $=0$ ist, angenommen, um von da ab mit x zugleich immer fort und ohne Ende zu wachsen.

Beispiel 2. Sind die Werthe von x zu suchen, für welche die durch die Gleichung

$$1)\qquad y^2-2mxy+x^2-a^2=0$$

gegebene Funktion y von x größte oder kleinste Werthe hat, so findet man, durch differenziiren

$$2)\qquad y\cdot\partial y_x-mx\cdot\partial y_x-my+x=0$$

oder

$$3)\qquad \partial y_x=\frac{my-x}{y-mx}.$$

---

des vollständigen $\partial^2 f_x$ erspart, und welcher allemal angewandt werden kann, so oft f_x die Form $\frac{\varphi}{\psi}$ oder die Form $\varphi\cdot\psi$ hat, machen wir die Anfänger noch besonders aufmerksam.

Setzt man nun $\partial y_x = 0$, so giebt dies

$$4)\qquad my - x = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{m}x,$$

und die Gleichungen 1.) und 4.) geben nun

$$5)\qquad x = \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Um nun zu sehen, ob dieser Werth von x die Funktion y zu einem Maximo oder Minimo macht, berechnet man $\partial^2 y_x$, jedoch für diesen Werth von x, welcher den Zähler von ∂y_x, und ∂y_x selbst der Null gleich macht. Derselbe reducirt $\partial^2 y_x$ auf

$$-\frac{1}{y-mx}, \quad \text{d. h. auf} \quad -\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}}.$$

Also ist y ein Maximum für $x = \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$, so oft die Wurzel $\sqrt{1-m^2}$ positiv genommen wird, dagegen ist y ein Minimum für den andern negativen Werth von x, wo statt der Wurzel ihr negativer Werth genommen ist.

Endlich giebt die Gleichung $\frac{1}{\partial y_x} = 0$, noch

$$6)\qquad y = mx.$$

Die 1.) und 6.) geben nun

$$7)\qquad x = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Setzt man nun hier, um diesen Werth von x zu prüfen, $x+h$ statt x, und $y+k$ statt y in die Gleichung 1.), indem man sich unter x und y die so eben (in 7.) gefundenen Werthe denkt, welche die Gleichung 1.) identisch machen, so erhält man zur Bestimmung des, zu dem Zuwachs h von x gehörigen Zuwachses k von y, die Gleichung

$$k^2 + 2(y-mx)k - 2mhk - 2(my-x)h + h^2 = 0;$$

oder, wenn man statt x und y ihre Werthe (aus 7.) setzt,

$$k^2 - 2mhk = -2a\sqrt{1-m^2}\cdot h - h^2;$$

woraus

$$k = mh \pm \sqrt{-2a\sqrt{1-m^2}\cdot h - (1-m^2)h^2}$$

hervorgeht. Und da dieser Werth k, für h positiv und unendlich-klein, imaginär wird (so oft $\sqrt{1-m^2}$ positiv genommen ist) und nur für h negativ reelle Werthe annimmt, so macht dieser Werth von x die Funktion y weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum, sondern es hat y für diesen Werth von x einen Grenz-Werth, so daß sie (so lange $\sqrt{1-m^2}$ positiv gedacht wird) für kleinere Werthe von x noch reell, für größere Werthe von x aber imaginär wird.

Denkt man sich aber $\sqrt{1-m^2}$ negativ genommen, so wird y auch negativ, und dieser Werth ist dann wieder ein Grenz-Werth, wie ebenfalls in dem Vorstehenden in die Augen fällt.

Man kann auch sagen, daß f_x allemal ein Maximum oder ein Minimum ist, für jeden Werth von x, für welchen ∂f_x im Begriff ist vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven über zu gehen; folglich, wenn $\partial f_x = 0$ oder $= \frac{1}{0}$ ist. — So lange nämlich ∂f_x positiv ist, so lange ist f_x im Wachsen begriffen, und so wie ∂f_x negativ wird, so ist f_x im Abnehmen; in dem Momente also, wo ∂f_x nicht positiv und nicht negativ, nächst vorher aber positiv und nächst nachher negativ, oder nächst vorher negativ, nächst nachher aber positiv ist, — in demselben Momente muß die Funktion vom Abnehmen zum Wachsen oder vom Wachsen zum Abnehmen übergehen, also ein Maximum oder ein Minimum seyn.

Diese letztere Betrachtung macht sogar jede frühere Theorie überflüssig, weil sie für sich allein völlig evident ist.

II. Was aber die Auffindung der Werthe von x und von y betrifft, für welche eine Funktion $f_{x,y}$ zweier Veränderlichen ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf alle anderen nächst anliegenden Werthe von f, welche für beliebige und unabhängig von einander gedachte nächst größere und nächst kleinere Werthe von x und von y hervorgehen, — so darf man zunächst nur genau das wiederholen, was im §. 61.) hierüber für Doppel-Reihen, also auch für ganze rationale Funktionen zweier Veränderlichen gesagt ist. Namentlich muß man also aus den Gleichungen

1) $\partial f_x = 0$ und 2) $\partial f_y = 0$

die Werthe von x und y finden, und für jedes zusammengehörige Paar untersuchen, ob

3) $\partial^2 f_x \cdot \partial^2 f_y > (\partial^{1,1} f_{x,y})^2$

ist. Ist diese Bedingung 3.) erfüllt, und ist dann noch für dieselben Werthe von x und y, $\partial^2 f_x$ oder $\partial^2 f_y$ negativ, so ist f

ein Maximum, während f ein Minimum ist, wenn neben der vorstehenden 3.) noch $\partial^2 f_x$ oder $\partial^2 f_y$ positiv seyn sollte. Und ist die Bedingung 3.) gar nicht erfüllt, so findet dasmal weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Denkt man sich drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ, und x und y als die mit OX und OY parallel genommenen Koordinaten-Werthe, so kann man sich $f_{x,y}$ als die dritte, auf den beiden andern x und y senkrechte Ordinate denken; dann bilden die End-Punkte aller dieser Ordinaten f eine krumme Fläche; und die hier gefundenen Werthe von x und y geben die Fußpunkte in der Koordinaten-Ebene XOY, über welchen die Ordinate f größer ist, oder kleiner ist, als alle rings herum ihr nächstanliegenden Ordinaten.

Wollte man die Stellen finden der krummen Fläche, deren Ordinate bloß größer ist, als die beiden nächstanliegenden, die mit ihr in einer, mit XOZ parallelen Ebene liegen, und zu gleicher Zeit größer als die beiden in der mit YOZ parallelen Ebene ihr nächst anliegenden Ordinaten, so würde man (nach I.) zur Erfüllung der erstern Bedingung

$$\partial f_x = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial^2 f_x \text{ negativ},$$

zur Erfüllung der andern Bedingung aber

$$\partial f_y = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial^2 f_y \text{ negativ}$$

erhalten, so daß man die Werthe von x und y, welche hier gesucht werden, wiederum aus den Gleichungen 1.) und 2.) herholen muß, dagegen die Bedingung 3.) nicht erfüllt zu seyn braucht. — Findet sich für ein Paar der aus 1.) und 2.) entnommenen Werthe von x und y, die Bedingung 3.) nicht erfüllt, dagegen zu gleicher Zeit $\partial^2 f_x$ und $\partial^2 f_y$ positiv, so ist die Ordinate f kleiner als diese vier ihr nächst anliegenden Ordinaten; in Bezug auf diese vier Ordinaten ist also dann f ein Minimum.

Und findet sich für ein Paar aus 1.) und 2.) sich ergebender Werthe von x und y, gleichzeitig $\partial^2 f_x$ negativ, aber $\partial^2 f_y$ positiv, so ist f in Bezug auf die beiden nächst anliegenden mit XOZ parallelen Ordinaten ein Maximum, zu gleicher Zeit aber in Bezug auf die beiden andern nächst anliegenden, mit YOZ parallelen Ordinaten ein Minimum.

Um aber kein Paar der Werthe von x und y zu verlieren, für welche f in einer, oder der andern, oder der übrigen Beziehungen ein Maximum oder ein Minimum werden kann, muß man außer den Gleichungen 1.) und 2.) auch noch abwechselnd die Paare von Gleichungen

$$1_2) \qquad \partial f_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2_2) \qquad \partial f_y = \frac{1}{0},$$

$$1_3)\quad \partial f_x = \frac{1}{0} \quad \text{und} \quad 2_3)\quad \partial f_y = 0,$$

endlich

$$1_4)\quad \partial f_x = \frac{1}{0} \quad \text{und} \quad 2_4)\quad \partial f_y = \frac{1}{0}$$

vornehmen, aus ihnen x und y finden, und dann jedes Paar solcher Werthe z. B. $x=\alpha$, $y=\beta$, dadurch prüfen (ob es in dem verlangten Sinne f zu einem Maximo oder Minimo macht), daß man $\alpha+ph$ statt x, und $\beta+qh$ statt y gleichzeitig setzt, und nun $f_{\alpha+ph,\beta+qh}$ in eine nach ganzen und gebrochenen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickelt, dann aber zusieht, ob $f_{\alpha+ph,\beta+qh}-f_{\alpha,\beta}$ entweder für jedes p und für jedes q immerfort positiv oder immerfort negativ bleibt, oder nur, wenn $q=0$ und p beliebig, und zugleich wenn $p=0$ aber q beliebig ist.

Anmerkung. Da wir später (im zweiten Bande) zu der (allgemeinsten) Lehre vom Größten und Kleinsten noch einmal zurückkehren müssen, so wollen wir hier vorläufig nichts weiter mehr hinzufügen.

§. 168.

Bestimmung der Grenz-Werthe und der absolut größten oder kleinsten Werthe einer Funktion.

Die Auffindung der relativen Maxima und Minima (nach §. 167. I.) dient übrigens auch dazu, die absolut größten und absolut kleinsten (reellen) Werthe einer Funktion f_x zu finden. Der absolut größte oder absolut kleinste Werth einer Funktion ist nämlich entweder ein Werth, wo die Funktion vom reellen zum imaginären übergeht, d. h. ein Grenz-Werth, oder er ist einer von den relativ größten oder kleinsten Werthen. Hat man daher alle Grenz-Werthe und alle relativ größten oder kleinsten Werthe (letztere nach §. 167. I.) gefunden, so ist der absolut größte oder kleinste Werth nothwendig darunter.

Es ist aber f_x für $x=a$ ein Grenz-Werth, wenn

f_{a+h} reell, f_{a-h} dagegen imaginär, oder wenn der letztere Werth reell, der erstere dagegen imaginär ist, immer unter der Voraussetzung, daß h unendlich-klein gedacht wird. Läßt sich aber f_{a+h} in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln, so ist allemal f_{a-h} mit f_{a+h} zugleich reell; folglich muß f_{a+h} auch gebrochene Potenzen von h in sich aufnehmen, wenn f_a ein Grenz-Werth seyn soll. Also findet man (nach §. 158.) alle Werthe a von x, für welche f_x ein Grenz-Werth wird, wenn man nach und nach

$$\partial f_x = \frac{1}{0}, \text{ dann auch } \partial^2 f_x = \frac{1}{0}, \text{ hernach } \partial^3 f_x = \frac{1}{0} \text{ etc. etc.}$$

setzt, aus jeder dieser Gleichungen die ihr genügenden Werthe von x findet, und dann jeden einzelnen dieser Werthe prüft, ob er f_x wirklich zu einem Grenz-Werthe mache oder nicht.

Ist z. B.

$$f_x = b + cx + gx^2 + (2ax - x^2)^{\frac{5}{2}},$$

so hat man

$$\partial f_x = c + 2gx + 5(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}(a - x),$$

$$\partial^2 f_x = 2g - 5(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} + 15(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}(a - x)^2,$$

$$\partial^3 f_x = -45(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}(a - x) + 15\frac{(a - x)^3}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

und die folgenden Ableitungen $\partial^4 f_x$, $\partial^5 f_x$ etc. etc. behalten Potenzen von $(2ax - x^2)$ im Nenner. Die Gleichungen $\partial f_x = \frac{1}{0}$, $\partial^2 f_x = \frac{1}{0}$ geben dasmal nichts; die Gleichungen $\partial^3 f_x = \frac{1}{0}$, $\partial^4 f_x = \frac{1}{0}$ etc. etc. geben aber alle ein und dasselbe, nämlich

$$2ax - x^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = 2a.$$

Setzt man nun $0 + h$ statt x in f_x, so findet man

$$f_{0+h} = b + ch + gh^2 + (2ah - h^2)^{\frac{5}{2}};$$

und dies ist reell für h positiv, aber imaginär für h negativ. — Setzt man dagegen $2a + h$ statt x, so ergiebt sich

$$f_{2a+h} = b + c(2a + h) + g(2a + h)^2 + (2a + h)^{\frac{5}{2}}(-h)^{\frac{5}{2}},$$

welches imaginär ist für h positiv, aber reell, so oft h negativ (übrigens aber immer unendlich-klein) genommen wird *).

§. 169.

Bestimmung der Werthe von f_x für $x = \infty$.

Ist x unendlich-groß, so ist $\frac{1}{x}$ unendlich-klein. Soll daher der Werth von f_x bestimmt werden, für x unendlich-groß, so darf man nur $\frac{1}{x} = z$, oder $x = \frac{1}{z}$ setzen, die neue Funktion von z nach Potenzen von z ordnen (welches direkt, aber auch mit Anwendung des Maclaurin'schen Lehrsatzes geschehen kann) und dann z unendlich-klein, d. h., in der Rechnung, der Null gleich nehmen.

Es kann jedoch Fälle geben (namentlich wenn in der Funktion Logarithmen vorkommen), in welchen dieses Verfahren nicht zum Ziele führt, und wo man noch einige Kunstgriffe anwenden, namentlich vorher den Logarithmen entfernen muß.

Soll z. B. der Werth von $\frac{\log x}{x^n}$ für $x = \infty$ gefunden werden, so kann man

$$\log x = y, \qquad \text{also} \qquad x = e^y$$

setzen, und man erhält (nach §. 64.)

$$\frac{\log x}{x^n} = \frac{y}{e^{ny}} = \frac{y}{1 + ny + \frac{1}{2}n^2y^2 + \frac{1}{6}n^3y^3 + \cdots}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch y dividirt,

$$\frac{\log x}{x^n} = \frac{1}{\frac{1}{y} + n + \frac{1}{2}n^2y + \frac{1}{6}n^3y^2 + \cdots};$$

und da dieser Nenner für $y = \infty$ selbst unendlich-groß wird, so oft n

*) Da übrigens, wie man sieht, die Grenz-Werthe nach einer ganz andern Methode gefunden werden, als die Maxima und Minima, so können wir es nicht billigen, daß manche Schriftsteller dieselben mit dem Namen der einseitigen Maxima oder Minima belegen.

positiv ist, so folgt, daß der Werth von $\frac{\log x}{x^n}$ für $x = \infty$ der N
gleich wird, so oft n, wenn auch noch so klein (aber nicht unendli
klein) und positiv ist.

Ist aber n negativ und $= -m$, so ist $\frac{\log x}{x^n} = x^m \cdot \log x$
her unendlich-groß für $x = \infty$.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differential-Rechnung auf ebene Kurven. — Bestimmung des unendlich kleinen Zuwachses des Bogens und des Flächen-Inhaltes derselben in die Koordinaten ausgedrückt. — Von den Osculationen und Berührungen der Kurven unter sich und mit geraden Linien. — Von den Vielfachen-, Wende-, Rückkehr- und Einzel-Punkten einer Kurve.

Vorerinnerung.

Obgleich eine krumme Linie stetig gekrümmt ist, so kann man sich doch selbige (nach Leibnitz) auch denken als aus unendlich-vielen, unendlich-kleinen Geraden zusammengesetzt, also gleichsam als eine gebrochene Linie, aber von unendlich-vielen Ecken. Diese letztere Ansicht fällt noch überdieß mit der erstern (welche die Kurven als stetig gekrümmt erkennt) nicht bloß annähernd, sondern genau zusammen; welche Wahrheit in die Augen fällt, sobald man nur das Unendlich-Kleine von dem Sehr-Kleinen gehörig zu unterscheiden nicht unterläßt (vgl. sorgfältig §. 50.). — In den hier folgenden Untersuchungen werden wir beide Ansichten parallel mit einander halten, um in folgenden Kapiteln, wenn wieder von Kurven die Rede ist, der größern Bequemlichkeit wegen, bloß diejenige wählen zu können, welche für den augenblicklichen Zweck als die bequemste erscheint.

§. 170.

Begriff der Osculation und des Berührens und Schneidens zweier ebenen Kurven nach Leibnitzischer Ansicht. Geradlinige Tangente und Krümmungs-Kreis.

I. Nach der Leibnitzischen Ansicht der Kurven, haben zwei Kurven eine Osculation der n^{ten} Ordnung, wenn sie n nächst-aufeinander folgende ihrer unendlich-kleinen geradlinigen Elementchen mit einander gemein haben. Diese Osculation wird allemal entweder ein Berühren oder ein Schneiden genannt, je nachdem die den gemeinschaftlichen Elementen auf beiden Seiten nächst anliegenden Elemente der einen Kurve auf einer und

derselben Seite, oder auf den verschiedenen Seiten der andern Kurve liegen *).

Nach dieser Leibnitzischen Ansicht kann also auch eine gerade Linie mit einer Kurve eine Osculation haben, welche ebenfalls entweder ein Berühren oder ein Schneiden seyn wird, je nachdem die Kurve auf beiden Seiten des gemeinschaftlichen Elementes diesseits der Geraden bleibt, oder so eben von der einen Seite der Geraden zu der andern übergeht. In diesem letztern Falle sagt man: die Kurve habe an dieser Stelle einen Wendepunkt. — Diese osculirende Gerade nennt man jedoch gewöhnlich die Tangente oder Berührungs-Linie der Kurve an dieser Stelle, (obgleich sie im Falle eines gerade vorhandenen Wendepunktes die Kurve nicht berührt, sondern schneidet).

II. Ist nun OMU (Fig. 18.) irgend eine Kurve, welche durch irgend eine Gleichung zwischen den auf OX und OY bezogenen Koordinaten-Werthen x und y gegeben ist, und soll nach Leibnitz die Lage der geradlinigen Tangente TMt an irgend einem Punkte M gefunden werden, so betrachtet man das unendlich-kleine Element MN der Kurve, dessen Verlängerung die gedachte Tangente TMt ist, zieht die Ordinaten MP und NR, legt durch M mit OX die Parallele MS, welche NR in S trifft, bezeichnet MS durch dx, also NS durch dy, nennt PT die Subtangente, und hat aus den beiden ähnlichen Dreiecken MPT und NSM die Proportion

$$NS:MS = MP:PT$$

d. h.

$$dy:dx = y:PT;$$

also

$$1) \qquad \textit{Subtg.}\,PT = y\cdot\frac{dx}{dy} = y\cdot\partial x_y = \frac{y}{\partial y_x} \text{ **)}.$$

---

*) Es versteht sich von selbst, daß zwei Kurven sich an einer Stelle schneiden können, ohne an dieser Stelle überhaupt eine Osculation zu haben.

**) Es ist nämlich nach §. 160.), wenn man x als Funktion von y ansieht

Gewöhnlich zieht man noch MW senkrecht auf die Tangente MT, nennt MW die Normale und PW die Subnormale, und hat dann zur Bestimmung der letztern die Proportion

$$PW:PM = PM:PT$$

oder

$$PW:y = y:\frac{y}{\partial y_x},$$

woraus

2) $$Subnorm.\ PW = y \cdot \partial y_x$$

folgt.

Nennt man φ den Winkel PTM, der von TX nach TM hin von 0 bis zu 180° gezählt wird, so findet man sogleich und augenblicklich

3) $$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \partial y_x,$$

wo φ spitz ist, wenn dy, d. h. wenn ∂y_x positiv wird, während φ sich stumpf ausweist, wenn dy, d. h. wenn ∂y_x negativ wird *).

Sind x′ und y′ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes μ der Tangente TMt, so giebt die Betrachtung der Figur augenblicklich

$$\frac{y'-y}{x'-x} = tg\,\varphi = \partial y_x$$

oder

4) $$y'-y = \partial y_x \cdot (x'-x).$$

$$dx = \partial x_y \cdot dy;$$

oder, wenn man y als Funktion von x betrachtet,

$$dy = \partial y_x \cdot dx,$$

so daß also, weil y und ∂y_x gegebene oder leicht zu findende Funktionen von x sind, die Subtangente PT bloß in die Abscisse x ausgedrückt sich sieht.

*) Wollte man die Benennung Subtangente und deren Auffindung ganz unberücksichtigt lassen, so würde der Winkel MTP oder φ ebenfalls alles leisten, was zur geometrischen Bestimmung der Lage der geradlinigen Tangente tMT nur immer nöthig ist.

Diese Gleichung giebt zu jedem Abscissen-Werthe x' den zug
hörigen Ordinaten-Werth y' eines Punktes μ der Tangent
alles in x ausgedrückt, während x den bestimmten Abscis
Werth des Punktes M vorstellt, an welchem TMt Tange
wird. Diese Gleichung 4.) heißt daher „die Gleichung d
Tangente“.

Sind x'' und y'' die Koordinaten-Werthe eines beliebig
Punktes ν der (auf der Tangente jedesmal senkrechten) No
male MW, so ist die Gleichung zwischen x'' und y'' (na
§. 121. VI. und wegen der vorstehenden 4.) die nachstehende

$$5) \qquad y''-y=-\frac{1}{\partial y_x}\cdot(x''-x);$$

und diese heißt die „Gleichung der Normale.“ Sie gibt
zu jedem beliebigen Abscissen-Werthe x'' den zugehörigen Ordi
naten-Werth y'' eines Punktes ν der Normale.

Als hierhergehörige Beispiele kann man die Auffindung der Tange
ten an die Kegelschnitte (in den §.§. 130.—132.) auf dem hiesigen allg
meinen, für alle ebenen Kurven geltenden Wege noch einmal vornehmen.

III. Nach der geradlinigen Tangente an eine Kurv
sucht man gewöhnlich den osculirenden Kreis. — Hat derselb
nur ein einziges der geradlinigen Elementchen mit der Kurv
gemein, d. h. hat er bloß eine Osculation der ersten Ordnung
so heißt er der berührende Kreis. Für jede Stelle der Kurv
finden unendlich viele berührende Kreise statt, weil das Element
chen gleichsam zwei Punkte angiebt, durch welche die Kreislini
gelegt werden soll, — durch zwei Punkte aber unendlich viel
Kreise gehen. Alle diese berührenden Kreise haben ihre Mittel
punkte in der, auf das Elementchen senkrechten Geraden, d. h
in der Normale der Kurve an dieser Stelle, während die Radien
derselben, von Null an alle verschiedenen positiven Werthe an
nehmen, bis in's Unendliche.

Soll aber der osculirende Kreis zwei nächst auf einander
folgende Elementchen mit der Kurve gemein, folglich eine Oscu
lation der zweiten Ordnung haben, so wird er der Krüm

mungs-Kreis genannt. Da für ihn zwei Elemente, also gewissermaßen drei Punkte der Kurve gegeben sind, und da drei Punkte eine Kreislinie völlig bestimmen, so folgt, daß an jeder gegebenen Stelle M (Fig. 18.) einer Kurve nur ein einziger Krümmungs-Kreis existirt, dessen Mittelpunkt, da er einer der unendlich vielen berührenden Kreise ist, ebenfalls in der Normale MW der Kurve liegt. Und weil man (nach dieser Leibnitzischen Ansicht) diese Lage des Mittelpunktes schon kennt, so kommt alles nur noch darauf an: den Halbmesser dieses Kreises, welcher der Krümmungshalbmesser genannt wird, in den Abscissen-Werth x der Stelle M, wo die Osculation statt finden soll, auszudrücken.

Dies kann nun nach Leibnitzischen Begriffen auf folgende Art geschehen: Sind (Fig. 29.) MN und NP zwei nächst auf einander folgende geradlinige Elementchen der Kurve, und ist C der Mittelpunkt des Krümmungskreises, so ist CM = CN der gesuchte Krümmungshalbmesser, den wir durch c bezeichnen wollen. Denkt man sich CM senkrecht auf die Tangente MN, und CN senkrecht auf die Tangente NP, so ist Winkel RNP = Winkel MCN, und diesen wollen wir, im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, durch δ bezeichnen. — Er wird der Berührungs-Winkel genannt, und ist immer unendlich-klein. — Ist nun Bogen AM = s, so ist, wenn die Abscissen-Werthe der Punkte M und N bezüglich durch x und x + dx ausgedrückt werden, offenbar Bogen AMN durch s + ds ausgedrückt. Wird ferner Winkel NMTX durch φ bezeichnet, so ist offenbar Winkel PNT'X durch $\varphi + d\varphi$ auszudrücken, während (nach §. 160.)

1) $dy = \partial y_x \cdot dx, \quad ds = \partial s_x \cdot dx \quad$ und $\quad d\varphi = \partial \varphi_x \cdot dx$

gefunden und jeder dieser unendlich-kleinen Zuwachse dy, ds, $d\varphi$ danach berechnet wird.

Da nun MN oder ds die Hypothenuse ist des rechtwinklichen Dreiecks, dessen eine Kathete dx, die andere dy ist, so hat man sogleich

2) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$$

und, weil (nach der Figur) δ = W. MTX — W. NTX ist,

3) $$\delta = -d\varphi = -\partial\varphi_x \cdot dx;$$

auch (nach II. N. 3.)

4) $$tg\,\varphi = \partial y_x, \quad \text{und} \quad cos\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\partial y_x^2}};$$

also, wenn man diese Gleichung 4.) nach x differenziirt

5) $$\frac{\partial\varphi_x}{cos\,\varphi^2} = \partial^2 y_x, \quad \text{oder} \quad \partial\varphi_x = \frac{\partial^2 y_x}{1+\partial y_x^2},$$

weshalb (aus 3.)

6) $$\delta = -\frac{\partial^2 y_x}{1+\partial y_x^2} \cdot dx$$

wird. Im Kreise hat man aber, weil δ der Bogen für den Radius 1, und ds (oder MN) der Bogen für den Radius c ist, bei einem und demselben Centriwinkel MCN,

7) $$c \cdot \delta = ds \quad \text{oder} \quad c = \frac{ds}{\delta};$$

also ist der Krümmungshalbmesser

8) $$c = -\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x},$$

wo ∂y_x, $\partial^2 y_x$ aus dem gegebenen y_x gefunden werden, während statt x derjenige bestimmte Abscissen-Werth gesetzt wird, welcher dem Punkte M entspricht, für welchen der Krümmungs-Kreis gesucht wird. — Endlich kann man aus der Formel 8.) das (—) Zeichen ganz weglassen, da der Zähler doch zweideutig ist, c selbst aber immer positiv werden muß, so daß man das Zeichen des Zählers anders nehmen muß, je nachdem der Nenner $\partial^2 y_x$ einen positiven oder einen negativen Werth annimmt.

Denkt man sich x als Funktion von y, so zeigt sich (nach §. 155.)

9) $$c = \frac{(1+\partial x_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y}.$$

Und denkt man sich x und y als Funktionen eines dritten Veränderlichen t, so findet sich (nach §. 155.)

$$10)\qquad c = \frac{(\partial x_t^2 + \partial y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}.$$

IV. Sollen endlich zwei beliebige Kurven, deren eine durch den Ordinaten-Werth y_x, die andere durch den Ordinaten-Werth y'_x gegeben ist, während statt x nach und nach alle verschiedenen Abscissen-Werthe gesetzt werden, — eine Osculation der n^{ten} Ordnung haben, an einer bestimmten Stelle M (Fig. 29.), — deren Abscissen-Werth x ein völlig bestimmter ist, — so muß, damit beide Kurven die erste Ecke M mit einander gemein haben

1) für diesen bestimmten Werth von x, $y_x = y'_x$

seyn; damit aber dieselben Kurven auch die nächste Ecke N mit einander gemein haben, muß offenbar noch, für denselben Werth von x,

$$2)\qquad dy = dy' \quad \text{d. h.} \quad \partial y_x = \partial y'_x$$

seyn. Sollen ferner beide Kurven auch noch die nächste Ecke P mit einander gemein haben, so muß diese Gleichung 2.) auch noch bestehen, wenn in sie $x + dx$ statt x gesetzt wird, d. h. wenn man vom Punkte N zum Punkte P gerade so übergeht, wie vorher vom Punkte M zu dem Punkte N. Dies führt aber zu der Gleichung

$$3)\qquad d^2y = d^2y' \quad \text{oder} \quad \partial^2 y_x = \partial^2 y'_x,$$

immer für diesen bestimmten Werth von x. — Und so sieht man, daß wenn eine Osculation der n^{ten} Ordnung statt finden soll, dann auch noch für denselben bestimmten Werth von x

$$4)\qquad d^3y = d^3y', \quad d^4y = d^4y', \quad \cdots \quad d^ny = d^ny'$$

oder

$$\partial^3 y_x = \partial^3 y'_x, \quad \partial^4 y_x = \partial^4 y'_x, \quad \cdots \quad \partial^n y_x = \partial^n y'_x$$

seyn müsse, und daß nur, wenn diese $n+1$ Gleichungen alle erfüllt sind, für einen bestimmten Werth von x, die beiden

Kurven an dieser durch x gegebenen Stelle eine Osculation der n^{ten} Ordnung haben *).

Sind beide Kurven durch Gleichungen gegeben, die noch nicht nach y aufgelöst sind, so genügt man diesen $n+1$ Bedingungs-Gleichungen der Osculation am besten, wenn man sie eine hinter einander differenziirt, dann aber in sie statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, etc. etc. die aus der andern Gleichung entnommenen Werthe substituirt sich denkt.

Es ist leicht, aus dieser letztern Betrachtung wiederum den Krümmungs-Kreis zu erhalten. Die Gleichung eines jeden Kreises ist nämlich, wenn a und b die Koordinaten-Werthe seines Mittelpunktes sind, und x, y die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes desselben vorstellen, während c sein Halbmesser ist,

$$1') \qquad (x-a)^2+(y-b)^2 = c^2.$$

Differenzirt man nun diese Gleichung zwei mal hinter einander, so erhält man

$$2') \qquad (x-a)+(y-b)\cdot\partial y_x = 0$$

$$3') \qquad 1+\partial y_x^{\,2}+(y-b)\cdot\partial^2 y_x = 0.$$

Hat nun dieser Kreis mit der durch $y=y_x$ gegebenen Kurve eine Osculation der 2ten Ordnung an der Stelle, deren Abscissen-Werth durch x und Ordinaten-Werth durch y bezeichnet ist, so darf man nur in diese drei Gleichungen (1',—3'.) statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ die aus der Gleichung $y=y_x$ der gegebenen Kurve entnommenen Werthe setzen, und diese drei Gleichungen selbst müssen für diesen bestimmten Werth von x (und zugehörigen von y) welcher dem bestimmten Punkte M angehört, identisch werden. Aus diesen drei Gleichungen (1'.—3'.) kann nun a, b und c gefunden werden, und man findet leicht

$$b-y = \frac{1+\partial y_x^{\,2}}{\partial^2 y_x}, \qquad \text{also } b;$$

$$a-x = -\frac{1+\partial y_x^{\,2}}{\partial^2 y_x}\cdot\partial y_x, \quad \text{also } a;$$

und c dann genau so wie vorher, wo y, y_x und $\partial^2 y_x$ aus der Glei-

---

*) Es muß eigentlich die Differenz $y_x-y'_x$ für $n+1$ nächst an einander folgenden Werthe von x, von einem bestimmten an gerechnet, der Null gleich werden. Daraus allein folgt aber sogleich aus §. 159. III.) daß

$\partial(y_x-y'_x)=0$, $\partial^2(y_x-y'_x)=0$ u. s. w. f. bis $\partial^n(y_x-y'_x)=0$ seyn müsse, im Falle eine Osculation der n^{ten} Ordnung statt finden soll.

hung der gegebenen Kurve in x ausgedrückt werden, während statt x selbst der Abscissen-Werth des bestimmten Punktes M gesetzt wird, an welchem die Osculation statt finden soll.

§. 171.

Dieselben Untersuchungen nach Lagrange.

Betrachten wir jetzt dieselben Probleme nach Lagrange, und stellen wir uns dabei vor, daß alles im nächst vorstehenden Paragraphen enthaltene nicht gesagt sey.

I. Indem wir in diesem Paragraphen die Leibnitzische Ansicht der Kurven verwerfen und die Kurven selbst als stetig gekrümmt und von den gebrochenen Linien qualitativ verschieden ansehen, denken wir uns zwei Kurven, vorgestellt durch die Gleichungen

$$y = y_x \quad \text{und} \quad y' = y'_x,$$

in welchen Gleichungen wir die Abscissen-Werthe x als die einen und dieselben uns denken können, während wir die zu jedem Werthe von x gehörigen Ordinaten-Werthe y und y' im Allgemeinen als verschieden ansehen müssen, damit beide Kurven nicht mit allen ihren Punkten zusammenfallen, sondern wirklich zwei verschiedene Kurven seyen und bleiben.

Damit nun beide Kurven den, zu einem bestimmten Abscissen-Werthe x gehörigen Punkt M mit einander gemein haben, muß für diesen bestimmten Werth von x

$$1) \qquad y_x = y'_x$$

werden.

Da nun y_{x+h}, y'_{x+h} die zum Abscissen-Werthe $x+h$ gehörigen Ordinaten-Werthe beider Kurven sind, so daß $y_{x+h} - y'_{x+h}$ den, parallel mit der Ordinaten-Axe genommenen Abstand beider Kurven nächst an M vorstellt, in so fern h unendlich klein gedacht wird, so schmiegen sich die Kurven (dicht an dem Punkte M) desto inniger an einander, je geringer dieser Abstand ist, — d. h. je mehr erste Glieder in den nach steigenden Potenzen des unendlich kleinen h geordneten Entwickelungen von y_{x+h} und y'_{x+h} einander gleich sind. Und man sagt

(nach dieser Ansicht): daß die beiden Kurven an dem Punkte M eine Osculation der n^{ten} Ordnung haben, wenn für diesen bestimmten Werth von x außer $y_x = y'_x$ noch die n ersten Glieder in den nach steigenden (ganzen oder gebrochenen) Potenzen von h entwickelten Reihen für y_{x+h} und y'_{x+h} bezüglich einander gleich sind. — Und diese Osculation ist ein Berühren oder ein Schneiden, je nachdem die Differenz $y_{x+h} - y'_{x+h}$ für ein unendlich-klein gedachtes h, und für diesen bestimmten Werth von x, mit h zugleich ihr + oder — Zeichen *nicht* ändert, oder ändert.

Im Allgemeinen also findet allemal eine Osculation der n^{ten} Ordnung statt, so oft außer $y_x = y'_x$ noch

$$2) \quad \partial y_x = \partial y'_x, \quad \partial^2 y_x = \partial^2 y'_x, \quad \partial^3 y_x = \partial^3 y'_x,$$
$$\text{und zuletzt} \quad \partial^n y_x = \partial^n y'_x$$

ist. Und ist dann n eine gerade Zahl, so ist die Osculation ein Schneiden; ist aber n ungerade, so ist sie ein Berühren. — Für diejenigen besonderen Werthe von x aber, für welche eine der Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, etc. etc. die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, muß man die Entwickelungen von y_{x+h} und y'_{x+h} nach gebrochenen Potenzen von h (dem §. 158. gemäß) direkt vornehmen, um zu sehen, wie viele erste Glieder dieser beiden Entwickelungen einander gleich sind, d. h. von welcher Ordnung die Osculation für diesen Ausnahms-Werth von x ist.

Sind daher beide Kurven, welche mit einander eine Osculation der n^{ten} Ordnung haben sollen, durch die Gleichungen

$$\varphi_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y} = 0$$

gegeben, so wird man eine dieser Gleichungen n mal hinter einander differenziiren (um die n+1 Gleichungen zu erhalten, aus denen y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ ... $\partial^n y_x$ in x ausgedrückt gefunden werden können), dann aber in diese n+1 Gleichungen z. B. $\varphi = 0$, $\partial\varphi_{(x)} = 0$, $\partial^2\varphi_{(x)} = 0$, ... $\partial^n\varphi_{(x)} = 0$,

statt y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\cdots \partial^n y_x$ die aus der andern Gleichung $\psi_{x,y}=0$ dafür hergeholten Funktionen substituirt denken, und man wird die $n+1$ Bedingungs-Gleichungen 2.) der Osculation haben.

II. Ist die eine Kurve durch die Gleichung

1) $$y = y_x$$

gegeben, die andere aber eine gerade Linie, gegeben durch die Gleichung

2) $$y' = ax' + b,$$

so daß vermöge der Bedingungen der Osculation

3) $y_x = ax + b$, also 4) $\partial y_x = a$

wird, so hat diese Gerade 2.) mit der Kurve 1.) an der durch den bestimmten Werth von x gegebenen Stelle M eine Osculation der 1ten Ordnung, so oft für diesen bestimmten Werth von x die Gleichungen 3.) und 4.) unter der Voraussetzung statt finden, daß y_x und ∂y_x aus der Gleichung 1.) entnommen worden sind; d. h. wenn a und b so sind, daß für diesen bestimmten Werth von x die Gleichungen 3.) und 4.), die außer a und b nur noch x enthalten, identisch werden. Substituirt man die aus 3.) und 4.) gezogenen Werthe statt a und b in die Gleichung 2.), so erhält man als Gleichung der geradlinigen Tangente

5) $$y' - y = \partial y_x (x' - x),$$

genau so wie im §. 170. II. 4.).

Die Gleichung der Normale an derselben Stelle ist natürlich dann sogleich (nach §. 121. VI.)

6) $$y'' - y = -\frac{1}{\partial y_x}(x'' - x).$$

Hat man aber die Gleichung der Tangente (in 5.), so findet man, wenn (Fig. 18. oder Fig. 19.) Winkel MTX $= \varphi$ gesetzt wird, wegen $tg\,\varphi = \frac{y'-y}{x'-x}$, sogleich

7) $$tg\,\varphi = \partial y_x.$$

Und führt man auch hier die Begriffe der Subtangente PT

und der Subnormale PW ein, so ist, wegen $\frac{MP}{PT} = \pm tg$ sogleich wieder

6) $\quad$ *Subtg* $PT = \pm \frac{y}{\partial y_x}$ und *Subnorm* $PW = \pm y \cdot \partial y_x$

alles genau so wie im §. 170. II.). — Da PT und PW die Linien immer durch positive Zahlen ausgedrückt werden müssen, so sind danach die $\pm$ Zeichen zu regeln.

An denjenigen Stellen der Kurve, deren Abscissen-Werthe $\partial y_x = 0$ machen, läuft die Tangente mit der Abscissen-Axe parallel. — An denjenigen Stellen aber, deren Abscissen-Werthe x die Ableitung ∂y_x auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, also $\partial x_y = 0$ machen, läuft die Tangente mit der Ordinaten-Axe parallel d. h. sie steht auf der Abscissen-Axe senkrecht; — welches letztere sogleich daraus hervorgeht, daß man die beiden Koordinaten-Axen mit einander vertauschen, daher y, y' als Abscissen-Werthe und x, x' als Ordinaten-Werthe ansehen kann, so daß die Gleichung der Tangente diese Form

$$x' - x = \partial x_y \cdot (y' - y)$$

annimmt.

III. Soll die durch die Gleichung

1) $$y = y_x$$

gegebene beliebige Kurve, mit dem durch die Gleichung

2) $$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = c^2$$

gegebenen Kreise an einer durch x gegebenen Stelle M eine Osculation der 1ten Ordnung haben, so muß (nach I.), wenn in 2.) x statt x' gesetzt wird, nicht bloß $y' = y$, sondern auch noch $\partial y'_x = \partial y_x$ werden. Dies giebt die beiden identischen Gleichungen

3) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

und

4) $$(x - a) + (y - b) \cdot \partial y_x = 0,$$

nämlich die Gleichung 2.) und die aus ihr hervorgeht, wenn sie

sie nach x' differenzirt wird, und wenn in beiden x statt x' und statt y und ∂y_x die Werthe aus 1.) gesetzt gedacht sind, so daß die 4.) entsteht, wenn man die 3.) nach allem x differenzirt. — Diesen Gleichungen 3.) und 4.), in denen x und y und ∂y_x bestimmte Werthe angenommen haben, müssen nun die Werthe von a und b (welche die Koordinaten-Werthe des Mittelpunktes sind) und von c (welcher Werth den Radius vorstellt) genügen. Denkt man sich a, b und c noch völlig unbestimmt, so kann man solche aus den beiden Gleichungen 3.) und 4.) zu bestimmen suchen. Weil man aber nur zwei Gleichungen hat zur Bestimmung dieser drei Unbekannten a, b, c, so erhält man unendlich viele Auflösungen, d. h. es giebt unendlich viele Kreise, welche mit der gegebenen Kurve 1.) eine Osculation der ersten Ordnung oder eine Berührung haben.

Denkt man sich a nach und nach immer anders und anders, so giebt die Gleichung 4.) immer b dazu. Denkt man sich also in der Gleichung 4.) a und b als Koordinaten-Werthe der verschiedenen Mittelpunkte aller berührenden Kreise, so ist die Gleichung 4.) die Gleichung der Geraden (weil sie von der 1ten Ordnung ist in Bezug auf a und b), in welcher alle diese Mittelpunkte liegen. Und weil man derselben Gleichung auch die Form

$$b-y=-\frac{1}{\partial y_x}\cdot(a-x)$$

geben kann, so sieht man zugleich (aus II. 6.), daß diese Gerade mit der Normale der gegebenen Kurve an M zusammenfällt. — So sieht sich hier bewiesen, was nach der Leibnitzischen Ansicht sich auf Euklidisch-geometrischem Wege von selbst verstand.

Soll aber der in 2.) gegebene Kreis mit der Kurve 1.) eine Osculation der 2ten Ordnung haben, in welchem Falle er der **Krümmungskreis** und sein Radius der **Krümmungshalbmesser** genannt werden, so muß auch noch $\partial^2 y'_x = \partial^2 y_x$ seyn, d. h., — wenn man die 4.) noch einmal differenzirt, so daß man

5) $$1+\partial y_x^2+(y-b)\cdot\partial^2 y_x=0$$

erhält, — es muß diese Gleichung 5.) auch noch eine identische werden, so wie man statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ die aus der Gleichung 1.) entnommenen Werthe, statt x aber den bestimmten Abscissen-Werth der Stelle M setzt, an welcher die Osculation statt haben soll. Die Gleichungen 3.), 4.) und 5.) geben nun

6) $$b-y=\frac{1+\partial y_x^2}{\partial^2 y_x};\qquad 7)\quad a-x=-\frac{1+\partial y_x^2}{\partial^2 y_x}\cdot\partial y_x$$

und

8) $$c=-\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}=\frac{(1+\partial x_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y},$$

oder, wenn man x also auch y noch als Funktionen von t sich denkt,

9) $$c=\frac{(\partial x_t^2+\partial y_t^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_t\cdot\partial^2 y_t-\partial y_t\cdot\partial^2 x_t};$$

und dadurch ist die Lage des Mittelpunktes in der Normale und auch der Krümmungshalbmesser c völlig bestimmt; und zwar gerade so wie im §. 170. III. N. 8.—10.).

Anmerkung. Man hat dieser Theorie der Osculationen nach Lagrange den Einwand gemacht, daß sie die Osculation von der Lage der Koordinaten-Axen abhängig mache. Soll aber die Osculation nicht von der Lage der Ordinaten-Axe abhängig erscheinen, sondern wirklich als eine den Kurven selbst (an dieser Stelle) einwohnende Eigenschaft, so muß man zeigen, daß wenn man neue Koordinaten-Axen einführt und die neuen Koordinaten-Werthe durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}'$ bezeichnet, dann mit $\partial y_x=\partial y'_x$, auch allemal $\partial\mathfrak{y}_{\mathfrak{x}}=\partial\mathfrak{y}'_{\mathfrak{x}}$; ferner mit $\partial y_x=\partial y'_x$ und $\partial^2 y_x=\partial^2 y'_x$, auch allemal $\partial^2\mathfrak{y}_{\mathfrak{x}}=\partial^2\mathfrak{y}'_{\mathfrak{x}}$ u. s. w. seyn muß. Dies ist aber sehr leicht nachgewiesen. Nach §. 123 sind nämlich die Gleichungen zwischen $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$, y und x allemal von der Form

1) $$\mathfrak{y}=\alpha x+\beta y \quad\text{und}\quad 2)\quad \mathfrak{x}=-\beta x+\alpha y;$$

wo $$\alpha^2+\beta^2=1;$$

also ist noch, wenn man nach allem x differenziirt,

3) $\partial \mathfrak{y}_x = \alpha + \beta \cdot \partial y_x$ und 4) $\partial \mathfrak{x}_x = -\beta + \alpha \cdot \partial y_x$,

folglich auch

$$5) \qquad \frac{\partial \mathfrak{y}_x}{\partial \mathfrak{x}_x} = \partial \mathfrak{y} = \frac{\alpha + \beta \cdot \partial y_x}{-\beta + \alpha \cdot \partial y_x}.$$

Auf demselben Wege findet man aber für jeden Punkt der andern Kurve, dessen Koordinaten-Werthe bezüglich x und y', und dann $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}'$ seyn mögen,

$$6) \qquad \partial \mathfrak{y}'_{\mathfrak{x}} = \frac{\alpha + \beta \cdot \partial y'_x}{-\beta + \alpha \cdot \partial y'_x}.$$

Hat man nun den Punkt M im Auge, so hat für ihn, da er beiden Kurven gemeinschaftlich ist, nicht bloß x, sondern auch $\mathfrak{x}$ für beide Kurven einen und denselben Werth. Ist daher noch (für denselben Werth von x, also auch für den zugehörigen Werth von $\mathfrak{x}$) $\partial y_x = \partial y'_x$, so folgt auch (aus 5. und 6.) sogleich noch $\partial \mathfrak{y}_{\mathfrak{x}} = \partial \mathfrak{y}'_{\mathfrak{x}}$. — Und man erkennt nun leicht, (wenn man sich die Gleichung 5.) und 6.) noch einmal nach allem x differenziirt denkt), daß aus $\partial y_x = \partial y'_x$ und $\partial^2 y_x = \partial^2 y'_x$ für diesen bestimmten Punkt M, auch noch $\partial^2 \mathfrak{y}_{\mathfrak{x}} = \partial^2 \mathfrak{y}'_x$ hervorgehe; u. s. w. f. — Man findet namentlich noch (wegen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

$$7) \qquad \partial^2 \mathfrak{y}_{\mathfrak{x}} = \frac{\partial(\partial \mathfrak{y}_{\mathfrak{x}})_x}{\partial \mathfrak{x}_x} = -\frac{\partial^2 y_x}{(-\beta + \alpha \cdot \partial y_x)^3};$$

u. s. w. f.

§. 172.

Auffindung der geradlinigen Asymptoten.

Ist x' der Abscissen-Werth des Punktes T (Fig. 29.), in welchem die Tangente MT der Abscissen-Axe OX begegnet, so findet sich solcher aus der Gleichung der Tangente (§. 171. II. 3.) indem man y' = 0 setzt. Man findet dann

$$1) \qquad x' = \pm OT = x - \frac{y}{\partial y_x} = x - y \cdot \partial x_y,$$

während, wenn W. MTX = φ gesetzt wird (nach §. 171. II. 7.)

2) $$tg\,\varphi = \partial y_x = \frac{1}{\partial x_y}$$

ist. — Stellt man nun in diesen beiden Gleichungen die Ausdrücke zur Rechten als Funktionen von $\frac{1}{x}$ her, und setzt man dann $\frac{1}{x} = 0$, d. h. $x = \infty$, — und stellt man dieselben Ausdrücke nachgehends auch als Funktionen von $\frac{1}{y}$ her, und setzt man dann $\frac{1}{y} = 0$ d. h. $y = \infty$, — so erhält man die Werthe von x' und φ für den Fall, daß die Tangente die Kurve erst im Unendlichen berührt. — Eine solche Tangente wird geradlinige Asymptote genannt. — Führt aber dieses Verfahren zu einem Widerspruch, so ist solcher ein Beweis, daß dasmal keine geradlinige Asymptote existirt.

Ist z. B. gegeben als Gleichung einer Kurve

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(1-x)^2(4-2x+x^2)}}{x},$$

so giebt sie, wenn sie differenziirt wird, sogleich

$$\partial y_x = \frac{-4+5x-2x^3+x^4}{\pm x^2\sqrt{(1-x)^2(4-2x+x^2)}} - \frac{2}{x^2}.$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch x^4, und setzt man dann $\frac{1}{x} = 0$, so nimmt dieser Ausdruck für ∂y_x die Werthe ± 1 an, welche $\varphi = 45°$ und $\varphi = 135°$ liefert.

Ferner erhält man aus der Gleichung 1.)

$$x' = \frac{-8x+15x^2-9x^3+2x^4 \mp 4x\sqrt{(1-x)^2(4-2x+x^2)}}{-4+5x-2x^3+x^4 \mp 2\sqrt{(1-x)^2(4-2x+x^2)}};$$

und dividirt man hier Zähler und Nenner durch x^4, so erhält man für $\frac{1}{x} = 0$, sogleich den Werth von x', $= 2$.

Diese Kurve hat also zwei Asymptoten, welche durch den von O um 2 entfernten Punkt T hindurchgehen (Fig. 34.) und daselbst mit der Abscissen-Axe OX und mit ihrer rückwärts gedachten Richtung OX' Winkel von 45° machen. Dieselbe Kurve hat aber noch eine dritte Asymptote, welche mit der Ordinaten-Axe OY zusammenfällt, und die man findet

würde, wenn man x' und ∂y_x bloß als Funktion von y und dann von $\frac{1}{y}$ herstellte, zuletzt aber $\frac{1}{y}=0$ setzt. Hier findet sie sich jedoch bequemer daraus, daß für x unendlich-klein, y unendlich groß wird, während für $x=0$, die Ordinate y ganz aufhört zu seyn, weshalb OY Asymptote ist.

Uebrigens hat diese Kurve drei Theile mit sechs unendlichen Schenkeln, welche mit den drei Asymptoten zusammenfallen, wie solches in der Figur 34.) zu sehen ist.

Jedoch findet man die geradlinigen Asymptoten, ohne sie als Tangente im Unendlichen anzusehen, häufig aus dem andern Begriffe, nach welchem sie solche gerade Linien sind, die sich den Schenkeln der Kurven ohne Ende nähern, ihnen unendlich nahe kommen, ohne sie je erreichen zu können. — Das Verfahren ist folgendes: Man setzt $\frac{1}{x}=z$, verwandelt dadurch y in eine Funktion von z, entwickelt diese (mittelst des Maclaurinschen Lehrsatzes) in Reihen, die nach steigenden Potenzen von z d. h. von $\frac{1}{x}$ fortlaufen. Wenn dann y die Form annimmt

$$3) \qquad y=Ax+B+C\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu}+D\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}+\cdots$$

wo μ, ν etc. etc. wachsend und positiv sind, so darf man nur, wenn A und B reelle Werthe sind,

$$4) \qquad y'=Ax+B$$

nehmen, und diese letztere Gleichung ist die Gleichung der Asymptote, weil $y-y'$ für $\frac{1}{x}$ unendlich-klein d. h. für $x=\infty$, selbst unendlich-klein wird *).

Nimmt also die Gleichung 3.) nicht diese Form an, nimmt

*) Steht eine Asymptote auf der Abscissen-Axe senkrecht, so findet man sie ebenfalls auf diesem Wege nicht, weil für sie x nie unendlich-groß wird. Man findet sie dann entweder dadurch (wie in obigem Beispiele), daß man bemerkt, wie für $x=a$, y unendlich-groß wird, oder dadurch, daß man die Koordinaten-Axen verändert, oder doch mit einander vertauscht.

sie etwa noch Glieder von der Form αx^m, βx^n etc. etc. in sich auf, wo m, n etc. etc. positiv sind, oder ist A oder B nicht reell, so existirt keine geradlinige Asymptote. (Man vgl. noch §. 132., wo die Asymptoten der Hyperbel gefunden sind.)

§. 173.

Die Differential- oder Ableitungs-Rechnung ist auch noch geeignet, die ausgezeichneten Punkte einer Kurve erkennen zu lassen. Zu den ausgezeichneten Punkten zählt man aber

I. die **Wendepunkte**. — Ein Punkt M heißt ein **Wendepunkt**, wenn die beiden ihm nächst anliegenden Punkte auf verschiedenen Seiten der geradlinigen Tangente an M, liegen. — Ist x der Abscissen-Werth dieses Wendepunktes M; ist x+h der Abscissen-Werth des an M nächst anliegenden Punktes (der dem M vorangeht, wenn h negativ gedacht wird, welcher aber dem Punkte M folgt, sobald man sich h positiv denkt, während h jedesmal unendlich-klein gedacht werden muß); ist ferner y_{x+h} die Ordinate der Kurve und y'_{x+h} die Ordinate der durch die Gleichung

$$y'-y=\partial y_x(x'-x)$$

gegebenen Tangente, so findet sich aus letzterer Gleichung, wenn man x+h statt x' setzt,

$$y'_{x+h}=y+\partial y_x\cdot h,$$

während nach dem Taylor'schen Lehrsatze für die Ordinate der Kurve,

$$y_{x+h}=y+\partial y_x\cdot h+\partial^2 y_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^3 y_x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

gefunden wird. Hieraus findet sich

$$y'_{x+h}-y_{x+h}=-\partial^2 y_x\cdot\frac{h^2}{2!}-\partial^3 y_x\cdot\frac{h^3}{3!}-\cdots.$$

Der Punkt M ist nun ein **Wendepunkt**, wenn dieser Unterschied $y'_{x+h}-y_{x+h}$ mit h zugleich sein + oder − Zeichen wechselt, — also wenn

$$\partial^2 y_x = 0$$

wird, ohne daß man zu gleicher Zeit $\partial^3 y_x = 0$ hat, oder wenn gleichzeitig

$$\partial^2 y_x = 0, \quad \partial^3 y_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial^4 y_x = 0$$

wird, ohne daß man zu gleicher Zeit $\partial^5 y_x = 0$ hat; u. s. w. f.

Sollte, während $\partial^2 y_x = 0$ ist, $\partial^3 y_x$ die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, so müßte man für diesen Ausnahms-Werth die Differenz $y'_{x+h} - y_{x+h}$ direkt in eine nach h geordnete Reihe verwandeln (die auch gebrochene Potenzen von h in sich aufnimmt) und zusehen, ob solche mit h zugleich ihr + oder — Zeichen ändert, oder nicht. — Und um keinen vorhandenen Wendepunkt zu verfehlen, muß man auch jedesmal noch $\partial^2 y_x = \frac{1}{0}$ setzen, weil auch für diesen Ausnahms-Werth von x, die Differenz $y'_{x+h} - y_{x+h}$, nach gebrochenen Potenzen von h entwickelt, mit h zugleich ihr + oder — Zeichen ändern kann. Und sollte der Werth von x, welcher $\partial^2 y_x = \frac{1}{0}$ macht, auch schon $\partial y_x = \frac{1}{0}$ machen, so daß die Tangente an dieser Stelle auf der Abscissen-Axe senkrecht steht, so findet kein Wendepunkt statt, wenn für denselben Werth von x, die Ordinate y ein Grenz-Werth wird.

II. Zu den ausgezeichneten Punkten gehören ferner die Durchschnittspunkte der Kurve, wie z. B. der Punkt m (Fig. 31.). — Da an diesen Punkten zwei oder mehr Tangenten gleichzeitig statt finden, so muß ∂y_x für diese Werthe von x und y gleichzeitig zwei oder mehr reelle Werthe haben, die im Allgemeinen einander ungleich sind, in Ausnahmsfällen aber auch einander gleich werden können.

Man findet daher diese Durchschnittspunkte, wenn man die zu einem und demselben x (im Allgemeinen) gehörigen Wer-

the von y einander gleich setzt, und für jedes Paar der, aus dieser Gleichung hervorgehenden Werthe von x und y, den Ausdruck für ∂y_x prüft, ob er wirklich zwei (oder mehr) reelle Werthe annimmt, wenn letztere auch Ausnahmsweise einander gleich werden sollten. Dabei heißt der Punkt m, je nachdem sich zwei, drei, oder n reelle (gleiche oder ungleiche) Werthe von ∂y_x finden, ein doppelter, dreifacher, n facher Punkt. — Findet sich aber zu einem dieser Werthe von x, nur ein einziger reeller Werth von ∂y_x, so daß die übrigen alle imaginär sind, so bleibt der Punkt m nur ein einfacher Punkt*).

III. Rückkehrpunkte sind solche doppelte Punkte, in denen die Kurve aufhört, wie z. B. (Fig. 30.) die Punkte 0 und B, oder (Fig. 32.) der Punkt m. — Sie werden daher nach derselben Regel, wie alle doppelten Punkte gefunden, nur daß die hiesigen von denen in II.) noch dadurch abgesondert werden, daß man zusieht, wie die Werthe von y_{x+h} und y_{x-h}

*) Schafft man aus einer Gleichung zwischen x und y alle mehrdeutigen Ausdrücke, also namentlich alle Wurzel-Zeichen weg, und wird sie dann durch $u_{x,y}=0$ vorgestellt, so giebt sie sogleich, wenn sie nach allem x differenziirt wird,

$$1)\qquad \partial u_x + \partial u_y \cdot \partial y_x = 0 \qquad \text{oder} \qquad \partial y_x = -\frac{\partial u_x}{\partial u_y},$$

wo rechts im Zähler und im Nenner sowohl x als auch y beliebig untermischt, darin aber keine mehrdeutigen Ausdrücke vorkommen können. Für einen vielfachen Punkt, wo y nur einen einzigen Werth hat, würde nun aus dieser Gleichung auch ∂y_x nur einen einzigen Werth annehmen, wenn nicht dieselben Werthe von x und y, den Bruch $\frac{\partial u_x}{\partial u_y}$ auf die Form $\frac{0}{0}$ brächten.

Man kann also auch die vielfachen Punkte noch dadurch finden, daß man zuerst die Gleichung $u_{x,y}=0$ ohne Wurzeln herstellt, dann $\partial u_x=0$ und $\partial u_y=0$ setzt, aus diesen beiden Gleichungen x und y findet, zuletzt aber prüft, ob sie auch der gegebenen Gleichung $u_{x,y}=0$ (der Kurve) selbst genügen.

ausfallen, wenn statt x der Abscissen-Werth dieses Punktes gesetzt wird; dadurch allein kann man dann erkennen, ob der fragliche Punkt ein Durchschnittspunkt oder ein Rückkehrpunkt ist.

Da bei den Rückkehrpunkten beide Zweige nur einen einzigen Zweig ausmachen, in so fern jeder abbricht, folglich der eine in den andern übergeht, so müssen die Tangenten beider Zweige auch in einander übergehen, daher am Rückkehrpunkt selbst mit einander zusammenfallen. Im Rückkehrpunkte haben daher beide Zweige immer eine gemeinschaftliche Tangente.

Man unterscheidet aber noch: Rückkehrpunkt der ersten Art, wie solcher z. B. in der durch die Gleichung

$$y = b \pm (x-a)^{\frac{3}{2}}$$

gegebenen Kurve vorkommt, und wo die beiden Zweige dicht am Rückkehrpunkt auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente liegen d. h. einander ihre Konvexität zukehren; — und Rückkehrpunkt der zweiten Art, wie solcher z. B. in der durch die Gleichung

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$$

gegebenen Kurve vorkommt, und wo die beiden Zweige dicht am Rückkehrpunkt auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente getroffen werden, d. h. einander umfassen, oder beide ihre Konvexität der gemeinschaftlichen Tangente am Rückkehrpunkte zuwenden.

Ferner giebt es noch:

IV. Einzeln stehende Punkte, Einzelpunkte oder Einsiedler, wie z. B. der Punkt m in der durch die Gleichung

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{(3-x)^2(1+x)(1-x)}}{x}$$

gegebenen Kurve der Fig. 33.). — Es ist dies der Punkt, der sich für $x = 3$ ergiebt; denn es wird y imaginär sowohl für $x = 3 + h$, als auch für $x = 3 - h$, so oft h unendlich-klein gedacht wird; folglich steht dieser Punkt m ganz vereinzelt, und auf keiner Seite liegt ihm ein zweiter stetig an. Die-

ser Punkt m ist daher ein, der Kurve (die zwischen den zu $x=-1$ und $x=+1$ gehörigen Ordinaten-Richtungen liegt) zugehöriger Einzelpunkt.

Da nur mehrdeutige Ausdrücke imaginäre Werthe annehmen, so folgt, daß ein Einsiedler ebenfalls als ein Vielfachpunkt angesehen werden kann, und sich dadurch findet, daß man die beiden, zu einem und demselben unbestimmten x gehörigen zwei (oder mehreren) Werthe von y einander gleich setzt. Ist a der aus dieser Gleichung hervorgehende Werth von x, so müssen y_{a-h} und y_{a+h} imaginär werden, wenn für $x=a$ ein Einzelpunkt statt finden soll.

Anmerkung. Durchschnittspunkte, Rückkehrpunkte, Einsiedler, setzen eine Form von y voraus, welche mehrdeutig ist, so aber, daß für $x=a$ zwei oder mehrere Werthe einander gleich werden. Es enthält also y in seinem Ausdrucke Glieder von der Form $A(x-a)^{\frac{m}{n}}\cdot\varphi_x$; dann aber enthalten ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ etc. etc. bezüglich Glieder von der Form $B\cdot(x-a)^{\frac{m-n}{n}}\cdot\varphi_x$, $C\cdot(x-a)^{\frac{m-2n}{n}}\cdot\varphi_x$, $D\cdot(x-a)^{\frac{m-3n}{n}}\cdot\varphi_x$ u. s. w. f. Da nun einer dieser Exponenten doch endlich negativ werden muß, so wird für $x=a$ einer der Differential-Koefficienten (und dann müssen die ihm nachfolgenden alle) die Form $\frac{1}{0}$ annehmen.

Man findet daher diese ausgezeichneten Punkte der Kurve alle dadurch, daß man die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ etc. etc. eine nach der andern $=0$ und $=\frac{1}{0}$ setzt; für den sich ergebenden Werth $x=a$ aber, die Werthe von y_{a-h} und y_{a+h} näher prüft.

Beispiel 1. Betrachten wir zunächst die durch ihre Scheitel-Gleichung

1) $$y = \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

gegebene Ellipse (Fig. 19.). — Sie giebt

2) $\partial y_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ und 3) $\partial^2 y_x = \frac{-ab}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Es wird daher, wenn $AP = x$ ist (aus §. 171. II. 6. u. 5.)

$$\textit{subtg.}\ PT = \pm\frac{2ax-x^2}{a-x} \quad \text{und} \quad \textit{subnorm.}\ PW = \pm\frac{b^2(a-x)}{a^2}$$

und

$$tg\, MTX \quad \text{d. h.} \quad tg\,\varphi = \frac{b}{a}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

und dies stimmt alles genau mit den Formeln §. 131. VII. 16. und 18.) überein, in so fern man statt des dortigen von C aus genommenen x_1 hier $x - a$ setzen muß.

Der Krümmungshalbmesser an M wird (nach §. 171. III.)

$$= \frac{[a^2b^2 + (a^2-b^2)(2ax-x^2)]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b};$$

und dieser wird, sowohl für $x = 0$, als auch für $x = 2a$ d. h. an den Scheiteln A und B, $= \frac{b^2}{a}$ d. h. dem halben Parameter der Ellipse gleich.

Setzen wir nun, um die ausgezeichneten Punkte zu finden, $\partial y_x = 0$ oder $= \frac{1}{0}$, ferner $\partial^2 y_x = 0$ oder $= \frac{1}{0}$ u. s. w. f. — Die Gleichung $\partial y_x = 0$, giebt $x = a$, und weil derselbe Werth $\partial^2 y_x$ negativ macht, so lange y d. h. die Wurzel $\sqrt{2ax-x^2}$ positiv ist, dagegen $\partial^2 y_x$ positiv macht, wenn y negativ ist, so folgt, daß für $x = a$, also an den Punkten D und E, die Tangente mit der Abscissen-Axe AX parallel läuft, und daß y daselbst ein Maximum ist, wenn positiv, dagegen ein Minimum, wenn man sich $y = -CE$ denkt. Und weil die Ordinaten der an D oder E nächst anliegenden Punkte der Tangente größer sind, als bezüglich die zu denselben Abscissen gehörigen Ordinaten der Kurve, so kehret die Kurve an D und E der Abscissen-Axe ihre Konvexität zu.

Die Gleichung $\partial y_x = \frac{1}{0}$ giebt $2ax - x^2 = 0$, d. h. $x = 0$ und $x = 2a$. An den Scheiteln A und B also steht die Tangente auf der Abscissen-Axe AX senkrecht, und weil die zugehörigen Werthe von y Grenz-Werthe sind *), so findet auch hier an den Scheiteln kein Wendepunkt statt.

---

*) Setzt man nämlich in die Gleichung $y = \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ zuerst $0 + h$, dann $2a + h$ statt x, so erhält man

Um aber zu sehen, ob überhaupt kein Wendepunkt statt finde, m[illegible] man auch noch $\partial^2 y_x = 0$ und $= \frac{1}{0}$ setzen. Die erstere Gleich[ung] giebt $ab = 0$ und diese kann daher gar nicht statt finden. Die and[ere] dagegen giebt wieder $2ax - x^2 = 0$, d. h. $x = 0$ und $x = 2a$; [illegible] beide geben nichts Neues, sondern nur das, was aus $\partial y_x = \frac{1}{0}$ n[oth]wendig hervorgehen mußte.

Beispiel 2. Hätte man statt $y = \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, genommen di[e] Gleichung $y = p + \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, so wären alle Ordinaten um dasselb[e] p größer geworden als vorher. Man hätte also dieselbe Ellipse erhalten, nur daß ihr Mittelpunkt nicht in der Abscissen-Axe AX, sondern um [p] höher (oder tiefer, wenn p negativ) gelegen hätte. — Würde man d[a]gegen die Gleichung

$$1) \qquad y = p + qx^2 + \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

nehmen, so würde man keine Ellipse, sondern eine algebraische Gleichung der 4ten Ordnung haben. Man würde dann erhalten

$$2) \quad \partial y_x = 2qx + \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{und} \quad 3) \quad \partial^2 y_x = 2q - \frac{ab}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung $\partial y_x = 0$ giebt jetzt andere Werthe von x als vorher und zwar vier Werthe. Nach Maßgabe, daß sie alle vier reell sind, oder nur zweie davon reell ausfallen, oder alle imaginär sind, zeigen diese vier Werthe vier Stellen, oder zwei Stellen, oder das Nichtdaseyn solcher Stellen an, an welchen die Tangente mit der Ordinaten-Axe parallel läuft.

Die Gleichung $\partial y_x = \frac{1}{0}$ giebt wieder $x = 0$ und $x = 2a$, [so] daß die Kurve für dieselben beiden Abscissen-Werthe, wie vorher die Ellipse, Tangenten hat, die auf der Abscissen-Axe senkrecht stehen. Und setzt man $0 + h$ und $2a + h$ statt x, so erhält man

$$y_{0+h} = p + qh^2 + \frac{b}{a} \cdot h^{\frac{1}{2}}(2a - h)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$y_{2a+h} = p + q(2a + h)^2 + \frac{b}{a} \cdot (-h)^{\frac{1}{2}}(2a + h)^{\frac{1}{2}},$$

so daß y_{0+h} für ein negatives h, dagegen y_{2a+h} für ein positives h [illegible]

$$y_{0+h} = \frac{b}{a} h^{\frac{1}{2}} \cdot (2a - h)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y_{2a+h} = \frac{b}{a}(-h)^{\frac{1}{2}} \cdot (2a + h)^{\frac{1}{2}}$$

Der erstere Werth wird imaginär für ein negatives h, der andere dagegen für ein positives h.

imaginär werden; dieselben Werthe 0 und 2a von x, machen also y zu Grenz-Werthen, so daß an diesen Stellen keine Wendepunkte statt finden.

Die Gleichung $\partial^2 y_x = 0$ giebt jetzt

$$2q(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} = ab \quad \text{oder} \quad 4q^2(2ax - x^2)^3 = a^2b^2,$$

welches eine Gleichung vom 6ten Grade ist, die für x sechs Werthe liefert. Man erhält aber daraus

$$2ax - x^2 = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{4q^2}}$$

oder, wenn der einzige reelle (und allemal positive) Werth dieser Kubikwurzel durch r bezeichnet wird, so daß die beiden andern $r(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3})$ sind,

$$x^2 - 2ax = -r \quad \text{und} \quad x^2 - 2ax = r(\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}),$$

woraus

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - r} \quad \text{und} \quad x = a \pm \sqrt{a^2 + r(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})}.$$

Von diesen sechs Werthen sind die vier letztern gewiß imaginär, die beiden erstern aber nur dann, wenn $a^2 < r$, d. h. $a^6 < r^3$ oder $a^6 < \frac{a^2b^2}{4q^2}$ d. h. $4q^2a^4 < b^2$, oder q positiv oder negativ, aber an sich $< \frac{b}{2a^2}$ ist. — Tritt also dieses nicht ein; ist vielmehr q positiv oder negativ, aber an sich $> \frac{b}{2a^2}$, so giebt es zwei Stellen der Abscissen-Axe, an welchen $\partial^2 y_x = 0$ ist und für welche $\partial^3 y_x$ **nicht** $= 0$ wird. Dann hat also die Kurve Wendepunkte an diesen Stellen, und zwar, weil zu jedem Werthe von x zwei Werthe von y gehören, im Ganzen vier Wendepunkte. Ist endlich $r = a$ d. h. q positiv oder negativ, aber an sich $= \frac{b}{2a^2}$, so finden deshalb keine Wendepunkte mehr statt, weil jetzt dieselben beiden Werthe von x mit denen zusammen fallen, für welche $\partial y_x = \frac{1}{0}$ ist.

Die Gleichung $\partial^2 y_x = \frac{1}{0}$ giebt wieder $x = 0$ und $x = 2a$, welches dieselben Stellen sind, an welchen man schon $\partial y_x = \frac{1}{0}$ hat, d. h. wo die Tangente auf der Abscissen-Axe senkrecht steht *).

*) Wir werfen auf diese Kurve noch mehr Licht, wenn wir bemerken, daß $y' = p + qx^2$ die Ordinaten einer Parabel acb (Fig. 35.) vorstellt, deren Scheitel in a ist, und daß unsere durch die Gleichung

$$y = p + qx^2 + \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = y' \pm \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

vorgestellte Kurve gleichsam eine verzerrte Ellipse ist, deren Hauptdurch-

her dieser gefundenen Differential-Koefficienten ∂s_x und ∂f_x, um daraus s_x und f_x selbst zu erhalten.

I. Wir wollen nun zunächst ∂s_x und ∂f_x nach Leibnitzischen Ansichten finden, d. h. zuerst die, zu dem unendlich-kleinen Zuwachse dx gehörigen unendlich-kleinen Zuwachse ds und df, von s und f, bestimmen, und daraus dann ∂s_x und ∂f_x entnehmen. Ist aber $Am = x$ und $mn = dx$, so ist das Stück MN der Kurve, eins der geradlinigen Elemente derselben und $= ds$, wenn $AM = s$ gesetzt worden. Zieht man nun MU mit OX parallel, so hat man das rechtwinkliche Dreieck MUN, in welchem dx und dy die beiden Katheten sind, und ds die Hypothenuse ist. Also hat man unmittelbar aus dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$1)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},\quad \text{folglich}\quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

d. h.

$$2)\qquad \partial s_x = \sqrt{1 + \partial y_x{}^2}.$$

Ist ferner $AmM = f_x$, so ist $MNmn = df$; dieser Zuwachs $MNmn$ besteht also aus dem Rechteck $mnMU$, — dessen Grundlinie dx, dessen Höhe y, dessen Inhalt also $= y \cdot dx$ ist, — und aus dem Dreiecke MUN, dessen Inhalt $= \frac{1}{2} dx \cdot dy$ also unendlich-klein von der zweiten Ordnung ist, mithin gegen das Unendlich-Kleine $y \cdot dx$ der ersten Ordnung (nach §. 50.) verschwindet. Folglich hat man

$$3)\qquad df = y \cdot dx,\quad \text{also}\quad \frac{df}{dx} = y,$$

d. h.

$$4)\qquad \partial f_x = y = y_x.$$

II. Will man dieselben Resultate nach der Ansicht des Lagrange erhalten, welcher die Kurven als stetig gekrümmt ansieht, so denkt man sich mn nicht unendlich-klein, sondern beliebig, setzt $mn = h$, hat dann

Bog. $AMN = s_{x+h}$, also Bog. $MN = s_{x+h} - s_x$, oder, nach dem Taylor'schen Lehrsatze,

1)

1) $\text{Bog. } MN = \partial s_x \cdot h + \partial^2 s_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$.

Nun bildet sich Lagrange mittelst der Euklidischen Geometrie zwei Grenzen, zwischen denen der Bogen MN immer liegen muß, — so daß er größer ist wie die eine, kleiner dagegen wie die andere dieser Grenzen, — und entwickelt diese Grenzen ebenfalls in, nach Potenzen von h fortlaufende Reihen. Zu diesen Grenzen nimmt er die Stücke der Tangenten an M und an N, welche von den beiden Ordinaten-Richtungen mM und nN abgeschnitten werden, und von denen das Stück der Tangente an M, nämlich MR (Fig. 36.) die größere, das Stück NH der Tangente an N dagegen die kleinere Grenze ist, wenn wir voraussetzen, daß die Ordinaten-Werthe y von M bis N fortwährend wachsen*).

Nun berechnet sich aus der Gleichung der Tangente (§. 171. II. 3.) die Ordinate nR derselben, welche zum Abscissen-Werthe $x+h$ gehört,

$$= y + \partial y_x \cdot h;$$

also

$$UR = \partial y_x \cdot h;$$

und daraus die Hypothenuse MR, weil $MU = h$ ist, nämlich

2) $MR = \sqrt{h^2 + \partial y_x^2 \cdot h^2} = h \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$.

Eben so ist die Gleichung der Tangente NH, wenn x' und y' die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte vorstellen (nach §. 170. oder §. 171.)

$$y' - y_{x+h} = \partial y_{x+h} \cdot [x' - (x+h)]$$

Setzt man daher $x' = x$, so wird $y' = mH$, und $y' - y_{x+h} = -NK$, wenn HK mit OX parallel gedacht wird, so daß $HK = h$ ist. Also wird

---

*) Es ist nämlich $MG + NG > \text{Bog. } MN$; und GNR nach der obigen Voraussetzung ein stumpfer Winkel; folglich $GR > NG$; mithin um so mehr

$$MG + GR \text{ d. h. } MR > \text{Bog. } MN.$$

Ferner ist der Winkel MHN stumpf; also $NH < \text{Sehne } MN < \text{Bog. } MN$.

Sollten von M nach N hin die Ordinaten-Werthe immerfort abnehmen, so wäre natürlich MR die kleinere und NH die größere Grenze.

Und mn oder h soll hier nie so groß gedacht werden, daß zwischen M und N der Ordinaten-Werth y ein Maximum oder ein Minimum werden könnte.

$$NK = \partial y_{x+h} \cdot h = \partial y_x \cdot h + \partial^2 y_x \cdot h^2 + \cdots;$$

und daraus findet sich die Hypothenuse HN so: nämlich

$$HN = h \cdot \sqrt{1 + (\partial y_x + \partial^2 y_x \cdot h + \cdots)^2},$$

d. h. wenn man dieses nach Potenzen von h entwickelt

$$3) \qquad HN = h \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} + B_2 \cdot h^2 + \cdots,$$

wo B_2, etc. etc. leicht zu findende Koefficienten sind.

Sind nun (in 1., 2. und 3.) Bog. MN und die Grenzen MR und NH, zwischen denen er liegt, nach Potenzen von h geordnet, so wendet man den Satz an:

> wenn eine nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe für jedes noch so kleine h, der Größe nach allemal zwischen zwei andern eben so geordneten Reihen liegt, und letztere beiden mit einem und demselben Gliede beginnen, so muß die erstere genau mit demselben Gliede beginnen *).

Da nämlich die Grenz-Reihen (in 2. und in 3.) mit demselben Gliede $h \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$ beginnen, so muß hiernach das erste Glied der Reihe 1.), nämlich $\partial s_x \cdot h$ dasselbe seyn; d. h. man hat

$$\partial s_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}.$$

---

*) Liegt

$$R = A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots$$

für jeden noch so kleinen Werth von h allemal zwischen

$$S = B_1 \cdot h + B_2 \cdot h^2 + B_3 \cdot h^3 + \cdots$$

und

$$S' = B_1 \cdot h + C_2 \cdot h^2 + C_3 \cdot h^3 + \cdots,$$

so sind dieser Voraussetzung zu Folge die Differenzen $S - R$ und $R - S'$ positiv, und kleiner als die Differenz $S - S'$. — Nun findet sich aber

$$S - R = (B_1 - A_1)h + (B_2 - A_2)h^2 + \cdots$$

und

$$R - S' = (A_1 - B_1)h + (A_2 - C_2)h^2 + \cdots,$$

während

$$S - S' = \qquad (B_2 - C_2)h^2 + \cdots$$

ist. Da nun h so klein gedacht werden kann, daß jedes mit h^1 afficirte Glied größer ist als die Summe von unendlich-vielen mit höhern Potenzen von h afficirten Gliedern, so könnten nicht $S - R$ und $R - S'$ beide kleiner als $S - S'$ seyn, wenn nicht $A_1 = B_1$ wäre.

Um ferner nach diesem Verfahren des Lagrange ∂f_x zu erhalten, bemerke man, daß (Fig. 36.) der Inhalt

4) $$MNnm = f_{x+h} - f_x = \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

ist, und dabei zwischen den Grenzen MUnm und LNnm liegt, während diese Rechtecke die Grundlinie h und die Höhen Mm oder y_x, und Nn oder y_{x+h} haben. Folglich hat man noch

5) $$MUnm = y \cdot h$$

und

6) $$LNnm = y_{x+h} = y \cdot h + \partial y_x \cdot h^2 + \cdots.$$

Da nun die Reihe 4.) zur Rechten, allemal zwischen den Reihen 5.) und 6.) zur Rechten liegt, für jedes noch so klein gedachte h, so muß, weil letztere beiden mit demselben Gliede $y \cdot h$ anfangen, auch die erstere mit demselben Gliede beginnen; d. h. es ist

$$\partial f_x = y.$$

III. Ist eine Kurve durch eine Gleichung zwischen Polar-Koordinaten θ und r gegeben, indem man (Fig. 37.) Winkel OFM $= \theta$ und FM $= r$ setzt, für jeden Punkt M der Kurve, während θ im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt seyn soll, so ist nicht bloß r eine Funktion von θ, sondern es sind auch Bogen AM und Inhalt AFM Funktionen von θ, die wir durch s_θ und f_θ vorstellen wollen.

Denkt man sich nun θ um das unendlich-kleine Stück MFN $= d\theta$ gewachsen, und mit FM $= r$ den Kreisbogen Mm gezogen, so hat man

$$Mm = r \cdot d\theta \quad \text{und} \quad Nm = dr.$$

Da man nun nach Leibnitz MNm als ein bei m rechtwinkliches Dreieck ansehen kann, in welchem MN $= ds$ die Hypothenuse ist, so hat man sogleich nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

1) $$ds = \sqrt{r^2 \cdot d\theta^2 + dr^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

d. h.

2) $$\partial s_\theta = \sqrt{r^2 + \partial r_\theta^2}.$$

Der Zuwachs MFN $= df$ des Inhalts AFM $= f$ besteht aus dem Kreis-Sektor MFm, — dessen Bogen Mm $= r \cdot d\theta$, und dessen Radius r ist, dessen Inhalt also $= \frac{1}{2}r^2 \cdot d\theta$ gefunden wird, — und dem Dreiecke MNm, dessen Inhalt $= \frac{1}{2}r \cdot dr \cdot d\theta$ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist und daher (nach §. 50.) gegen $\frac{1}{2}r^2 \cdot d\theta$ verschwindet. Also ist

3) $$df = \tfrac{1}{2}r^2 \cdot d\theta; \text{ folglich } \frac{df}{d\theta} = \tfrac{1}{2}r^2,$$

d. h.

4) $$\partial f_\theta = \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{1}{2}r_\theta^2.$$

IV. Wollte man dieselben Resultate nach Ansicht des Lagrange finden, so müßte man, um z. B. für die letztere Aufgabe das Verfahren speciell nachzuweisen, zwei Grenzen, nämlich den Kreis-Sektor MmF und den Kreis-Sektor nNF aufsuchen, zwischen denen der zum Winkel MFN $= h$ gehörige Zuwachs MFN des Inhalts AMF liegt. Man hat dann

$$AFM = f_\theta, \quad \text{also} \quad AFN = f_{\theta+h};$$

folglich

1) $$MFN = f_{\theta+h} - f_\theta = \partial f_\theta \cdot h + \partial^2 f_\theta \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Nun ist aber

2) $$\text{Sekt. MmF} = \tfrac{1}{2}r^2 \cdot h$$

und

3) $$\text{Sekt. NnF} = \tfrac{1}{2}(r_{\theta+h})^2 \cdot h = \tfrac{1}{2}r^2 \cdot h + r \cdot \partial r_\theta \cdot h^2 + \cdots$$

Da nun die Reihe 1.) für jedes noch so kleine h zwischen den Reihen 2.) und 3.) liegt, die beide mit $\frac{1}{2}r^2 \cdot h$ anfangen, so muß

$$\partial f_\theta = \tfrac{1}{2}r^2$$

seyn. W. z. f. w.

Anmerkung. Man übersehe dabei nicht, 1) daß der hier durch s_θ ausgedrückte Bogen AM genau derselbe ist, der kurz vorher durch s_x ausgedrückt gedacht worden, daß daher $\partial s_\theta = \partial s_x \cdot \partial x_\theta$ seyn muß; 2) daß aber der durch f_θ bezeichnete Inhalt AFM von dem kurz vorher durch f_x bezeichneten Inhalte APM ganz verschieden ist.

§. 175.

Ist (Fig. 37.) $AP = x$, $PM = y$, Winkel $AFM = \theta$ und $FM = r$ und $OF = c$, so hat man zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y, und den Polar-Koordinaten-Werthen θ und r die beiden Gleichungen (§. 125.),

1) $x = c - r\cdot\cos\theta$ und 2) $y = r\cdot\sin\theta$,

so daß, wenn man noch die Gleichung der Kurve AMN hat, drei Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen x, y, r und θ bestehen. Man kann daher drei dieser Veränderlichen, z. B. x, y und r, als Funktionen der vierten θ ansehen. Differenziirt man nun die Gleichungen 1.) und 2.) zweimal hinter einander nach allem θ, so erhält man noch

3) $\partial x_\theta = +r\cdot\sin\theta - \partial r_\theta.\cos\theta$;

4) $\partial y_\theta = r\cdot\cos\theta + \partial r_\theta\cdot\sin\theta$;

5) $\partial^2 x_\theta = +r\cdot\cos\theta + 2\partial r_\theta\cdot\sin\theta - \partial^2 r_\theta\cdot\cos\theta$;

6) $\partial^2 y_\theta = -r\cdot\sin\theta + 2\partial r_\theta\cdot\cos\theta + \partial^2 r_\theta\cdot\sin\theta$.

Mittelst dieser 6 Gleichungen (1.—6.) kann man nun aus allen Ausdrücken, welche x, y, ∂y_x d. h. $\frac{\partial y_\theta}{\partial x_\theta}$, und $\partial^2 y_x$ d. h. $\frac{\partial x_\theta\cdot\partial^2 y_\theta - \partial y_\theta\cdot\partial^2 x_\theta}{\partial x_\theta^3}$ enthalten, die 6 Veränderlichen x, y, ∂x_θ, ∂y_θ, $\partial^2 x_\theta$ und $\partial^2 y_\theta$ eliminiren, und so denselben Ausdruck in einen andern umformen, der statt x, y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ jetzt θ, r, ∂r_θ und $\partial^2 r_\theta$ enthält.

Man hat z. B. den Krümmungshalbmesser ϱ der Kurve an der Stelle M (§. 171. III.) so gefunden:

$$\text{I.} \qquad \varrho = \frac{(1+\partial y_x^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = \frac{(\partial x_\theta^{\,2} + \partial y_\theta^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{\partial x_\theta\cdot\partial^2 y_\theta - \partial y_\theta\cdot\partial^2 x_\theta}.$$

Substituirt man daher hier herein statt ∂x_θ, ∂y_θ, $\partial^2 x_\theta$ und $\partial^2 y_\theta$ die obigen Werthe, so erhält man noch

$$\text{II.} \qquad \varrho = \frac{(r^2 + \partial r_\theta^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{-r^2 - 2\partial r_\theta^{\,2} + r\cdot\partial^2 r_\theta}.$$

Nimmt man z. B. die Gleichung

$$r = a^\theta \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{\log r}{\log a},$$

welche eine Kurve vorstellt, die man logarithmische Spirale nennt, so findet sich

$$\partial r_\theta = a^\theta \cdot \log a \quad \text{und} \quad \partial^2 r_\theta = a^\theta \cdot \log a^2;$$

und es wird nun der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = a^\theta \cdot \sqrt{(1 + \log a^2)} = r \cdot \sqrt{1 + \log a^2} \; ^{*}).$$

---

*) Gewöhnlich denkt man sich aus dem Mittelpunkte C des Krümmungskreises auf den Radius-Vektor FM oder r eine Senkrechte CE gefällt und berechnet dann ME. —

Es ist nämlich die Gleichung der Geraden ME, wenn x' und y' die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte vorstellen (nach §.§. 120. und 121.)

$$y' - y = -tg\,\theta \cdot (x' - x);$$

folglich ist die Gleichung der auf ME senkrechten CE, wenn x'', y'' die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte, a und b dagegen die des Mittelpunktes C des Krümmungskreises sind, (nach §. 121. V. VI.) diese:

$$y'' - b = + cotg\,\theta \cdot (x'' - a).$$

Die Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Durchschnittspunktes E dieser beiden Geraden finden sich daher (nach §. 121. III.) aus den beiden Gleichungen

$$1) \quad \mathfrak{y} - y = - tg\,\theta \cdot (\mathfrak{x} - x) \quad \text{und} \quad 2) \quad \mathfrak{y} - b = + cotg\,\theta \cdot (\mathfrak{x} - a);$$

und dann ist

$$3) \qquad ME = \sqrt{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2} = (\mathfrak{x} - x) \cdot \frac{1}{\sin\theta},$$

während a und b aus den Gleichungen §. 171. III. 6. und 7.) bekannt sind. Substituirt man nun $\frac{y}{c - x}$ statt $tg\,\theta$ und $\frac{c - x}{y}$ statt $cotg\,\theta$, eliminirt man $\mathfrak{y}$ (aus 1. und 2.) und findet man $\mathfrak{x}$, also $\mathfrak{x} - x$, so geht die Gleichung 3.) über in

$$4) \qquad ME = - \frac{r(r^2 + \partial r_\theta^{\,2})}{-r^2 - 2\partial r_\theta^{\,2} + r \cdot \partial^2 r_\theta}.$$

Für die obige logarithmische Spirale wird daher

$$ME = r = FM,$$

d. h. E fällt mit F zusammen.

Anmerkung. Zuweilen werden die Winkel θ von einer andern festen Linie FB aus genommen, welche mit der festen FO den constanten Winkel α bildet. Dann kommt statt des θ in den obigen Formeln 1.) und 2.) jetzt $\theta - \alpha$ zu stehen; und dadurch ändern sich die Gleichungen 3.—6.) auch nur in so weit, als $\theta - \alpha$ statt θ zu stehen kommt. —

Und da in dem Ausdrucke II.) für den Krümmungshalbmesser ϱ, der Veränderliche θ selbst gar nicht vorkommt, so ändert sich die Formel II.) dadurch gar nicht.

Drittes Kapitel.

Anwendungen der Differential-Rechnung auf krumme Flächen und doppelt gekrümmte Linien.

A. Anwendungen auf krumme Flächen.

§. 176.

Berührende Ebene. Normale an die Fläche.

I. An jedem Punkte M einer durch die Gleichung

1) $$L_{x,y,z} = 0$$

gegebenen Fläche, kann man sich eine **berührende Ebene** (Tangential-Ebene) denken, d. h. eine Ebene, welche durch diesen Punkt M hindurchgeht, und deren rings herum an M nächst anliegende Punkte, von den rings herum an M in der krummen Fläche nächst anliegenden Punkten bezüglich weniger weit abstehen, als dies bei jeder andern durch M gelegten Ebene der Fall seyn würde.

Man kann aber auch, analog mit der für die Kurven festgestellten Ansicht des Leibnitz, die Tangential-Ebene als die Verlängerung eines der unendlich-vielen unendlich-kleinen ebenen Elemente betrachten, welche die krumme Fläche bilden.

Um diese berührende Ebene zu finden, bezeichne man die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte durch x', y' und z', so ist ihre Gleichung, da sie durch den Punkt M der Fläche L gehen soll, dessen Koordinaten-Werthe x, y und z sind, (nach §. 140.) nothwendig von der Form

2) $$A(z'-z)+B(y'-y)+C(x'-x)=0,$$

wo z die durch die Gleichung 1.) gegebene Funktion $z_{x,y}$ vorstellt, während z' die durch die Gleichung 2.) gegebene Funktion von x' und y' bedeutet.

Da nun die Ebene 2.) drei nächst neben einander liegende und eine Ebene bildende Punkte mit der krummen Fläche gemein haben soll, so muß, wenn $x' = x$ und $y' = y$ gesetzt wird,

$$z'_{x,y} - z_{x,y} = 0$$

seyn für drei nächst an einander liegende zusammengehörige Werthe von x und y, d. h. es muß

$$z'_{x,y} = z_{x,y}; \quad z'_{x+dx,y} = z_{x+dx,y} \quad \text{und} \quad z'_{x,y+dy} = z_{x,y+dy}$$

seyn, für ein unendlich-klein gedachtes dx und für ein unendlich-klein gedachtes dy, weshalb die beiden letztern Gleichungen (vermöge des Taylor'schen Lehrsatzes und wegen der erstern derselben drei Gleichungen) in

$$3) \quad \partial z'_x = \partial z_x \quad \text{und} \quad 4) \quad \partial z'_y = \partial z_y$$

übergehen*), wenn $\partial z'_x$ und $\partial z'_y$ das bedeuten, was aus $\partial z'_{x'}$ und $\partial z'_{y'}$ wird, wenn in beiden Ausdrücken x und y statt bezüglich x' und y' gesetzt werden.

Nun giebt aber die Gleichung 2.), wenn man sie nach x' und y' differenziirt, und nachgehends x und y statt x' und y' substituirt,

$$A \cdot \partial z'_x + C = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot \partial z'_y + B = 0.$$

Dadurch gehen aber die Gleichungen 3.) und 4.) über in

$$5) \quad A \cdot \partial z_x + C = 0 \quad \text{und} \quad 6) \quad A \cdot \partial z_y + B = 0.$$

Bestimmt man hieraus B und C, so geht die Gleichung 2.) der berührenden Ebene in

$$(\odot) \cdots \quad (z' - z) - \partial z_y \cdot (y' - y) - \partial z_x \cdot (x' - x) = 0$$

---

*) Es ist nämlich nach dem Taylor'schen Satze

$$z'_{x+dx,y} = z'_{x,y} + \partial z'_x \cdot dx + \partial^2 z'_x \cdot \frac{dx^2}{2!} + \cdots$$
$$= z'_{x,y} + \partial z'_x \cdot dx,$$

weil man die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung außer Acht lassen muß. Dasselbe gilt von $z_{x+dx,y}$; dasselbe von $z'_{x,y+dy}$ und $z_{x,y+dy}$, weil immer der einfache Taylor'sche Lehrsatz in Anwendung kommt.

über, während ∂z_y und ∂z_x aus der Gleichung 1.) gefunden werden können und müssen. — Differenziirt man nämlich die Gleichung 1.) abwechselnd nach x und nach y, so erhält man

$$\partial L_z \cdot \partial z_x + \partial L_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial L_z \cdot \partial z_y + \partial L_y = 0.$$

Und substituirt man die hieraus für ∂z_x und ∂z_y hervorgehenden Ausdrücke in die Gleichung (⊙), so nimmt solche noch diese Form an:

$$(☾) \cdots \quad \partial L_z \cdot (z' - z) + \partial L_y \cdot (y' - y) + \partial L_x \cdot (x' - x) = 0.$$

II. Man kann diese Tangential-Ebene auch aus einer allgemeinen Theorie der Osculation zweier durch die Gleichungen

$$1) \quad L_{x,y,z} = 0 \qquad \text{und} \qquad 2) \quad L'_{x',y',z'} = 0$$

oder, wenn man letztere nach z und z' auflöst, durch die Gleichungen

$$3) \quad z = z_{x,y} \qquad \text{und} \qquad 4) \quad z' = z'_{x',y'}$$

gegebenen krummen Flächen ableiten, welche Theorie wir hier (zur Abwechslung nach der Ansicht des Lagrange, nach welcher die krummen Flächen stetig gekrümmt sind) hersetzen wollen.

Sollen nämlich beide Flächen L und L' den bestimmten Punkt M mit einander gemein haben, dessen Koordinaten-Werthe bestimmte Werthe von x, y, z sind, aber durch x, y, z bezeichnet seyn mögen, so muß, wenn $x' = x$ und $y' = y$ gesetzt wird,

$$5) \qquad z_{x,y} = z'_{x,y}$$

seyn. Sind nun dx und dy unendlich-klein, aber von einander ganz unabhängig, so ist $z_{x+dx,y+dy} - z'_{x+dx,y+dy}$ der mit OZ parallele Abstand zweier zu $x+dx$, $y+dy$ gehörigen, dem Punkte M in beiden Flächen nächst anliegenden Punkte, die rings herum um den Punkt M liegen, weil dx und dy ganz beliebig gedacht sind. Dieser Abstand läßt sich nun nach dem Taylor'schen Lehrsatze für zwei Veränderliche (§. 153.) in eine nach dx und dy fortlaufende Reihe entwickeln; er ist nämlich wegen der Gleichung 5.)

$$(\delta)\cdots = (\partial z_x - \partial z'_x)\cdot dx + (\partial z_y - \partial z'_y)\cdot dy$$
$$+ (\partial^2 z_x - \partial^2 z'_x)\cdot\frac{dx^2}{2!} + (\partial^{1,1} z_{x,y} - \partial^{1,1} z'_{x,y})\cdot dx\cdot dy$$
$$+ (\partial^2 z_y - \partial^2 z'_y)\cdot\frac{dy^2}{2!}$$
$$+ (\partial^3 z_x - \partial^3 z'_x)\cdot\frac{dx^3}{3!} +$$ die übrigen Glieder der dritten und höhern Dimensionen von dx und dy.

Hat nun dieser Ausdruck ein mit dx^1 oder dy^1 afficirtes Glied nicht, so ist er unendlich-klein von der zweiten Ordnung, also unendlich-klein gegen den unendlich-kleinen Abstand, der vorhanden ist, wenn ein Glied der ersten Dimension noch vorkommt. Hat derselbe Ausdruck auch kein Glied der zweiten Dimension von dx und dy, so ist er unendlich-klein von der dritten Ordnung, also wiederum unendlich-klein gegen vorher, wo er unendlich-klein von der zweiten Ordnung war. U. s. w. f.

Es haben also beide Flächen L und L′ an dem durch x, y, z gegebenen bestimmten Punkte M

α) eine Osculation der ersten Ordnung oder Berührung, wenn außer der Gleichung 5.) noch die beiden Gleichungen

6) $\partial z_x = \partial z'_x$ und 7) $\partial z_y = \partial z'_y$

statt finden;

β) eine Osculation der zweiten Ordnung, wenn außer den drei Gleichungen 5.—7.) auch noch diese drei Gleichungen

8) $\partial^2 z_x = \partial^2 z'_x$; 9) $\partial^{1,1} z_{x,y} = \partial^{1,1} z'_{x,y}$

und 10) $\partial^2 z_y = \partial^2 z'_y$

identisch werden.

γ) U. s. w. f.

Nimmt man nun statt $L' = 0$ die Gleichung einer Ebene, nämlich die Gleichung

$$A(z'-z) + B(y'-y) + C(x'-x) = 0,$$

so findet sich $\partial z'_{x'} = -\frac{C}{A}$ und $\partial z'_{y'} = -\frac{B}{A}$, also auch $\partial z'_x = -\frac{C}{A}$ und $\partial z'_y = -\frac{B}{A}$, und die Gleichungen 6.) und 7.) geben nun

$C = -A \cdot \partial z_x$ und $B = -A \cdot \partial z_y$. Diese Werthe statt C und B substituirt, geben die Gleichung der Berührungs-Ebene, wenn man noch durch A wegdividirt, nämlich

$$(z' - z) - \partial z_y \cdot (y' - y) - \partial z_x \cdot (x' - x) = 0.$$

III. Die durch M hindurchgehende, auf der Tangential-Ebene senkrechte Gerade heißt die Normale der krummen Fläche an dieser Stelle. — Ihre Gleichungen sind daher (nach §. 142. VIII.)

$$(\odot) \cdots \quad \begin{cases} \partial z_x \cdot (z'' - z) + (x'' - x) = 0 \\ \partial z_y \cdot (z'' - z) + (y'' - y) = 0 \end{cases}$$

oder

$$(☾) \cdots \quad \begin{cases} \partial L_x \cdot (z'' - z) + \partial L_z \cdot (x'' - x) = 0 \\ \partial L_y \cdot (z'' - z) + \partial L_z \cdot (y'' - y) = 0. \end{cases}$$

Und sind λ, μ, ν die drei Winkel, welche diese Normale mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so findet sich hieraus (nach §. 142.)

$$\cos\lambda = \frac{-\partial z_x}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}} = \frac{\partial L_x}{W},$$

$$\cos\mu = \frac{-\partial z_y}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}} = \frac{\partial L_y}{W},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}} = \frac{\partial L_z}{W},$$

wenn

$$W = \sqrt{\partial L_x^2 + \partial L_y^2 + \partial L_z^2}$$

gesetzt wird.

§. 177.

Will man eine Kugel finden, welche mit der gegebenen Fläche

1) $$L_{x,y,z} = 0$$

eine Osculation habe, so muß man von der allgemeinen Gleichung der Kugel ausgehen, welche diese seyn wird:

2) $$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = r^2,$$

wenn a, b, c die Koordinaten-Werthe des Mittelpunktes, r aber ihren Radius vorstellt. — Diese Gleichung ist nun (in §. 176. II.) statt $L' = 0$ zu nehmen. Sie giebt, wenn sie nach x' und y' differenziirt wird,

$$3) \qquad (x'-a)+(z'-c)\cdot\partial z'_{x'} = 0$$

und

$$4) \qquad y'-b+(z'-c)\cdot\partial z'_{y'} = 0.$$

Und setzt man hier erstlich x statt x', und y statt y', so genügt man den Bedingungen §. 176. II. 5.—7.), wenn man hier (in 2.—4.) z statt z', ferner ∂z_x, ∂z_y statt bezüglich $\partial z'_x$, $\partial z'_y$ substituirt. Man erhält dadurch

$$\text{I.} \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

$$\text{II.} \qquad (x-a)+(z-c)\cdot\partial z_x = 0$$

$$\text{III.} \qquad (y-b)+(z-c)\cdot\partial z_y = 0;$$

wo die Gleichungen II.) und III.) auch dadurch erhalten werden, daß man die I.) nach x und nach y differenziirt, wo aber z, ∂z_x, ∂z_y aus der Gleichung $L = 0$ genommen werden müssen, während x und y bestimmte Werthe sind, welche dem bestimmten Punkte M angehören, an welchem die Berührung statt finden soll. Sind diese drei Gleichungen (I.—III.) erfüllt, so hat die Kugel mit $L = 0$, eine Berührung der ersten Ordnung. Sie sind durch die Werthe von a, b, c und r auf unendlich viele Arten zu erfüllen; es giebt also unendlich viele berührende Kugeln für dieselbe Stelle M der Fläche L. Die Mittelpunkte aller dieser unendlich vielen, die Fläche L an derselben Stelle M berührenden Kugeln, liegen in der durch die Gleichungen II.) und III.) zwischen den Koordinaten-Werthen a, b, c gegebenen Geraden, welche (nach §. 176. III.) keine andere als die Normale der Fläche L an M, ist.

Differenziirt man die Gleichungen 3.) und 4.) noch einmal nach x' und nach y', so erhält man noch zur Bestimmung der zweiten Ableitungen $\partial^2 z'_{x'}$, $\partial^{1,1} z'_{x',y'}$ und $\partial^2 z'_{y'}$; und wenn man sogleich x und y statt x' und y' setzt, die drei Gleichungen

$$5) \qquad 1+\partial z'^2_x+(z'-c)\cdot\partial^2 z'_x = 0$$

$$6)\qquad \partial z'_x \cdot \partial z'_y + (z'-c)\cdot\partial^{1,1} z'_{x,y} = 0$$

$$7)\qquad 1 + \partial z'^2_y + (z'-c)\cdot\partial^2 z'_y = 0.$$

Sollte nun die Kugel mit der Fläche $L=0$, an M eine Osculation der zweiten Ordnung haben, so müßten auch noch diese drei Gleichungen (5.—7.) identische werden, so daß für z', $\partial z'_x$, $\partial z'_y$, $\partial^2 z'_x$, $\partial^{1,1} z'_{x,y}$, $\partial^2 z'_y$ bezüglich die aus $L=0$ zu entnehmenden z, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$ substituirt werden*). Weil aber von den vier Unbekannten a, b, c, r vermöge der Gleichungen I.—III.) bereits drei bestimmt sind, so wird im Allgemeinen eine Kugel mit einer Fläche L keine Osculation der zweiten Ordnung haben können, weil man zur Bestimmung des einzigen noch Unbestimmten drei Gleichungen bekommt, die sich im Allgemeinen widersprechen werden. — Denkt man sich jedoch in allen sechs Gleichungen nicht bloß a, b, c und r, sondern auch noch x und y selbst als gesucht, so wird man die Stellen der Fläche L finden, wenn deren vorhanden sind, für welche eine Kugel existirt, die mit L eine Osculation der zweiten Ordnung hat.

Wenn aber in dem Ausdrucke §. 176. II. σ.) die Glieder der zweiten Dimension von dx und dy, sobald unter $L'=0$ die obige Gleichung 2.) der Kugel verstanden wird, nicht für jedes dx und dy verschwinden können, so können sie doch für irgend ein bestimmtes Verhältniß $\frac{dy}{dx}=m$ von dx und dy verschwinden, und dies ist allemal der Fall, so oft

$$\text{IV.}\qquad (\partial^2 z'_x - \partial^2 z_x) + 2\cdot(\partial^{1,1} z'_{x,y} - \partial^{1,1} z_{x,y})\cdot m + (\partial^2 z'_y - \partial^2 z_y)\cdot m^2 = 0$$

ist. Bestimmt man also aus den Gleichungen I.—IV.) sowohl a, b, c als auch r, so hat man die Kugel, welche, wenn auch

*) Diese drei neuen Bedingungs-Gleichungen einer Osculation der zweiten Ordnung würden also auch entstehen, wenn man die Gleichungen II.) und III.) gerade zu (eine jede) nach x und nach y differenziirte.

nicht mit der ganzen Fläche L, doch mit allen den durch m gegebenen und eine gemeinschaftliche Tangente habenden Schnitten dieser Fläche, eine Osculation der zweiten Ordnung hat.

Es drückt nämlich $m = \frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente eines Winkels aus, den eine in der Ebene XOY liegende Gerade M_1N_1 mit der Axe OX macht (wo M_1 die Projektion von M auf XOY vorstellen mag). Die auf XOY senkrechte Ebene MM_1N_1 schneidet nun die Fläche L in einer Kurve und die Tangential-Ebene in einer Geraden MN, welche Tangente dieser Kurve ist. Denkt man sich nun durch diese Tangente MN eine beliebige Ebene gelegt und diese um MN, wie um eine Axe sich herumdrehend, so entstehen eine unendliche Menge von Kurven als Schnitte dieser Ebene mit der Fläche L, die alle durch den Punkt M hindurch gehen und alle die gemeinschaftliche Tangente MN haben. Unter allen Kugeln kommt nun die durch die Gleichungen I.—IV.) bestimmte, allen diesen Schnitten zugleich, dicht an dem Punkte M, am nächsten *). — Jeder dieser, die gemeinschaftliche Tangente MN habenden Schnitte liegt in einer anderen Ebene und hat in seiner Ebene eine Normale an M und einen Krümmungskreis, also einen Krümmungshalbmesser. Alle diese Normalen bilden eine auf MN senkrechte Ebene, in welcher auch die Normale auf die Fläche L selbst liegt, und alle diese Krümmungshalbmesser sind im Allgemeinen von einander verschieden. Der Krümmungshalbmesser des Schnittes dagegen, welcher durch die Normale der Fläche L (und die Tangente MN) hindurch geht, fällt genau, seiner Lage und seiner Größe nach, mit dem Halbmesser r der aus den Gleichun-

*) Man überzeugt sich davon durch Rechnung am schnellsten, wenn man neue Koordinaten-Ebenen einführt, so daß die neue Ebene XOY auf einer beliebigen dieser Schnitt-Ebenen senkrecht steht. — Nach Leibnizischen Ansichten ist diese Rechnung nicht nöthig, weil alle diese Schnitte das gerade Element der gemeinschaftlichen Tangente mit einander gemein haben.

gen I.—IV.) gefundenen **Krümmungs-Kugel** zusammen, welche auch mit diesem Schnitte eine Osculation der zweiten Ordnung hat*), während a, b, c und r Funktionen von m sind.

Sucht man nun die Werthe von m, für welche r ein Maximum oder ein Minimum wird (dadurch daß man $\partial r_m = 0$ setzt und daraus m findet), so ergeben sich für m *zwei* Werthe, von denen der eine den Krümmungshalbmesser r zu einem Maximum macht (so daß die Krümmung dieses Schnittes an der Stelle M die kleinste ist), der andere dagegen zu einem Minimum) so daß die Krümmung dieses anderen Schnittes an derselben Stelle M die größeste wird). Man findet ferner, daß die beiden Tangenten dieser Normal-Schnitte der größesten und kleinsten Krümmung, allemal auf einander senkrecht stehen, so daß man von diesen Schnitten selbst sagt, „sie stehen auf einander „senkrecht"**).

Endlich läßt sich der Krümmungshalbmesser r eines jeden durch die Normale an L gelegten Schnittes, in die Krümmungshalbmesser r' und r'' der größten und kleinsten Krümmung und die Winkel α' und α'' ausdrücken, welche die Ebene des ersteren Kreises, bezüglich mit den Ebenen der beiden letzteren bildet. Es findet sich nämlich

$$r = \frac{r' \cdot r''}{r' \cdot \cos \alpha'^2 + r'' \cdot \cos \beta''^2}.$$

§. 178.

Von den Krümmungslinien.

Hat man nach §. 176. III.) die Gleichungen der Normale an M gefunden, so findet man die Gleichungen der Normale an

---

*) Dies bestätigt die Rechnung am bequemsten, wenn man die *neue* Koordinaten-Ebene XOY auf die Normale der Fläche L senkrecht, d. h. mit der Tangential-Ebene an M parallel oder zusammenfallend sich denkt.

**) Auch dieses fällt aus der Rechnung am einfachsten in die Augen, wenn man die Tangential-Ebene an M selbst zur neuen Koordinaten-Ebene XOY nimmt.

an dem nächsten durch $x+dx$, $y+dy$ gegebenen Punkte der Fläche L, wenn man in diesen erstern Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} \partial z_x \cdot (z'' - z) + (x'' - x) = 0 \\ \partial z_y \cdot (z'' - z) + (y'' - y) = 0 \end{cases}$$

$x+dx$ statt x, und $y+dy$ statt y setzt, dabei aber dx und dy, wie immer, unendlich-klein sich denkt.

Diese beiden Normalen werden sich im allgemeinen nicht schneiden, denn im Durchschnittspunkte wären die x'', y'', z'' in beiden Paaren Gleichungen die einen und dieselben. Eliminirt man aber unter der Voraussetzung eines Durchschnittspunktes, aus allen vier Gleichungen die drei Koordinaten-Werthe x'', y'', z'', so bleibt eine Gleichung zwischen m, x und y, so daß m in die gegebenen Werthe x und y sich ausdrückt. Und so bekommt man die Lage des Schnittes, d. h. die Richtung, in welcher der an M nächst anliegende Punkt N gewählt werden muß, wenn seine Normale auf L, die erstere zu M gehörige Normale auf L, schneiden soll. Ist aber $\varphi_{x,y} = 0$ die eine der Gleichungen 1.), so ist die zugehörige Gleichung der zweiten Normale offenbar

$$\varphi_{x+dx,y+dy} = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad \varphi_{x,y} + d\varphi = 0,$$

während (nach §. 161.)

$$d\varphi = \partial\varphi_x \cdot dx + \partial\varphi_y \cdot dy$$

gefunden wird. Da nun im Falle eines Durchschnittspunktes beider Normalen, die beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\varphi + d\varphi = 0$ zu gleicher Zeit statt haben, so reducirt sich für die Koordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes beider Normalen, die letztere Gleichung bloß auf

$$d\varphi = 0 \qquad \text{oder} \qquad \partial\varphi_x \cdot dx + \partial\varphi_y \cdot dy = 0.$$

Substituirt man nun in diese Gleichung statt φ hinter einander die Ausdrücke zur Linken in den Gleichungen 1.), so erhält man

$$2)\quad \begin{cases} \partial^2 z_x (z'' - z) - \partial z_x^2 - 1 + [\partial^{1,1} z_{x,y} (z'' - z) - \partial z_x \cdot \partial z_y] \cdot m = 0 \\ \partial^{1,1} z_{x,y} (z'' - z) - \partial z_x \cdot \partial z_y + [\partial^2 z_y (z'' - z) - \partial z_y^2 - 1] \cdot m = 0 \end{cases}$$

als diejenigen Gleichungen, worauf sich die der zweiten Nor-

male zurückziehen, sobald für dieselben Werthe von x'', y'' und z'' die Gleichungen 1.) zu gleicher Zeit statt finden sollen. Eliminirt man nun aus allen vier Gleichungen 1.) und 2.) x'', y'' und z'', d. h. aus den beiden Gleichungen 2.) z'', so erhält man die Gleichung in m, welche die Lage des Schnittes liefert, in welchem der an M nächst anliegende Punkt genommen werden muß, wenn die ihm angehörige Normale auf L, die dem Punkte M angehörige Normale auf dieselbe Fläche L, schneiden soll. Den Werth von m erhält man übrigens, da $z_{x,y}$ also auch ∂z_x, ∂z_y etc. etc. gegeben sind, in x und y ausgedrückt.

Diese Gleichung zur Bestimmung dieses Werthes von m wird quadratisch und die beiden Werthe von m fallen genau mit den beiden Werthen von m zusammen, welche die Lage der Schnitte der größten und kleinsten Krümmung geben, wie der Vergleich der ersteren Rechnung mit dieser letztern ergiebt. Daraus geht zu gleicher Zeit noch hervor, daß der Durchschnittspunkt der beiden sich schneidenden nächst auf einander folgenden Normalen allemal auch der Mittelpunkt des größten oder kleinsten Krümmungskreises ist.

Die Punkte auf der krummen Fläche, von denen je zwei auf einander folgende in der Ebene der größten Krümmung, oder je zwei auf einander folgende allemal in der Ebene der kleinsten Krümmung liegen, bilden zwei zu dem Punkte M gehörige und in M auf einander senkrecht stehende Kurven, welche **Krümmungslinien** genannt werden, und von denen die eine die zu M gehörige Linie der kleinsten Krümmung, die andere die der größten Krümmung ist*).

*) Um die Gleichungen dieser Krümmungslinien zu finden, müßte man die Gleichung ihrer Projektion auf XOY suchen. Wäre aber für einen beliebigen Punkt dieser Projektion, $y' = y'_{x'}$, die gesuchte Gleichung zwischen seinen Koordinaten-Werthen x' und y', so hätte man

$$(\odot) \cdots \qquad m = \partial y'_{x'},$$

während m die vorhin aus den Gleichungen 2.) gefundene Funktion von

§. 179.

Denkt man sich durch M eine Ebene MM_1N_1 gelegt senkrecht auf die Koordinaten-Ebene XOY, und welche mit der Ebene XOZ den Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $\frac{dy}{dx} = m$ ist, so ist die Gleichung der Geraden M_1N_1, in welcher die XOY von diesem Schnitte getroffen wird, diese:

$$1) \qquad y' - y = m(x' - x),$$

wenn x' und y' die Koordinaten-Werthe irgend eines ihrer Punkte vorstellen. Diese Gleichung mit der Gleichung der Fläche

$$2) \qquad L_{x',y',z'} = 0$$

in Verbindung, wo x', y', z' in beiden Gleichungen die Koordinaten-Werthe der Punkte der Geraden und der Fläche vorstellen, geben den Schnitt, welchen die MM_1N_1 mit der Fläche gemein hat. Durch diese beiden Gleichungen werden y' und z' Funktionen von x' allein.

Will man die geradlinige Tangente MN in M an diesem Schnitte finden, so muß man die Gleichung 1.) mit der Gleichung der Tangential-Ebene §. 176. I. ⊙.), nämlich mit

$$3) \qquad (z' - z) - \partial z_y \cdot (y' - y) - \partial z_x \cdot (x' - x) = 0$$

verbinden und x', y', z' als die Koordinaten-Werthe dieser geradlinigen Tangente MN ansehen, während sie den Gleichungen 1.) und 3.) genügen, so daß y' und z' wiederum als Funktionen von x' (aber natürlich andere wie vorher) hervorgehen.

Diese geradlinige Tangente MN bildet mit ihrer Projektion M_1N_1 einen Winkel w, dessen trigonometrische Tangente so gefunden wird, nämlich:

---

x und y vorstellt, jedoch unter der Voraussetzung, daß x' und y' statt x und y gesetzt werden.

Alles kommt nun darauf an, aus einer solchen Gleichung (⊙) zwischen x', $y'_{x'}$ und $\partial y'_{x'}$ die unbekannte Funktion $y'_{x'}$ selbst finden zu können. Dies ist der Gegenstand der später (im 2ten Bande) folgenden Integral-Rechnung, weshalb hier die Aufgabe selbst nur angedeutet werden kann.

$$tg\,w = \frac{z'-z}{\sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}} = \frac{\partial z_x + m\cdot\partial z_y}{\sqrt{1+m^2}},$$

wenn man statt $y'-y$ und $z'-z$ ihre Werthe aus 1.) und 3.) substituirt *).

Sucht man die durch m gegebene Lage des Schnitts, für welchen dieser Winkel w ein größter oder ein kleinster wird, so muß man (nach §. 167.)

$$\partial(tg\,w)_m = 0$$

setzen; dies giebt

$$4)\qquad \partial z_y - \partial z_x\cdot m = 0 \qquad \text{oder} \qquad m = \frac{\partial z_y}{\partial z_x},$$

so daß, weil $z_{x,y}$, also auch ∂z_x und ∂z_y bekannt sind, m eine Funktion von x und y wird. Für diesen Schnitt ist also der Abfall von dem Punkte M gegen die Koordinaten-Ebene XOY am steilsten. Geht man auf diese Weise von Punkt zu Punkt in der Fläche L jedesmal in dem Schnitte des steilsten Abfalles fort, so bekommt man die durch den Punkt M hindurchgehende Kurve des steilsten Abfalls dieser Fläche L **).

*) Denkt man sich nach Leibnitzischen Ansichten den Punkt N, dessen Koordinaten-Werthe x', y', z' sind, dicht an M, so liegt er in der geradlinigen Tangente und in der Fläche L zugleich. Dann ist $z'-z = dz$, $y'-y = dy$ und $x'-x = dx$, während dx beliebig aber unendlich-klein gedacht ist, und dy und dz aus der Gleichung der Fläche L (2.) und aus der Gleichung des Schnittes (1.) entnommen werden müssen. Dabei hat man

$$tg\,w = \frac{dz}{\sqrt{dy^2+dx^2}}.$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung

$$\frac{dy}{dx} = m \qquad \text{oder} \qquad dy = m\cdot dx;$$

und aus $L_{x,y,z} = 0$ d. h., wenn diese Gleichung nach z aufgelöst gedacht wird, aus $z = z_{x,y}$ folgt, sobald x um dx und zugleich y um dy wächst, (nach §. 161.)

$$dz = \partial z_x\cdot dx + \partial z_y\cdot dy.$$

Substituirt man diese Werthe statt dy und dz in die Gleichung für die $tg\,w$, so erhält man dasselbe, was oben.

**) Sollte die Gleichung dieser Kurve des steilsten Abfalls gefunden

B. Anwendungen auf doppelt gekrümmte Linien.

§. 180.

Geradlinige Tangente und Normal-Ebene an eine Linie doppelter Krümmung.

I. Bezeichnet man den Bogen einer doppelt gekrümmten (durch zwei Gleichungen zwischen x, y und z gegebenen) Linie, von $x=\mathfrak{x}$ an bis zu $x=x$ hin, durch s, und denkt man sich nun x um dx wachsend, so daß auch y um dy, und z um dz wächst, so wächst auch der Bogen s um ds und man hat (nach §. 135. II. 6.), wenn man nach Leibnitz ds als geradlinig sich denkt, und als die Entfernung zweier bezüglich durch x, y, z und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ gegebener Punkte,

$$1)\qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

während (nach §. 160.)

$$dy=\partial y_x\cdot dx,\quad dz=\partial z_x\cdot dx \quad\text{und}\quad ds=\partial s_x\cdot dx$$

seyn muß, so daß

$$2)\qquad ds=\sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial z_x{}^2}\cdot dx$$

und

$$3)\qquad \partial s_x=\sqrt{1+\partial y_x{}^2+\partial z_x{}^2}$$

wird. Denkt man sich aber noch x selbst, also auch y und z als Funktionen von t, so wird auch s eine Funktion von t, und man hat dann (nach §. 150. B. I.)

$$\partial s_t=\partial s_x\cdot\partial x_t;\quad \partial z_t=\partial z_x\cdot\partial x_t \quad\text{und}\quad \partial y_t=\partial y_x\cdot\partial x_t$$

und die Gleichung 3.) geht dadurch über in

$$4)\qquad \partial s_t=\sqrt{\partial x_t{}^2+\partial y_t{}^2+\partial z_t{}^2}.$$

---

werden, so müßte man die Gleichung $y'=y'_{x'}$ ihrer Projektion auf die Ebene XOY suchen, während x' und y' die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes dieser Projektion vorstellen. Dann hätte man die Gleichung $m=\partial y'_{x'}$, wenn statt m der Werth aus 4.) gesetzt, dagegen statt x und y bezüglich x' und y' substituirt werden; und der später folgenden Integral-Rechnung kommt es dann wieder zu, aus dieser Gleichung zwischen x', $y'_{x'}$ und $\partial y'_{x'}$ die Funktion $y'_{x'}$ selbst zu finden.

II. Verlängert man das Element ds, so hat man nach Leibnitz die Tangente dieser doppelt gekrümmten Kurve. Sind α, β, γ die Winkel, welche sie mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so hat man (nach §. 135. I. 2.)

$$1) \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

oder auch, wenn x, y, z wieder als Funktionen von t angesehen werden, so daß der nächste Punkt der Kurve entsteht, wenn man t um dt wachsen läßt, weil dann

$dx = \partial x_t \cdot dt$, $dy = \partial y_t \cdot dt$, $dz = \partial z_t \cdot dt$ und $ds = \partial s_t \cdot dt$ ist, und wenn man bloß ∂x, ∂y, etc. statt ∂x_t, ∂y_t, etc. etc. schreibt,

$$2) \quad \cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und } \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial s},$$

während schon gefunden worden ist

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

wo alle bloßen ∂ sich auf den Veränderlichen t beziehen.

Projicirt man diese gradlinige Tangente auf die Ebene XOY, so geht diese Projektion durch die Punkte, deren Koordinaten-Werthe bezüglich x, y und x+dx, y+dy sind. Nennt man daher x' und y' die Koordinaten-Werthe irgend eines beliebigen Punktes dieser Projektion, so hat man die Gleichung derselben

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} = \partial y_x$$

oder

$$3) \quad (y'-y)\cdot\partial x = (x'-x)\cdot\partial y \text{ oder } y'-y = \partial y_x \cdot (x'-x).$$

Eben so ist die Gleichung der Projektion derselben Tangente auf die Ebene XOZ, diese:

$$4) \quad (z'-z)\cdot\partial x = (x'-x)\cdot\partial z \text{ oder } z'-z = \partial z_x \cdot (x'-x).$$

Diese beiden Gleichungen 3.) und 4.) sind daher (nach §. 142.) die Gleichungen der geradlinigen Tangente der Kurve doppelter Krümmung an der durch x, y, z gegebenen Stelle, wo x', y', z'

die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes derselben vorstellen *).

III. Auf diese Tangente kann man durch den Punkt M, dessen Koordinaten-Werthe x, y, z sind, eine Normal-Ebene legen, d. h. eine Ebene, die auf ihr senkrecht steht. — Sind x'', y'', z'' die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes dieser Ebene, so findet sich ihre Gleichung (nach §. 142.)

1) $(z''-z)\cdot\partial z_x + (y''-y)\cdot\partial y_x + (x''-x) = 0$,

oder auch, wenn x, also auch y und z noch als Funktionen von t angesehen werden,

---

*) Diese Gleichungen der geradlinigen Tangente an die Kurve kann man auch dadurch finden, daß man an beide, durch die Gleichungen

1) $L_{x,y,z} = 0$ und 2) $L'_{x,y,z} = 0$

gegebenen Flächen, deren Durchschnitt unsere Linie doppelter Krümmung ist, Tangential-Ebenen legt, deren Gleichungen (nach §. 176.) folgende sind

3) $\partial L_z\cdot(z'-z) + \partial L_y\cdot(y'-y) + \partial L_x\cdot(x'-x) = 0$

4) $\partial L'_z\cdot(z'-z) + \partial L'_y\cdot(y'-y) + \partial L'_x\cdot(x'-x) = 0$,

sobald in 3.) x', y', z' die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der erstern Tangential-Ebene (an L) vorstellen, in 4.) dagegen die x', y', z' eine andere Bedeutung haben, nämlich die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der zweiten Tangential-Ebene (an L) vorstellen, während beide Tangential-Ebenen dem Punkte M angehören, dessen Koordinaten-Werthe x, y, z sind.

Denkt man sich nun in beiden Gleichungen 3.) und 4.) x', y' und z' als dieselben Werthe habend, so stellen sie die Durchschnittslinie beider Tangential-Ebenen vor; und dies ist offenbar die geradlinige Tangente an die durch 1.) und 2.) gegebene Linie doppelter Krümmung.

Die Uebereinstimmung dieser Gleichungen 3.) und 4.) mit den obigen Gleichungen 3.) und 4.) im Texte weist sich so nach: Differenziirt man nämlich die hiesigen Gleichungen 1.) und 2.) nach allem x, so erhält man

$$\partial L_x + \partial L_y\cdot\partial y_x + \partial L_z\cdot\partial z_x = 0$$

und

$$\partial L'_x + \partial L'_y\cdot\partial y_x + \partial L'_z\cdot\partial z_x = 0.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen und aus den Gleichungen 3.) und 4.) des Textes sowohl ∂y_x als auch ∂z_x, so erhält man die Gleichungen 3.) und 4.) der Note.

$$2) \quad (z'' - z)\cdot\partial z + (y'' - y)\cdot\partial y + (x'' - x)\cdot\partial x = 0,$$

wo die an ∂x, ∂y, ∂z rechts unten anzuhängenden t der Kürze wegen, wie vorher schon immer, im Schreiben weggelassen sind.

§. 181.

Krümmungs-Ebene; Krümmungs-Kreis. Berührungs-Winkel.

I. Wenn auch nicht alle Punkte einer doppelt gekrümmten Linie in einer und derselben Ebene liegen, so bilden doch je drei nächst auf einander folgende Punkte derselben eine Ebene und diese heißt die Krümmungs-Ebene an dieser Stelle; in selbiger liegt der Krümmungskreis dieser Stelle, welcher durch dieselben drei Punkte hindurchgeht und welcher den Krümmungshalbmesser dieser Stelle zum Radius hat.

Ist nun

$$1) \qquad Az' + By' + Cx' + D = 0$$

die Gleichung der Krümmungs-Ebene, so muß solche dreimal identisch werden, nämlich so oft man die Koordinaten-Werthe der drei nächst auf einander folgenden Punkte der Kurve, welche diese Krümmungs-Ebene bilden, statt x', y', z' substituirt. Sind nun x, y, z die Koordinaten-Werthe des erstern dieser Punkte, so hat man zunächst die identische Gleichung

$$2) \qquad Az + By + Cx + D = 0 \quad \text{oder} \quad f_{(x)} = 0.$$

Da nun diese Gleichung auch noch für den nächsten Punkt bestehen muß, d. h. wenn $x + dx$ statt x gesetzt wird, so giebt sie $f_{(x+dx)} = 0$, d. h. $f + df = 0$, d. h. weil schon $f = 0$ ist, noch $df = 0$ oder (weil $df = \partial f_{(x)}\cdot dx$ ist)

$$3) \qquad \partial f_{(x)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad A\cdot\partial z_x + B\cdot\partial y_x + C = 0.$$

Und weil endlich dieselbe Gleichung auch noch für den nächsten dritten Punkt gelten soll, also wenn in $x + dx$ nochmals $x + dx$ statt x gesetzt wird, so giebt dies noch $d(f + df) = 0$ d. h. $df + d^2 f = 0$, also, weil schon $df = 0$ ist, noch $d^2 f = 0$, oder, weil $d^2 f = \partial^2 f_{(x)}\cdot dx^2$ ist,

$$4) \qquad \partial^2 f_{(x)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad A\cdot\partial^2 z_x + B\cdot\partial^2 y_x = 0.$$

Diese drei Gleichungen 2.—4.) geben nun, wenn man der Bequemlichkeit wegen, das unbestimmt bleibende A, $=\partial^2 y_x$ nimmt, sogleich dazu

$$B=-\partial^2 z_x,\quad C=\partial y_x\cdot\partial^2 z_x-\partial z_x\cdot\partial^2 y_x$$

und

$$D=-z\cdot\partial^2 y_x-y\cdot\partial^2 z_x-x(\partial y_x\cdot\partial^2 z_x-\partial z_x\cdot\partial^2 y_x).$$

Die Gleichung 1.) der Krümmungs-Ebene wird also nun:

$$5)\quad \partial^2 y_x\cdot(z'-z)-\partial^2 z_x\cdot(y'-y)+(\partial y_x\cdot\partial^2 z_x-\partial z_x\cdot\partial^2 y_x)\times(x'-x)=0.$$

Denkt man sich x, also auch y und z noch als Funktionen von t, so hat man, wenn man bloß ∂x, ∂y, etc. etc. statt ∂x_t, ∂y_t, etc. etc. schreibt

$$\partial y_x=\frac{\partial y}{\partial x},\qquad \partial z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\partial^2 y_x=\frac{\partial x\cdot\partial^2 y-\partial y\cdot\partial^2 x}{\partial x^3},\quad \partial^2 z_x=\frac{\partial x\cdot\partial^2 z-\partial z\cdot\partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Die Gleichung 5.) der Krümmungs-Ebene geht dadurch über in

$$6)\qquad \mathfrak{A}\cdot(z'-z)+\mathfrak{B}\cdot(y'-y)+\mathfrak{C}\cdot(x'-x)=0,$$

wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgende Bedeutungen haben, nämlich:

$$7)\quad \mathfrak{A}=\partial x\cdot\partial^2 y-\partial y\cdot\partial^2 x;\quad \mathfrak{B}=\partial z\cdot\partial^2 x-\partial x\cdot\partial^2 z;\quad \mathfrak{C}=\partial y\cdot\partial^2 z-\partial z\cdot\partial^2 y.$$

Diese Bedeutungen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind zu gleicher Zeit so, daß

$$8)\qquad \mathfrak{A}\cdot\partial z+\mathfrak{B}\cdot\partial y+\mathfrak{C}\cdot\partial x=0$$

hervorgeht.

Sind k, k′ und k″ die Winkel, welche die Krümmungs-Ebene mit den drei Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ macht (oder die auf die Krümmungs-Ebene senkrechte Gerade bezüglich mit OZ, OY und OX), so folgt aus der Gleichung 6.) der Krümmungs-Ebene, wenn der Kürze wegen

$$9)\qquad \sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}=W$$

gesetzt wird (nach §.§. 142. und 140.)

10) $\cos k = \frac{\mathfrak{A}}{W}, \quad \cos k' = \frac{\mathfrak{B}}{W} \quad$ und $\quad \cos k'' = \frac{\mathfrak{C}}{W},$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ immer die Bedeutung der N. 7.) haben, so daß die Gleichung 8.) identisch wird.

II. Legt man durch dieselben drei nächst auf einander folgenden Punkte der Kurve eine Kugel

$$(\odot) \cdots \qquad (z'-c)^2+(y'-b)^2+(x'-a)^2 = \varrho^2,$$

deren Mittelpunkt (dessen Koordinaten-Werthe a, b, c sind) in der Krümmungs-Ebene liegt, so bildet letztere mit ersterer den Krümmungskreis, welcher den Krümmungshalbmesser ϱ hat.

Um nun für diesen Kreis, sowohl a, b, c als auch ϱ zu finden, bemerke man zunächst, daß weil der durch a, b, c gegebene Mittelpunkt in der Krümmungs-Ebene liegen soll, die Gleichung der letztern (I. 6.) identisch werden muß, sobald a, b, c statt x', y', z' gesetzt werden. Dies giebt die Gleichung

$$1) \qquad \mathfrak{A}(c-z)+\mathfrak{B}(b-y)+\mathfrak{C}(a-x) = 0.$$

Ferner muß wieder, da die Kugel durch drei nächst auf einander folgende Punkte gehen soll, die Gleichung ($\odot$) dreimal identisch werden, nämlich allemal so oft statt x', y', z' die Koordinaten-Werthe eines dieser drei Punkte gesetzt werden. Da nun die Koordinaten-Werthe des erstern dieser Punkte x, y, z sind, so hat man die aus $\odot$) hervorgehende Gleichung

$$2) \qquad (z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2-\varrho^2 = 0,$$

und dann die beiden andern, welche aus dieser hervorgehen, wenn man einmal $x+dx$ statt x, und dann noch einmal $x+dx$ statt x setzt. Dies führt aber zu der 1ten und 2ten Differential-Gleichung der 2.) nämlich, wenn man x, also y und z selbst wieder als Funktionen von t ansieht,

$$3) \; (z-c)\cdot\partial z + (y-b)\cdot\partial y + (x-a)\cdot\partial x = 0$$

und

$$(z-c)\cdot\partial^2 z+(y-b)\cdot\partial^2 y+(x-a)\cdot\partial^2 x+\partial z^2+\partial y^2 + \partial x^2 = 0,$$

oder

$$4) \; (z-c)\cdot\partial^2 z+(y-b)\cdot\partial^2 y+(x-a)\cdot\partial^2 x+\partial s^2 = 0,$$

weil

5) $$\partial z^2 + \partial y^2 + \partial x^2 = \partial s^2$$

bereits früher (im §. 180.) gefunden ist, wenn s den Bogen der Kurve bedeutet von $x = \mathfrak{x}$ an bis zu $x = x$ hin, wo $\mathfrak{x}$ der Abscissen-Werth eines beliebigen Anfangspunktes des Bogens ist.

Aus diesen vier Gleichungen 1.—4.) müssen nun a, b, c und ϱ gefunden werden. Sie geben

6) $$\begin{cases} z - c = \dfrac{\partial s^2}{W^2}(\mathfrak{B}\cdot\partial x - \mathfrak{C}\cdot\partial y) \\ y - b = \dfrac{\partial s^2}{W^2}(\mathfrak{C}\cdot\partial z - \mathfrak{A}\cdot\partial x) \\ x - a = \dfrac{\partial s^2}{W^2}(\mathfrak{A}\cdot\partial y - \mathfrak{B}\cdot\partial z), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Bedeutung der I. 7.) und W die Bedeutung der I. 9.) haben, so daß auch noch die Gleichung I. 8.) statt findet, nämlich

7) $$\mathfrak{A}\cdot\partial z + \mathfrak{B}\cdot\partial y + \mathfrak{C}\cdot\partial x = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen 6.) und 7.) giebt dann die 2.) sogleich

8) $$\varrho = \frac{\partial s^3}{W};$$

und dies ist die Gleichung für den **Krümmungshalbmesser** *).

Um von allen diesen Ausdrücken ihre symmetrische Form desto bequemer übersehen zu lassen, bemerke man noch, daß (nach I.), wenn α, β, γ die Winkel bedeuten, welche die Tangente der Kurve mit den Axen OX, OY, OZ macht,

9) $$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \text{also} \quad \partial(\cos\alpha) = \frac{\partial s\cdot\partial^2 x - \partial x\cdot\partial^2 s}{\partial s^2}$$

---

*) Dieser Ausdruck für den Krümmungshalbmesser geht in den für ebene Kurven (§. 171. III. 10.) über, wenn $z = 0$, also auch $\partial z = 0$, $\partial^2 z = 0$ gesetzt wird, weil man dann $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, also $\varrho = \dfrac{\partial s^3}{\mathfrak{A}}$ erhält.

ist, während man auf der andern Seite, wenn statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ihre Werthe gesetzt werden,

$$\mathfrak{A}\cdot\partial y-\mathfrak{B}\cdot\partial z=$$
$$\partial x(\partial x\cdot\partial^2 x+\partial y\cdot\partial^2 y+\partial z\cdot\partial^2 z)-(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)\cdot\partial^2 x$$

erhält, so daß, weil die 5.), differenzirt,

$$10)\qquad \partial s\cdot\partial^2 s=\partial x\cdot\partial^2 x+\partial y\cdot\partial^2 y+\partial z\cdot\partial^2 z$$

liefert, — auch noch

$$11)\quad \mathfrak{A}\cdot\partial y-\mathfrak{B}\cdot\partial z=\partial s(\partial x\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 x)=-\partial s^3\cdot\partial(\cos\alpha)$$

wird.

Da nun die Gleichung 8.) noch

$$12)\qquad \sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}=\frac{\partial s^3}{\varrho}.$$

liefert, so folgt, daß wenn man diese, so wie natürlich die leicht zu erhaltenden analogen Werthe in die 6.) substituirt, letztere diese Form annehmen

$$13)\begin{cases} z-c=\dfrac{\varrho^2}{\partial s^3}(\partial z\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 z)=-\dfrac{\varrho^2}{\partial s}\cdot\partial(\cos\gamma)\\ y-b=\dfrac{\varrho^2}{\partial s^3}(\partial y\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 y)=-\dfrac{\varrho^2}{\partial s}\cdot\partial(\cos\beta)\\ x-a=\dfrac{\varrho^2}{\partial s^3}(\partial x\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 x)=-\dfrac{\varrho^2}{\partial s}\cdot\partial(\cos\alpha). \end{cases}$$

Sind nun ζ, ζ', ζ'' die Winkel, welche die Richtung des Krümmungshalbmessers (vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte hin in's Unendliche gedacht) mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so hat man noch (nach §. 142.) vermöge der Gleichungen 13.)

$$14)\begin{cases} \cos\zeta\ =\dfrac{\varrho}{\partial s^3}(\partial x\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 x)=-\dfrac{\varrho}{\partial s}\cdot\partial(\cos\alpha)\\ \cos\zeta'\ =\dfrac{\varrho}{\partial s^3}(\partial y\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 y)=-\dfrac{\varrho}{\partial s}\cdot\partial(\cos\beta)\\ \cos\zeta''=\dfrac{\varrho}{\partial s^3}(\partial z\cdot\partial^2 s-\partial s\cdot\partial^2 z)=-\dfrac{\varrho}{\partial s}\cdot\partial(\cos\gamma). \end{cases}$$

III. Diese drei nächst auf einander folgenden Punkte der einfach oder doppelt gekrümmten Linie, durch welche die Krümmungs-Ebene und der Krümmungskreis hindurchgehen, bilden zwei nächst auf einander folgende Tangenten der Kurve, und diese unter sich einen (offenbar unendlich-kleinen) Winkel δ, welcher der Berührungs-Winkel genannt wird.

Um diesen Winkel δ zu finden, muß man den Satz zu Hülfe nehmen, nach welchem

1) $\cos\delta = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'$

ist, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die erstere Tangente mit den Koordinaten-Axen macht, und wenn man dagegen unter α', β', γ' die Winkel versteht, welche die nächstfolgende Tangente mit den Axen bildet.

Denkt man sich nun, der Symmetrie der Rechnungen wegen, x und somit auch y und z als Funktionen von t, so sind auch α, β, γ, α', β', γ' Funktionen von t, und zwar ist

2) $\alpha' = \alpha_{t+dt}$, $\beta' = \beta_{t+dt}$ und $\gamma' = \gamma_{t+dt}$.

Daraus folgt nach dem Taylor'schen Lehrsatze

3) $\cos\alpha' = \cos\alpha + \partial(\cos\alpha)\cdot dt + \partial^2(\cos\alpha)\cdot\frac{dt^2}{2!} + \cdots$

4) $\cos\beta' = \cos\beta + \partial(\cos\beta)\cdot dt + \partial^2(\cos\beta)\cdot\frac{dt^2}{2!} + \cdots$

5) $\cos\gamma' = \cos\gamma + \partial(\cos\gamma)\cdot dt + \partial^2(\cos\gamma)\cdot\frac{dt^2}{2!} + \cdots$,

wo wir wieder der Kürze wegen, $\partial(\cos\alpha)$ statt $\partial(\cos\alpha)_t$, etc. geschrieben haben und schreiben.

Dabei ist aber

6) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$,

also auch, wenn man diese Gleichung zweimal hintereinander nach allem t differenzirt,

7) $\cos\alpha\cdot\partial(\cos\alpha) + \cos\beta\cdot\partial(\cos\beta) + \cos\gamma\cdot\partial(\cos\gamma) = 0$

8) $(\partial\cos\alpha)^2 + (\partial\cos\beta)^2 + (\partial\cos\gamma)^2 +$
$\cos\alpha\cdot\partial^2(\cos\alpha) + \cos\beta\cdot\partial^2(\cos\beta) + \cos\gamma\cdot\partial^2(\cos\gamma) = 0$.

Substituirt man nun die Werthe aus 3.—5.) in die 1.), und

berücksichtigt man die Gleichungen 6.—8.), so ergiebt sich, wenn man die Unendlich-Kleinen der dritten und höhern Ordnungen wegläßt,

9) $\cos\delta = 1 - \frac{1}{2}[(\partial\cos\alpha)^2 + (\partial\cos\beta)^2 + (\partial\cos\gamma)^2]\cdot dt^2$; woraus, wegen $\sin\delta^2 = 1 - \cos\delta^2$, wenn man wieder das mit dt^4 behaftete Glied wegläßt

10) $(\sin\delta)^2 = [(\partial\cos\alpha)^2 + (\partial\cos\beta)^2 + (\partial\cos\gamma)^2]\cdot dt^2$

sich ergiebt.

Daraus folgt, daß $\sin\delta$ unendlich-klein von der ersten Ordnung ist. Da nun (nach §. 70.)

11) $$\sin\delta = \delta - \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} \cdots$$

ist, sobald δ den Bogen bedeutet für den Radius 1, der zwischen den Schenkeln des Berührungs-Winkels liegt, so folgt, wenn man die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnungen wegläßt, $\sin\delta = \delta$, daher (aus 10. und 11.)

12) $\delta = [(\partial\cos\alpha)^2 + (\partial\cos\beta)^2 + (\partial\cos\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}\cdot dt.$

Substituirt man hier statt $\partial\cos\alpha$, etc. etc. die Werthe, wie sich solche aus II. 13.) ergeben, und berücksichtigt man, daß (nach II. 2.)

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = \varrho^2$$

ist, wo ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, so findet man

13) $$\delta = \frac{\partial s}{\varrho}\cdot dt = \frac{ds}{\varrho};$$

d. h. der Berührungs-Winkel δ (versteht sich im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) findet sich, wenn man das Element ds des Bogens der doppelt gekrümmten Kurve durch den Krümmungshalbmesser dividirt; daher ist er derselbe Winkel, den die beiden, durch die Endpunkte von ds gelegten Normalen der Kurve (d. h. die beiden Radien des Krümmungskreises, welche durch die Endpunkte von ds gehen) unter sich bilden *).

*) Dasselbe läßt sich auch sogleich aus einer einfachen und elementaren geometrischen Betrachtung entnehmen.

Es sey nämlich (Fig. 38.) LMN das Element ds des Bogens; und

Anmerkung. Alles über die Kurven doppelter Krümmung Gesagte läßt sich natürlich auch auf die ebenen Kurven (Linien einfacher Krümmung) ohne Weiteres anwenden.

Schluß-Anmerkung.

Es fehlt weder den Flächen noch den Linien doppelter Krümmung an ausgezeichneten Linien und Punkten. So werden die Kegelflächen und die Cylinderflächen von Tangential-Ebenen nicht bloß in einem Punkte, sondern längs gerader Linien berührt. So kann eine krumme Fläche Rückkehr-Linien haben, wo zwei Flügel oder Lappen derselben sich vereinigen, so daß letztere an jedem Punkte dieser Linie eine gemeinschaftliche Tangential-Ebene haben. Eine krumme Fläche wie z. B. die Kegelfläche kann Spitzen oder analoge Vertiefungen haben; u. s. w. f. — Alle diese Stellen sind dadurch analytisch ausgezeichnet, daß entweder $\partial z_x = \frac{1}{0}$ oder $\partial z_y = \frac{1}{0}$ oder beide $= \frac{1}{0}$ werden, u. s. w. — Da wir uns aber hier nicht weiter auf diese Untersuchungen einlassen können, so mag es genügen zu wissen, daß sie denen analog geführt werden, welche für die ebenen Kurven in dem §. 173.) geführt worden sind.

LMP und MN seyen die beiden Tangenten in den Endpunkten L und N, welche sich in M schneiden. Dann ist MNP der gesuchte Winkel δ, sowie $OL = ON = \varrho$, sobald OL und ON, von L und N aus senkrecht auf LM und NM gedacht sind, und diese sich in O schneiden. Also ist $\delta = NMP = LON$, weil das Viereck OLMN bei L und N rechte Winkel hat. Aber eben deshalb ist dann auch Bogen $LN = OL \times \delta$; d. h. $ds = \varrho \cdot \delta$ oder $\delta = \frac{ds}{\varrho}$, wenn nur δ den Bogen vorstellt für den Radius 1, der zwischen den Schenkeln des Berührungs-Winkels liegt.

Viertes Kapitel.

Vermischte geometrische Aufgaben zur Uebung in der Anwendung der Differential-Rechnung.

§. 182.

Von den Einhüllungs-Kurven.

Nimmt man eine Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen y und x, welche auch noch eine unbestimmte Constante α (die zuweilen auch Parameter*) genannt wird) in sich enthält, und die wir deshalb durch

$$\varphi_{x,y,\alpha} = 0$$

bezeichnen wollen, so drückt solche Gleichung für jedes bestimmte α im Allgemeinen eine Kurve aus. Giebt man nun dem α nach und nach alle stetig neben einander liegenden reellen Werthe, so drückt dieselbe Gleichung unendlich-viele dicht und unmittelbar neben einander liegende Kurven aus, welche einander congruent und nur der Lage nach verschieden, welche aber im Allgemeinen auch nicht congruent seyn werden. Nun kann es sich treffen, daß je zwei nächst auf einander folgende dieser Kurven sich schneiden; dann liegen alle diese Durchschnittspunkte selber stetig neben einander und bilden eine neue Kurve, welche wir die, alle vorigen einhüllende Kurve (Einhüllungs-Kurve) nennen wollen, während die ersteren die Erzeugungs-Kur-

*) Nimmt man das Wort „Parameter" in dieser Bedeutung, so ist solche nicht zu verwechseln mit dem, was man in der Theorie der Kegelschnitte „Parameter" nennt. Dort ist nämlich ein bestimmter der Koefficienten darunter verstanden.

Kurven heißen mögen. Man soll die Gleichung dieser Einhüllungs-Kurven finden.

Es sind $\varphi'_{x,y,\alpha} = 0$ und $\varphi_{x,y,\alpha+d\alpha} = 0$ die Gleichungen zweier der nächst auf einander folgenden Erzeugungs-Kurven. Denkt man sich nun in beiden die x und die y als dieselben, so geben sie die Koordinaten-Werthe x und y ihres Durchschnittspunktes, beide in α ausgedrückt, mithin beide als Funktionen von α. Eliminirt man zuletzt noch α aus beiden Gleichungen, so hat man die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x und y aller dieser Durchschnittspunkte, d. h. der gesuchten Einhüllungs-Kurve.

Weil aber $\varphi_{\alpha+d\alpha} = \varphi + \partial\varphi_\alpha \cdot d\alpha$ ist, so folgt, daß wenn $\varphi_{\alpha+d\alpha}$ mit φ zugleich Null seyn soll, dann die Gleichung $\varphi_{\alpha+d\alpha} = 0$ sich bloß auf $\partial\varphi_\alpha = 0$ zurückzieht.

Die Gleichung der gesuchten Einhüllungs-Kurve findet sich also, wenn man aus

1) $\varphi_{x,y,\alpha} = 0$ und 2) $\partial\varphi_\alpha = 0$,

α selbst eliminirt; oder man findet die einzelnen Punkte dieser Kurve, wenn man aus den beiden Gleichungen 1.) und 2.) x und y als Funktionen von α herstellt, nachgehends aber dem α nach und nach alle stetig neben einander liegenden reellen Werthe beigelegt sich denkt, zu jedem Werthe von α aber x und y berechnet.

§. 183.

Die Lage der Tangente der Einhüllungs-Kurve an irgend einer, durch einen bestimmten Werth von x oder von α, gegebenen Stelle, hängt ab von dem zu diesem Werthe von x gehörigen Werthe von ∂y_x. Da nun (nach §. 150. I. oder §. 155.)

$$\partial y_x = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

ist, so darf man nur die Gleichungen 1.) und 2.) differenziiren, indem man x und y als Funktionen von α ansieht, und man wird die Gleichungen haben, aus denen ∂x_α und ∂y_α, also auch

$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha}$ gefunden werden kann. Differenziirt man aber die 1.) nach allem α, so erhält man (nach §. 154.)

$$\partial\varphi_x \cdot \partial x_\alpha + \partial\varphi_y \cdot \partial y_\alpha + \partial\varphi_\alpha = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich jedoch (wegen der 2.) bloß auf

$$\partial\varphi_x \cdot \partial x_\alpha + \partial\varphi_y \cdot \partial y_\alpha = 0,$$

oder, wenn man durch ∂x_α dividirt, auf

$$3) \qquad \partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y_x = 0;$$

und diese Gleichung (in welcher auch noch α vorkommt) giebt schon das gesuchte ∂y_x der Einhüllungs-Kurve, so daß man zur Differentiation der 2.) nicht mehr zu schreiten braucht.

Die Lage der Tangente der gegebenen Kurve 1.) hängt von dem aus ihrer Gleichung hervorgehenden Werthe von ∂y_x ab, und dieser ist genau derselbe, welchen die Gleichung 3.) für das ∂y_x der Einhüllungs-Kurve gab, sobald man nur statt α (und x) dieselben Werthe gesetzt sich denkt. Folglich hat die Einhüllungs-Kurve, wie sie durch die Gleichungen 1.) und 2.) gegeben ist, genau dieselbe geradlinige Tangente (an der durch einen bestimmten Werth von α gegebenen Stelle), welche für denselben Werth von α die durch die Gleichung 1.) allein gegebene Erzeugungs-Kurve (an derselben Stelle) hat. Die Einhüllungs-Kurve berührt also alle die unendlich-vielen Erzeugungs-Kurven zugleich, jede mit einem anderen ihrer Punkte, d. h. in allen den Durchschnittspunkten je zweier nächst auf einander folgenden der Erzeugungs-Kurven.

Hätte man sich also die Aufgabe gestellt: die Kurve zu finden, welche die durch die Gleichung 1.) gegebenen und für die verschiedenen Werthe von α hervorgehenden Erzeugungs-Kurven alle zugleich berührt (jede nächste Kurve, mit einem nächsten ihrer Punkte), so hätte man dieselbe, durch die Gleichungen 1.) und 2.) gegebene Kurve erhalten.

§. 184.

Nimmt man statt $\varphi_{x,y,\alpha} = 0$ die Gleichung einer geraden Linie

$$y = ax + b,$$

so läuft diese letztere Gerade parallel mit sich fort, wenn man b ändert, und a unverändert läßt; oder sie dreht sich um den zu $x = 0$ und $y = b$ gehörigen Punkt, wenn man b unverändert läßt, aber dem a andere Werthe beilegt. — Denkt man sich nun a und b als Funktionen von α, so läuft, wenn α sich ändert, die durch die Gleichung

1) $$y = ax + b$$

gegebene Gerade parallel mit sich fort und dreht sich zugleich (wenn es erlaubt ist, so zu sagen), d. h. sie nimmt jede beliebige Ortsänderung an, je nachdem a und b diese oder andere Funktionen von α sind.

Differenzirt man nun diese Gleichung nach α, so erhält man

2) $$0 = x \cdot \partial a_\alpha + \partial b_\alpha;$$

und die durch diese beiden Gleichungen 1.) und 2.) durch Elimination von α gegebene Gleichung drückt nun die Einhüllungs-Kurve aus, welche durch die Durchschnitte je zweier dieser nächst auf einander folgenden, durch die Gleichung 1.) gegebenen Geraden gebildet wird, oder welche alle diese geraden Erzeugungs-Linien berührt, jede andere an einen anderen ihrer Punkte.

Es sey XOY (Fig. 39.) ein fester rechter Winkel, dessen Fläche mit feinem Sande bestreut ist. Eine feste gerade Linie AB von der Länge c befindet sich anfänglich auf der OX, von O bis C, bewegt sich aber dann dergestalt, daß der Endpunkt B von O nach Y, der Endpunkt A dagegen von X oder vielmehr von C nach O hin rückt, dergestalt, daß diese Punkte B und A die Schenkel OY und OX des rechten Winkels XOY nie verlassen. Diese feste Gerade AB schiebt nun bei ihrer Bewegung den feinen Sand zurück, so daß er eine Kurve DEC bildet; die Gleichung dieser Kurve zu finden.

In diesem Beispiele ist die Gerade AEB die Erzeugungslinie; die Kurve DEC die Einhüllungs-Kurve. Um die Gleichung der Erzeugungslinie AEB zu finden, sey M einer ihrer Punkte, und $OP = x$, $PM = y$

seyen die Koordinaten-Werthe dieses Punktes M, auf OX und OY als Koordinaten-Axen bezogen. Ferner sey $OB = \alpha$ die veränderliche Konstante, welche von $\alpha = 0$ bis $\alpha = OD = c$ hin stetig wächst. Dann ist $OA = \sqrt{c^2 - \alpha^2}$ und $PA = -x + \sqrt{c^2 - \alpha^2}$ und die Aehnlichkeit der Dreiecke BOA und MPA giebt die Gleichung

$$BO : OA = MP : PA$$

d. h.

$$\alpha : \sqrt{c^2 - \alpha^2} = y : -x + \sqrt{c^2 - \alpha^2},$$

woraus

1′.)
$$y = -\frac{\alpha}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}} x + \alpha$$

als die Gleichung der Erzeugungslinie BEA hervorgeht.

Differenziirt man nun diese Gleichung nach α, so erhält man

2′.)
$$0 = \frac{-c^2}{(c^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x + 1;$$

und dies ist die Gleichung der nächst folgenden Lage von AB, für den Fall, daß sie mit der 1′.) zugleich statt haben, d. h. daß sie für den Durchschnittspunkt beider nur gelten soll.

Um nun α aus 1′.) und 2′.) zu eliminiren, giebt die 2′.) sogleich

$$c^2 x = (c^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{also} \quad c^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} = c^2 - \alpha^2;$$

folglich

$$\alpha = c^{\frac{2}{3}} \cdot (c^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}} = \frac{(c^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Substituirt man diese Werthe in die 1′.), so ergiebt sich

3′.)
$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

als die Gleichung der Kurve DEC.

Und diese Gleichung giebt außer DEC noch drei andere dieser congruente Theile, also eine aus vier congruenten Theilen bestehende Figur, wie Fig. 39.) zu sehen ist. — Schafft man aus der Gleichung 3′.) die Bruch-Exponenten weg, so wird sie

$$27 c^2 x^2 y^2 = (c^2 - x^2 - y^2)^3;$$

und diese Kurve gehört daher zu den algebraischen Linien vom 6ten Grade *).

---

*) Man konnte auch den veränderlichen Winkel BAO durch α bezeichnen; dann hatte man $OB = c \cdot \sin\alpha$, $OA = c \cdot \cos\alpha$ und $AP = -x + c \cdot \cos\alpha$; daher war nun die Gleichung der Geraden AB diese:

1″.)
$$y = -tg\,\alpha \cdot x + c \cdot \sin\alpha.$$

Diese Gleichung nach α differenziirt, giebt nun die

2″.)
$$0 = -\frac{1}{\cos\alpha^2} \cdot x + c \cdot \cos\alpha.$$

Anmerkung. Uebrigens ist jede beliebige ebene Kurve die Einhüllungs-Kurve aller ihrer Tangenten, so daß, wenn man das Gesetz kennt, nach welchem sich die Tangente der Kurve fortbewegt, die Gleichung der Kurve selbst allemal sogleich nach §. 182.) oder §. 184.) gefunden werden kann.

§. 185.

Von den Evoluten und Evolventen.

I. Es werde noch die Einhüllungs-Kurve gesucht, deren Erzeugungs-Linien die stetig auf einander folgenden Normalen einer, durch die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad y = y_x$$

gegebenen Kurve sind.

Sind a und b die Koordinaten-Werthe irgend eines Punktes der Normale, so ist die Gleichung der Normale an dem durch x gegebenen Punkte (nach §. 170. oder §. 171.) diese:

$$1)\ b - y = -\frac{1}{\partial y_x}\cdot(a - x), \text{ oder } (x - a) + (y - b)\cdot\partial y_x = 0,$$

wo y und ∂y_x (aus $\odot$) bekannte Funktionen von x sind, während alle Normalen für die verschiedenen Punkte der Kurve ($\odot$) dadurch hervorgehen, daß man statt x nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt denkt. Was also in den §§. 182. 184.) durch α vorgestellt ist, das ist hier x, und was dort x und y vorstellen, das ist hier durch a und b ausgedrückt.

Stellen nun a und b die Durchschnitts-Punkte zweier nächst auf einander folgenden Normalen vor, so hat man außer

---

Findet man aus letzterer Gleichung $\cos\alpha = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}}$, also $\sin\alpha = \frac{(c^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{3}}}$ und $tg\,\alpha = \frac{(c^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, und substituirt man diese Werthe in die Gleichung 1''.), so giebt dies sogleich wieder als Endresultat der Elimination von α, die Gleichung 3'.) der Einhüllungs-Kurve.

der Gleichung 1.) noch (für die nächste Normale) die aus ihr hervorgehende Gleichung, wenn man sie nach allem x differenziirt (nach §. 182.), nämlich die Gleichung

2) $$1+\partial y_x{}^2+(y-b)\cdot\partial^2 y_x=0,$$

wo ∂y_x, $\partial^2 y_x$ aus der Gleichung ⊙.) zu entnehmende, also bekannte Funktionen von x sind. Eliminirt man nun aus 1.) und 2.) den Veränderlichen x, oder drückt man a und b als Funktionen von x aus, so hat man die Gleichung der Kurve, welche aus den successiven Durchschnitten aller Normalen an die gegebene Kurve $y=y_x$ hervorgeht, oder welche alle diese Normalen, jede mit einem andern ihrer Punkte berührt.

II. Geht man von der Gleichung des Kreises

1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

aus und differenziirt man solche zwei mal hinter einander nach allem x, so daß man

2) $$(x-a)+(y-b)\cdot\partial y_x=0$$

und

3) $$1+\partial y_x{}^2+(y-b)\cdot\partial^2 y_x=0$$

erhält, so geben diese drei Gleichungen (1.—3.), sobald man unter y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ die aus der Gleichung

(⊙)... $$y=y_x$$

entnommenen Funktionen von x sich denkt, die Koordinaten-Werthe a und b und den Halbmesser c des Krümmungskreises der durch die Gleichung ⊙.) gegebenen Kurve, an der durch x gegebenen Stelle (nach §. 170. oder §. 171.). — Eliminirt man nun aus den Gleichungen 2.) und 3.) den Veränderlichen x, oder betrachtet man a und b als die durch diese Gleichungen 2.) und 3.) gegebenen Funktionen von x, so hat man die Gleichung der Kurve, welche von allen stetig neben einander liegenden Mittelpunkten aller zu den verschiedenen Werthen von x gehörigen Krümmungskreise gebildet wird. — Vergleicht man aber die hiesigen Gleichungen 2.) und 3.) mit den Gleichungen I, 1.) und 2.), so fällt in die Augen, daß man jedesmal eine und dieselbe Kurve habe.

Die von den Mittelpunkten aller Krümmungskreise einer gegebenen Kurve (⊙) gebildete Kurve, ist also zugleich die Kurve, welche alle Normalen der gegebenen Kurve (⊙) berührt, oder welche durch die Durchschnitte je zweier nächst auf einander folgenden Normalen gebildet wird. — Dies letztere ist übrigens eine Wahrheit, welche nach Leibnitz'schen Ansichten von selbst in die Augen fällt.

Sucht man den, zu dem Zuwachse dx von x gehörigen Zuwachs dc oder $\partial c_x \cdot dx$ des Krümmungshalbmessers c, so muß man die Gleichung 1.) nach allem x differenziiren, indem man auch a und b als die durch die Gleichungen 2.) und 3.) gegebenen Funktionen von x ansieht. Dies giebt aber, weil der Theil der Differenzial-Gleichung der von dem expliciten x und y herrührt, vermöge der 2.) bereits der Null gleich ist, bloß den Theil, der von der Veränderlichkeit von a und b herrührt, nämlich

$$4) \qquad (x-a)\cdot\partial a_x + (y-b)\cdot\partial b_x = -c\cdot\partial c_x.$$

Weil aber b eine Funktion von a ist, so findet zwischen ∂b_x und ∂a_x eine Gleichung statt, die man erhält, wenn man auch noch die 2.) nach allem x differenziirt, indem a und b wiederum als Funktionen von x angesehen werden. In so fern jedoch der von dem expliciten x, y und ∂y_x herrührende Theil dieser Gleichung, vermöge der 3.) der Null gleich ist, so behält man wiederum bloß den von der Veränderlichkeit der a und b herrührenden Theil, nämlich

$$5) \qquad \partial a_x + \partial b_x \cdot \partial y_x = 0 \qquad \text{oder} \qquad \partial b_a = -\frac{1}{\partial y_x},$$

woraus abermals hervorgeht, daß die Tangente an die Mittelpunkts-Kurve mit der Normale an die gegebene Kurve (⊙) zusammenfällt (wegen §. 170. oder §. 171.).

Dividirt man die Gleichung 4.) durch c, indem man statt c seinen Werth (aus 1.) nämlich $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ setzt; dividirt man dann den Zähler und Nenner des für ∂c_x entste-

henden Ausdruckes durch $y-b$, und substituirt man zugleich überall statt $\frac{x-a}{y-b}$ dessen Werth $-\partial y_x$ (aus 2.), so erhält man

$$\frac{\partial b_x - \partial a_x \cdot \partial y_x}{\sqrt{1+\partial y_x^2}} = \partial c_x.$$

Setzt man hier statt ∂y_x seinen Werth $-\frac{\partial a_x}{\partial b_x}$ aus 5.), so erhält man weiter

$$6) \qquad \partial c_x = \sqrt{\partial b_x^2 + \partial a_x^2}.$$

Ist aber s der Bogen der Mittelpunkts-Kurve von irgend einem Punkte an gerechnet, bis zu dem Punkte hin, dessen Koordinaten-Werthe a und b sind, so hat man auch (nach §. 174.)

$$7) \qquad \partial s_x = \sqrt{\partial b_x^2 + \partial a_x^2}.$$

Also ist

$$8) \qquad \partial c_x = \partial s_x \quad \text{und} \quad dc = ds.$$

Es wächst sonach der Krümmungshalbmesser c genau um das Stück, um welches der Bogen der Mittelpunkts-Kurve zunimmt.

Wickelt man daher um die Mittelpunkts-Kurve einen Faden, und wickelt man dann diesen Faden ab, indem er straff angezogen wird, so daß er immer eine Tangente der Mittelpunkts-Kurve bildet, so beschreibt das Ende dieses Fadens, wenn es mit einem einzigen Punkte der gegebenen Kurve (⊙) zusammenfällt, nach und nach diese ganze letztere Kurve ⊙). — Deshalb heißt die Mittelpunkts-Kurve auch die Evolute der gegebenen Kurve (⊙); und letztere wird dann auch die Evolvende genannt.

Dies ist die Theorie der Evoluten und Evolvenden. Zu jeder Kurve gehört nur eine einzige Evolute d. h. Mittelpunkts-Kurve; zu jeder Evolute gehören aber unendlich viele Evolvenden; d. h. unendlich viele verschiedene Kurven giebt es, welche alle eine und dieselbe Mittelpunkts-Kurve haben.

Wie die Evolvenden zu einer gegebenen Evolute gefunden

werden, kann man erst mittelst der Integral-Rechnung nachweisen. Ist nämlich die Gleichung der Evolute zwischen den Koordinaten-Werthen b und a gegeben, z. B.

9) $$b = \varphi_a,$$

so muß man aus dieser Gleichung 9.) und aus den beiden Gleichungen 2.) und 3.) die Koordinaten-Werthe a und b eliminiren, wenn man eine Gleichung haben will, zwischen x und dem der gesuchten Evolvende zugehörigen $y = y_x$. Weil aber diese Gleichung, ohne daß wir es gerade wünschen, noch die Differenzial-Koefficienten ∂y_x und $\partial^2 y_x$ enthält, so gehört sie zu denen, welche man Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung nennt. Aus diesen Differenzial-Gleichungen aber eine algebraische oder transcendente Gleichung bloß zwischen x und y abzuleiten, — solches hat gerade die sogenannte Integral-Rechnung zu lehren.

Wir finden aber als die Evolute oder Mittelpunkts-Kurve der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

gegebenen Ellipse, deren halbe Axen p und q sind, die Gleichung

$$p^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} = (p^2 - q^2)^{\frac{2}{3}},$$

wo a und b die Koordinaten-Werthe der einzelnen Punkte der Evolute vorstellen. — Diese hat aber viele Aehnlichkeit mit der im Beispiel zu §. 184.) erhaltenen Gleichung.

Sucht man ferner von der sogenannten logarithmischen Spirale, welche durch die Gleichung

$$r = a \cdot e^v \qquad \text{oder} \qquad v = \frac{1}{a} \cdot \log r$$

zwischen dem Winkel (Bogen) v und dem Radius-Vektor r gegeben ist, die Evolute, so findet man sie selbst wieder, nur in anderer Lage.

Das letztere ist auch der Fall, wenn man für die durch die Gleichungen

$$x = r(v - \sin v) \qquad \text{und} \qquad y = r(1 - \cos v)$$

oder durch die Gleichung

$$x = -\sqrt{2ry - y^2} + r \cdot \frac{1}{\cos}\left(1 - \frac{y}{r}\right),$$

zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y, gegebene Kurve (welche die Cykloide genannt wird) die Evolute sucht. Man findet dieselbe Cykloide, nur in anderer Lage.

§. 186.

Von den Einhüllungs-Flächen.

Nimmt man die Gleichung einer Fläche

1) $$\varphi_{x,y,z,\alpha} = 0$$

mit einer solchen veränderlichen Konstante α, so drückt diese Gleichung 1.) in Verbindung mit

2) $$\partial\varphi_{\alpha} = 0,$$

wenn α aus beiden Gleichungen eliminirt wird, die Gleichung der Einhüllungs-Fläche aus, welche aus den Durchschnitts-Linien je zweier nächst auf einander folgenden, der durch die Gleichung 1.) gegebenen Erzeugungs-Flächen oder Eingehüllten gebildet wird, oder welche jede dieser Erzeugungs-Flächen in der ganzen Länge dieser Durchschnitts-Linien berührt.

Es sind nämlich vermöge der Gleichungen 1.) und 2.) z und α als Funktionen von x und y anzusehen. Differenziirt man nun die 1.) nach allem x und nach allem y, so erhält man

$$\partial\varphi_x + \partial\varphi_z \cdot \partial z_x + \partial\varphi_{\alpha} \cdot \partial\alpha_x = 0$$

und

$$\partial\varphi_y + \partial\varphi_z \cdot \partial z_y + \partial\varphi_{\alpha} \cdot \partial\alpha_y = 0;$$

und diese Gleichungen reduciren sich, wegen $\partial\varphi_{\alpha} = 0$, bloß auf dieselben Gleichungen, welche die Gleichung 1.) liefert, wenn man α konstant ansieht, nämlich auf

$$\partial\varphi_x + \partial\varphi_z \cdot \partial z_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial\varphi_y + \partial\varphi_z \cdot \partial z_y = 0.$$

Also hat die Einhüllungs-Fläche mit jeder der Erzeugungs-Flächen oder Eingehüllten (d. h. für jeden einzelnen bestimmten Werth von α) allemal einerlei Tangential-Ebene. Weil aber zu diesem bestimmten Werthe von α, die beiden Gleichungen 1.) und 2.) bloß y und z, in x ausgedrückt, liefern, also x unbestimmt lassen, so bekommt man eine Kurve in der Einhüllungs-Fläche, in deren einzelnen Punkten diese bestimmte Erzeugungs-Fläche mit der Einhüllungs-Fläche einerlei Tangential-Ebene hat. Beide Flächen berühren sich also längs dieser durch die beiden Gleichungen 1.) und 2.) für diesen bestimmten Werth α gegebenen Kurve.

Diese Kurve hat Monge die Karakteristik der Einhüllungs-Fläche in Bezug auf die Eingehüllte oder die Erzeugungs-Fläche, genannt. Sie ist zu gleicher Zeit die Durchschnitts-Kurve je zweier nächst auf einander folgenden der Erzeugungs-Flächen.

Je zwei nächst auf einander folgende dieser Karakteristiken schneiden sich wieder, und die Koordinaten-Werthe dieses Durchschnitts-Punktes, für einen bestimmten Werth von α, sind offenbar gegeben durch die Gleichungen 1.), 2.) und

3) $\partial^2\varphi_\alpha = 0$,

weil die beiden Gleichungen 1.) und 2.) die neue Karakteristik geben müssen, sobald man in ihnen $\alpha + d\alpha$ statt α setzt, wodurch aber die 1.) wegen $\varphi = 0$ in die 2.), die 2.) dagegen wegen $\partial\varphi_\alpha = 0$ in die 3.) übergeht.

Eliminirt man aber aus diesen drei Gleichungen den Veränderlichen α, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y und z, welche alle Durchschnitts-Punkte je zweier nächst auf einander folgenden dieser Karakteristiken liefern. Die von diesen Punkten gebildete Kurve hat Monge die Wendungs-Kurve der Einhüllungs-Fläche genannt.

Enthält endlich die Gleichung $\varphi_{x,y,z,\alpha} = 0$ den Veränderlichen α nicht bloß explicit, sondern auch noch eine willkührliche Funktion von α, nämlich a_α, so kann man, wenn zu den Gleichungen $\varphi = 0$ und $\partial\varphi_\alpha = 0$ noch die beiden Differenzial-Gleichungen (nach x, und nach y) der ersten Ordnung hinzugefügt werden, nicht bloß α, sondern auch a (d. h. a_α und ∂a_α) eliminiren, und man erhält eine Parzial-Differenzial-Gleichung *), welche eine allgemeine Eigenschaft aller der Einhüllungs-Flächen ausdrückt, die dadurch sich ergeben, daß man statt a_α alle denkbaren Funktionen von α setzt.

Enthält die Gleichung $\varphi = 0$ zwei oder mehr solche ganz unbestimmte und willkührliche Funktionen a_α, b_α etc. etc., so muß man zu den Differenzial-Gleichungen der höhern Ordnungen seine Zuflucht nehmen, wenn man a_α, b_α, ∂a_α, ∂b_α, $\partial^2 a_\alpha$ und $\partial^2 b_\alpha$ etc. etc., soll eliminiren und dadurch eine Parzial-

*) So nennt man jede Gleichung zwischen z als Funktion von x, y etc. etc., deren Differenzial-Koefficienten ∂z_x, ∂z_y etc. etc., und diesen unabhängigen Veränderlichen x, y etc. etc. selbst.

Gleichung erhalten, die eine gemeinschaftliche Eigenschaft aus-drückt aller der für die verschiedenen Funktionen a_α, b_α etc. etc. hervorgehenden Einhüllungs-Flächen.

§. 187.

Von den abwickelbaren Flächen.

Nimmt man statt der Gleichung $\varphi_{x,y,z,\alpha} = 0$, die Gleichung einer Ebene, nämlich

$$1)\qquad z = ay + bx + c,$$

wo a, b, c Funktionen von α vorstellen sollen, so ist die durch diese Erzeugungs-Ebenen gegebene Einhüllungs-Fläche ausgedrückt durch die Gleichung

$$2)\qquad 0 = y \cdot \partial a_\alpha + x \cdot \partial b_\alpha + \partial c_\alpha,$$

wenn sie mit der 1.) durch Elimination von α in Verbindung gebracht wird.

Die Durchschnitts-Linien je zweier nächst auf einander folgenden dieser Erzeugungs-Ebenen sind gerade Linien und die von diesen gebildete Fläche ist, was man nennt eine **abwickelbare Fläche**, d. h. sie kann, (wie der Cylinder und der Kegel) auf einer Ebene aufgerollt (oder abgerollt) werden.

Man kann nun aus diesen Gleichungen 1.) und 2.) der abwickelbaren Fläche allemal eine **Partial-Differential-Gleichung** ableiten, welche keine der willkührlichen Funktionen a_α, b_α oder c_α mehr enthält, und welche daher eine gemeinschaftliche Eigenschaft aller abwickelbaren Flächen ausspricht.

Vermöge der beiden Gleichungen 1.) und 2.), welche mit einander in Verbindung, die Gleichung jeder abwickelbaren Fläche geben, sind nämlich z und α als Funktionen von x und y anzusehen. Differenzirt man daher die Gleichung 1.) nach x und auch nach y, so erhält man

$$\partial z_x = (\partial a_\alpha \cdot y + \partial b_\alpha \cdot x + \partial c_\alpha) \cdot \partial \alpha_x + b_\alpha$$

und

$$\partial z_y = (\partial a_\alpha \cdot y + \partial b_\alpha \cdot x + \partial c_\alpha) \cdot \partial \alpha_y + a_\alpha;$$

und diese Gleichungen reduciren sich, vermöge der Gleichung 2.) auf
$$\partial z_x = b_\alpha \quad \text{und} \quad \partial z_y = a_\alpha.$$

Differenzirt man nun diese Gleichungen noch einmal nach x und nach y, so ergiebt sich:

$$\partial^2 z_x = \partial b_\alpha \cdot \partial \alpha_x; \qquad \partial^{1,1} z_{x,y} = \partial b_\alpha \cdot \partial \alpha_y;$$

$$\partial^{1,1}{}_{x,y} = \partial a_\alpha \cdot \partial \alpha_x; \qquad \partial^2 z_y = \partial a_\alpha \cdot \partial \alpha_y;$$

und aus diesen letztern vier Gleichungen ergiebt sich sogleich

$$3) \quad \frac{\partial^2 z_x}{\partial^{1,1} z_{x,y}} = \frac{\partial^{1,1} z_{x,y}}{\partial^2 z_y} \quad \text{oder} \quad \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0.$$

Diese Gleichung 3.) drückt also eine allgemeine Eigenschaft aller abwickelbaren Flächen aus, wie solches zu Ende des §. 186.) im Allgemeinen schon angedeutet ist *).

I. Läßt man die Erzeugungs-Ebene durch einen festen Punkt gehen, dessen Koordinaten-Werthe 𝔵, 𝔶 und 𝔷 sind, und nimmt man zu gleicher Zeit $b = \alpha$, so ist die Gleichnng 1.) jetzt diese

---

*) Umgekehrt: Sucht man die Fläche, welche von jeder Tangential-Ebene, nicht bloß in einem Punkte, sondern längs einer Linie berührt wird, so hat man, wenn x, y, z die Koordinaten-Werthe eines Punktes dieser gesuchten Fläche vorstellen, die Gleichung der Tangential-Ebene an diesem Punkte (x, y, z) so (nach §. 176.):

$$(z' - z) - \partial z_y (y' - y) - \partial z_x (x' - x) = 0,$$

oder

$$4) \qquad z' = \partial z_x \cdot x' + \partial z_y \cdot y' + (z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y) = 0.$$

Denkt man sich nun y als diejenige unbekannte Funktion von x, welche die Richtung angiebt, in welcher der nächste Punkt der gesuchten Fläche liegt, der dieselbe Tangential-Ebene hat, so müssen, wenn man $x + dx$ statt x (und das zugehörige $y + dy$ d. h. $y + \partial y_x \cdot dx$ statt y) setzt, die Koefficienten der Gleichung 4.) sich nicht ändern; also muß man haben

$$5) \qquad \partial(\partial z_x)_{(x)} = 0 \quad \text{und} \quad \partial(\partial z_y)_{(y)} = 0;$$

denn diese Bedingungen machen auch bereits den dritten Koefficienten $z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y$ constant, so daß seine Ableitung nach allem x, ebenfalls der Null gleich wird. Die beiden Gleichungen 5.) geben aber

$$6) \qquad \partial^2 z_x + \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial y_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial^2 z_y \cdot \partial y_x = 0.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen das unbekannte ∂y_x, so ergiebt sich die obige Gleichung 3.) als Endresultat. — Diese Gleichung 3.) drückt also die Bedingung aus, daß die Fläche von einer Tangential-Ebene nicht bloß in einem einzigen Punkte, sondern längs einer Linie berührt wird.

1'.) $$z - \mathfrak{z} = a \cdot (y - \mathfrak{y}) + \alpha \cdot (x - \mathfrak{x});$$

und die 2.) ist jetzt diese

2'.) $$0 = \partial a_\alpha \cdot (y - \mathfrak{y}) + (x - \mathfrak{x}).$$

Um nun α zu eliminiren, aus diesen beiden Gleichungen, muß man α aus 2'.) finden und den Werth dafür in die 1'.) statt α substituiren. Man erhält aber aus 2'.) zunächst

$$\partial a_\alpha = -\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}.$$

Daraus folgt, daß α eine Funktion von $\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}$ ist, und daß daher auch a eine Funktion von $\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}$ wird. Dividirt man nun die Gleichung 1'.) durch $y - \mathfrak{y}$ weg, so erhält man

$$\frac{z - \mathfrak{z}}{y - \mathfrak{y}} = a + \alpha \cdot \frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}},$$

so daß der Ausdruck zur Rechten nichts anders als eine Funktion von $\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}$ ist, die jedoch von derjenigen Funktion von α abhängt, die statt a genommen wird.

Die Gleichung

(⊙)... $$\frac{z - \mathfrak{z}}{y - \mathfrak{y}} = \psi\left(\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}\right),$$

wo $\psi\left(\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}\right)$ jede Funktion von $\frac{x - \mathfrak{x}}{y - \mathfrak{y}}$ vorstellt, drückt daher jede Kegelfläche aus, in so fern jede Kegelfläche als die Einhüllungsfläche von unendlich vielen Ebenen angesehen werden kann, die alle durch einen und denselben festen Punkt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) hindurchgehen, und die sich in stetig neben einander liegenden Geraden (die Seiten des Kegels) schneiden *).

---

*) Jede durch den Punkt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) hindurchgehende Gerade, wenn sie sich beliebig bewegt, beschreibt allemal eine allgemeine Kegelfläche, wenn nicht eine Ebene. Sind nun x, y, z die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der Kegelfläche, so ist die durch die beiden Punkte (x, y, z) und ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) gedachte Gerade L eine Seite des Kegels. Denkt man sich

Es fällt in die Augen, daß man auch die Gleichung aller Kegelflächen in der Form

$$(☾)\cdots \qquad \frac{z-\mathfrak{z}}{x-\mathfrak{x}} = \chi\left(\frac{y-\mathfrak{y}}{x-\mathfrak{x}}\right)$$

oder in der Form

$$(♀)\cdots \qquad \frac{y-\mathfrak{y}}{z-\mathfrak{z}} = \varkappa\left(\frac{x-\mathfrak{x}}{z-\mathfrak{z}}\right)$$

herstellen kann, wo $\chi\left(\frac{y-\mathfrak{y}}{x-\mathfrak{x}}\right)$ eine ganz beliebige Funktion von $\frac{y-\mathfrak{y}}{x-\mathfrak{x}}$, oder wo $\varkappa\left(\frac{x-\mathfrak{x}}{z-\mathfrak{z}}\right)$ eine ganz beliebige Funktion von $\frac{x-\mathfrak{x}}{z-\mathfrak{z}}$ vorstelle.

Differenzirt man endlich die Gleichung ☉.) sowohl nach x, als auch nach y, so erhält man, wenn $\frac{x-\mathfrak{x}}{y-\mathfrak{y}} = u$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial z_x}{y-\mathfrak{y}} = \partial\psi_u \cdot \partial u_x = \partial\psi_u \cdot \frac{1}{y-\mathfrak{y}}$$

und

$$\frac{(y-\mathfrak{y})\cdot\partial z_y - (z-\mathfrak{z})}{(y-\mathfrak{y})^2} = \partial\psi_u \cdot \partial u_y = \partial\psi_u \cdot \frac{-(x-\mathfrak{x})}{(y-\mathfrak{y})^2}.$$

Diese beiden Gleichungen reduciren sich auf

$$\partial z_x = \partial\psi_u \quad \text{und} \quad (y-\mathfrak{y})\cdot\partial z_y - (z-\mathfrak{z}) = -\partial\psi_u \cdot (x-\mathfrak{x}),$$

und geben, wenn man $\partial\psi_u$ eliminirt, die Partial-Differential-Gleichung

$$(♂)\cdots \qquad z-\mathfrak{z} = \partial z_x \cdot (x-\mathfrak{x}) + \partial z_y \cdot (y-\mathfrak{y}).$$

---

diese Seite L projicirt auf die Ebenen XOY, XOZ und YOZ, und nennt man L′, L″, L‴ diese Projektionen, so ist $\frac{z-\mathfrak{z}}{y-\mathfrak{y}}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Projektion L‴ mit OY macht, so wie $\frac{x-\mathfrak{x}}{y-\mathfrak{y}}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Projektion L′ mit derselben Axe OY macht. Da nun die Gerade L sich willkührlich bewegt, wenn der eine dieser Winkel eine willkührliche Funktion der andern ist, so folgt die Richtigkeit der Gleichung ☉.) auch aus dieser Betrachtung.

Diese Partial-Gleichung gehört also in's Besondere allen Kegelflächen an, und drückt eine gemeinschaftliche Eigenschaft derselben aus, wie bereits zu Ende des §. 186.) im Allgemeinen bemerkt worden ist. — Diese Eigenschaft ist aber hier keine andere, als daß alle Tangential-Ebenen aller Punkte der Fläche, in einem und demselben Punkte sich schneiden. — Sucht man nämlich die krumme Fläche, deren Tangential-Ebenen alle durch den Punkt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) hindurchgehen, so schreibt man die Gleichung einer solchen, an dem beliebigen Punkte (x, y, z) die gesuchte Fläche berührenden Ebene hin, nämlich (nach §. 176.) die Gleichung

$$(z'-z)-\partial z_y(y'-y)-\partial z_x(x'-x)=0,$$

wo x', y', z' die Koordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes dieser berührenden Ebene vorstellen. Soll nun solche durch den Punkt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) hindurchgehen, so muß diese Gleichung identisch werden, wenn man $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ statt x', y', z' setzt. Dies giebt aber die Gleichung ♂.), als die Gleichung der gesuchten Fläche, und die Integral-Rechnung muß aus dieser Gleichung die (algebraische oder transcendente) Gleichung ableiten, welche bloß x, y, und z, aber keine Differential-Koefficienten mehr enthält.

Differenziirt man übrigens die Gleichung ♂.) nach allem x und nach allem y, und eliminirt man dann aus den beiden dadurch erhaltenen Gleichungen entweder $y-\mathfrak{y}$ oder $x-\mathfrak{x}$, so erhält man die Gleichung $\partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0$, d. h. die Gleichung 3.) wieder, wie sich von selbst versteht.

II. Nehmen wir jetzt die Gleichung irgend einer Geraden, die durch einen gegebenen Punkt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) hindurchgeht, nämlich

$$(\odot) \ldots \quad \begin{cases} y-\mathfrak{y}=m(x-\mathfrak{x}) \\ z-\mathfrak{z}=n(x-\mathfrak{x}) \end{cases},$$

so ist die Gleichung aller Ebenen, welche mit dieser Geraden parallel laufen, diese:

(C)

(ℭ) ... $z = (n - bm)x + by + c$ *).

Nimmt man nun $c = \alpha$, und denkt man sich b als eine beliebige Funktion von α, so hat man die Gleichung

1′) $$z = (n - b_\alpha m) \cdot x + b_\alpha \cdot y + \alpha$$

oder

$$z = nx + \alpha + b_\alpha (y - mx)$$

für die Erzeugungs-Ebenen, welche jeden Cylinder als Einhüllungs-Ebene geben. Differenziirt man diese Gleichung nach α, so erhält man

2′) $$0 = -\partial b_\alpha \cdot (mx - y) + 1;$$

und die Gleichungen 1′.) und 2′.), wenn man α aus ihnen eliminirt, geben also jede Cylinderfläche.

Die Gleichung 2′.) nach α aufgelöst, giebt für α eine Funkiton von $y - mx$; und die Gleichung 1′.) giebt dann für $z - nx$ eine Funktion von $y - mx$, so daß man als Gleichung einer jeden Cylinderfläche

3′) $$z - nx = \psi(y - mx)$$

erhält, wenn $\psi(y - mx)$ jede Funktion von $y - mx$ vorstellt **).

---

*) Um diese Gleichung zu finden, nimmt man erstlich die Gleichung

1″) $$z = ax + by + c$$

für jede Ebene an; dann schreibt man die Gleichung

2″) $$z - \mathfrak{z} = a(x - \mathfrak{x}) + b(y - \mathfrak{y})$$

für die mit der 1″.) parallele, aber durch den Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ hindurchgehende Ebene hin. Liegt nun in letzterer Ebene die Gerade ⊙.) mit allen ihren Punkten, so ist die Ebene 1.″) mit der Geraden ⊙.) parallel. — Damit aber die Gerade ⊙.) mit allen ihren Punkten in der Ebene 2″.) liege, muß diese Gleichung 2″.) identisch werden, so oft man für y und z die Werthe aus ⊙.) substituirt. Dies giebt aber die Gleichung

$$n(x - \mathfrak{x}) = a(x - \mathfrak{x}) + bm(x - \mathfrak{x})$$

oder

$$n = a + bm \quad \text{d. h.} \quad a = n - bm.$$

**) Denkt man sich durch O senkrecht auf die Seiten des Cylinders eine Ebene, und nimmt man in dieser Ebene neue Koordinaten-Axen

Differenziirt man diese Gleichung nach x und nach y, so erhält man, wenn

$$y - mx = u$$

gesetzt wird, die beiden Differential-Gleichungen

4.) $$\partial z_x - n = \partial\psi_u \cdot \partial u_x = -m \cdot \partial\psi_u$$

und

5.) $$\partial z_y = \partial\psi_u \cdot \partial u_y = \partial\psi_u.$$

Eliminirt man aber aus beiden letztern Gleichungen die ganz willkührliche Funktion $\partial\psi_u$, so ergiebt sich

6.) $$\partial z_x + m \cdot \partial z_y = n$$

als Partial-Differential-Gleichung, welche für alle Cylinderflächen dieselbe bleibt, wie auch die willkührliche Funktion ψ sich abändern mag. Diese Partial-Gleichung 6.) drückt also eine Eigenschaft aus, welche alle Cylinderflächen mit einander gemein haben.

Diese Eigenschaft ist aber keine andre als daß alle, den Cylinder berührende (Tangential-) Ebenen mit einer und derselben Geraden

$$y - mx = 0 \quad \text{und} \quad z - nx = 0$$

parallel laufen (nach §. 142. und §. 176.). Schreibt man nämlich die Gleichung irgend einer Tangential-Ebene hin, so führt die Bedingung des Parallelismus zur Gleichung 6.)

Differenziirt man aber die Gleichung 6.) nach allem x und nach allem y, und eliminirt man zuletzt m, so erhält man wieder die Gleichung 3.) d. h. die Gleichung

$$\partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0;$$

wie sich dies von selbst versteht.

OX′ und OY′, so ist die Gleichung des Cylinders auf diese neuen Axen bezogen, von der Form

$$y' = \varkappa_{x'},$$

wo $\varkappa_{x'}$ eine willkührliche Funktion von x′ vorstellt. Reducirt man dann die neuen Koordinaten-Werthe auf die alten, so bekommt man bald wieder die obige Form.

§. 188.

Man kann sich auch eine Fläche durch Bewegung einer Linie entstanden denken*). — Die Gleichungen solcher Flächen bekommt man ohne alle Differential-Rechnung.

Hat man nämlich zwei Gleichungen

$$\varphi_{x,y,z,\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y,z,\alpha} = 0.$$

für irgend eine gerade oder krumme Linie, welche jedoch auch noch einen unbestimmten Parameter α in sich aufgenommen haben, so daß diese Gleichungen für jeden andern Werth von α anders werden, so stellen diese Gleichungen unendlich-viele stetig neben einander liegende Linien vor, welche entweder alle einander congruent sind, also nur immer einen andern Ort einnehmen, oder welche zu gleicher Zeit auch alle von einander unmerklich verschieden seyn können **).

Eliminirt man nun α aus beiden Gleichungen

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0,$$

so erhält man die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x, y und z, welche den Punkten aller dieser Linien zugleich angehört, also die Gleichung der durch diese Linien gebildeten Fläche.

I. Nimmt man z. B. die Gleichungen einer geraden Linie

$$y = bx + a \quad \text{und} \quad z = cx + h;$$

denkt man sich nun a, b, c und h als Funktionen von α, so hat man eine gerade Linie, welche sich ganz nach Belieben be-

*) So entstehen alle Umdrehungsflächen durch Bewegung einer Kurve um eine feste Axe. So entstehen alle Kegelflächen, durch Bewegung einer Geraden um einen festen ihrer Punkte. So entstehen alle Cylinderflächen, indem sich eine gerade Linie immer parallel mit sich selbst bewegt. U. s. w. f.

**) So kann man sich einen gewöhnlichen senkrechten Kegel-Mantel dadurch beschrieben denken, daß ein Kreis mit seinem Mittelpunkte in einer, auf der Kreis-Ebene senkrechten Geraden sich fortbewegt, während der Radius dieses Kreises nach und nach immer kleiner und kleiner wird, und zwar in einem bestimmten Verhältniß.

wegt; und eliminirt man nachgehends α, so hat man die Gleichung der durch Bewegung dieser Geraden entstandenen Fläche.

A. Denkt man sich, daß diese Gerade sich parallel mit sich selbst bewegt, also immer parallel bleibt mit einer durch die Gleichungen

1) $\quad y-\mathfrak{y}=b(x-\mathfrak{x})$ und $z-\mathfrak{z}=c(x-\mathfrak{x})$

gegebenen Geraden, so sind dasmal b und c nicht Funktionen von α, sondern gegebene Constanten und nur a und h sind noch Funktionen von α. Dann wird

$$a=z-cx \quad \text{und} \quad h=y-bx;$$

und, in so fern a eine ganz beliebige Funktion ψ von h ist, so hat man jetzt

2) $\quad z-cx=\psi(y-bx)$

für die Gleichung der erzeugten Cylinderfläche, welches genau mit dem Resultate des vorhergehenden Paragraphen stimmt.

Denkt man sich, daß dieselbe Gerade, während sie immer mit sich parallel bleibt, längs einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve sich hinbewegt, so heißt die letztere die Leitlinie (linea directrix). Ist solche durch die beiden Gleichungen

3) $\quad F_{x,y,z}=0$ und $f_{x,y,z}=0$

gegeben, so müssen die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Werthe von z und y, als Funktionen von x, statt z und y in die 2.) substituirt, diese letztere identisch machen, so daß die x von selbst herausfallen. Daraus muß dann die Funktion ψ bestimmt werden.

In gegenwärtigem Falle kann man aber die Gleichung des Cylinders direkt am besten finden. Man schreibt nämlich die Gleichungen einer, mit der 1.) parallelen und durch einen beliebigen Punkt der Kurve 3.), dessen Koordinaten-Werthe x, y und z sind, gehenden Geraden hin, z. B.

4) $\quad y'-y=b(x'-x)$ und $z'-z=c(x'-x)$

und eliminirt dann aus den vier Gleichungen 3.) und 4.) die drei Veränderlichen x, y und z. Die so entstehende Gleichung zwischen x', y', z' gehört dann den Punkten einer jeden mit

der 1.) parallelen Geraden, welche mit der Kurve 3.) einen Punkt gemein hat, also jedem Punkte der Cylinderfläche an.

B. Läßt man die sich bewegende Gerade immer durch einen festen Punkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hindurchgehen, so ist ihre Gleichung

1) $\quad z-\mathfrak{z}=a(x-\mathfrak{x}) \quad$ und $\quad y-\mathfrak{y}=b(x-\mathfrak{x})$

und dabei sind a und b als Funktionen von α anzusehen, d. h. von einander abhängig, nach dem anderweitig gegebenen Gesetze der Bewegung. Diese Gleichungen geben aber

$$\frac{z-\mathfrak{z}}{x-\mathfrak{x}}=a \quad \text{und} \quad \frac{y-\mathfrak{y}}{x-\mathfrak{x}}=b,$$

während a eine beliebige Funktion ψ von b ist. Also ist die Gleichung der durch die Bewegung dieser Geraden entstandenen Kegelfläche diese:

2) $$\frac{z-\mathfrak{z}}{x-\mathfrak{x}}=\psi\left(\frac{y-\mathfrak{y}}{x-\mathfrak{x}}\right),$$

welches genau mit dem Resultate des vorhergehenden Paragraphen übereinstimmt.

Denkt man sich aber, daß dieselbe Gerade fortwährend längs der durch die Gleichungen

3) $\quad F_{x,y,z}=0 \quad$ und $\quad f_{x,y,z}=0$

gegebenen Leitlinie sich hinbewegt, so müssen wieder die aus 3.) hervorgehenden Werthe von z und y, wenn solche in die 2.) substituirt werden, eine identische Gleichung geben, aus welcher x von selbst herausfällt. Dadurch bestimmt sich die Form ψ.

Es ist aber fast bequemer, in diesem Falle so zu verfahren: Man schreibt die Gleichungen einer Geraden hin, welche durch den Punkt ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$), aber auch durch einen beliebigen Punkt (x, y, z) der Leitlinie hindurchgeht, nämlich die Gleichungen

4) $\quad z'-\mathfrak{z}=\frac{z-\mathfrak{z}}{x-\mathfrak{x}}(x'-\mathfrak{x}) \quad$ und $\quad y'-y=\frac{y-\mathfrak{y}}{x-\mathfrak{x}}(x'-\mathfrak{x})$;

und eliminirt dann aus den vier Gleichungen 3.) und 4.) die drei Veränderlichen x, y und z; in so fern die zwischen x', y' und z' hervorgehende Gleichung jedem Punkte einer jeden belie-

digen dieser Geraden, d. h. offenbar jedem Punkte der Regelfläche angehören muß.

II. Suchen wir noch auf diesem Wege die Gleichung einer Umdrehungsfläche, deren Axe durch die Gleichungen

1) $y-b=m(x-a)$ und $z-c=n(x-a)$

gegeben, so daß (a, b, c) irgend ein Punkt dieser Axe ist. Wir denken uns nämlich, daß jede Umdrehungsfläche beschrieben wird, indem sich eine Kreis-Ebene mit ihrem Mittelpunkte auf der Axe 1.) parallel mit sich fortbewegt und immer senkrecht auf dieser Axe bleibt, während der Radius des Kreises immerfort dem Gesetze gemäß sich ändert, welches die Kurve bedingt, deren Umdrehung um die Axe 1.) die Umdrehungsfläche bilden soll, und welche wir durch

2) $y' = \psi_{x'}$

vorstellen wollen, unter der Voraussetzung, daß die Abscissen-Werthe x′ von dem Punkte (a, b, c) aus auf der Axe 1.) genommen sind.

Sind α, β, γ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen zweiten Punktes der Axe 1.), so sind β und γ gegebene Funktionen von α, weil sie aus den Gleichungen 1.), nämlich aus den Gleichungen

3) $\beta-b=m(\alpha-a)$ und $\gamma-c=n(\alpha-a)$

berechnet werden müssen. Dabei ist die Entfernung der beiden Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) von einander

$$=\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2}.$$

Legt man nun durch diesen Punkt (α, β, γ) als Mittelpunkt, eine Kugel, deren Radius der zu $x'=\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2}$ gehörige Werth y′ aus 2.) ist, den wir durch r bezeichnen wollen, so ist ihre Gleichung

4) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2=0,$

wo β, γ und r bekannte Funktionen von α sind. Legt man ferner durch denselben Punkt (α, β, γ) eine Ebene senkrecht auf die Axe 1.), so ist ihre Gleichung (nach §. 142. VIII.) diese:

$$5) \qquad (x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)=0.$$

Beide Gleichungen 4.) und 5.) in Verbindung stellen nun den Kreis vor, der sich parallel mit sich fortbewegt, so wie man statt α stetig neben einander liegende Werthe gesetzt sich denkt, und welcher dabei die verlangte Umdrehungs-Fläche beschreibt. Eliminirt man daher aus den Gleichungen 4.) und 5.) den Veränderlichen α, so hat man die Gleichung zwischen x, y und z für die Umdrehungs-Fläche. Dabei ist $r=\psi(\alpha-a)$, wo ψ eine ganz beliebige Funktion von $\alpha-a$ vorstellt.

Wollte man ein Umdrehungs-Paraboloid darstellen, so müßte man

$$y'^2=px', \qquad \text{also} \qquad r^2=p\cdot\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+(\gamma-c)^2}$$

nehmen. — Wollte man aber eine Kugel darstellen, welche durch die Umdrehung eines durch die Gleichung

$$y'^2=p^2-x'^2$$

gegebenen Kreises (um die Axe 1.) entsteht, dessen Radius p und dessen Mittelpunkt (a, b, c) ist, so müßte man

$$r^2=p^2-(\alpha-a)^2-(\beta-b)^2-(\gamma-c)^2$$

nehmen. Dadurch gehen aber die Gleichungen 4.) und 5.), wenn man zugleich statt β und γ ihre Werthe aus 3.) setzt, über in die folgenden Gleichungen, nämlich die 4.) in

$$(x-a-(\alpha-a))^2+(y-b-m(\alpha-a))^2+(z-c-n(\alpha-a))^2$$
$$-p^2+(1+m^2+n^2)(\alpha-a)^2=0$$

oder in

$$4') \; (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-p^2-2((x-a)+m(y-b)+n(z-c))(\alpha-a)$$
$$+2(1+m^2+n^2)(\alpha-a)^2=0$$

und die 5.) in

$$5') \qquad x-a+m(y-b)+n(z-c)-(1+m^2+n^2)(\alpha-a)=0.$$

Findet man nun aus 5'.) den Ausdruck $(x-a)+m(y-b)+n(z-c)$, und setzt man dessen Werth in die 4'.) und zwar in das vorletzte Glied, so reducirt sich die Gleichung 4'.) sogleich auf

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-p^2=0$$

und α ist eliminirt. Also ist diese letztere Gleichung die für die Kugel gesuchte. Solche konnte man aber auch à priori angeben, und diese Uebereinstimmung bestätigt also die Richtigkeit unserer obigen Behauptungen für diesen besondern Fall.

Wollte man aus den Gleichungen 4.) und 5.) nicht bloß α, sondern auch r oder r_α, als eine völlig willkührliche unbekannte Funktion von α eliminiren, so müßte man wieder zu den Differential-Gleichungen nach x und nach y seine Zuflucht

nehmen, und man würde dann nicht bloß r_α, sondern auch a eliminiren, und so eine Partial-Differential-Gleichung sich verschaffen, welche eine allgemeine Eigenschaft aller Umdrehungs-Flächen ausdrückt.

Anmerkung. Wenn aber alle Aufgaben dieses Paragraphen (sobald man nicht noch solche daran hängt, wie wir ein derselben, so eben bezeichnet haben), ohne Zuziehung von Differential-Rechnung gelöst werden können, so ist dies doch dann nicht mehr der Fall, so oft die sich bewegende und die gesuchte Fläche beschreibende Linie, selbst eine solche seyn soll, deren Gleichung nur mittelst der Differential-Rechnung gefunden werden kann. Um auch hiervon ein Beispiel zu geben, lösen wir noch die folgende Aufgabe.

§. 189.

Man kann noch auf dem im vorstehenden §. 188.) beschriebenen Wege die Gleichung der Fläche suchen, welche alle Tangenten einer, durch die Gleichungen

1) $\beta = \varphi_\alpha$ und 2) $\gamma = \psi_\alpha$

zwischen den Koordinaten-Werthen α, β, γ gegebenen Linie doppelter Krümmung, mit einander machen.

Die Gleichungen der Tangente sind (nach §. 180.)

$$y - \beta = \partial\varphi_\alpha \cdot (x - \alpha) \quad \text{und} \quad z - \gamma = \partial\psi_\alpha \cdot (x - \alpha)$$

oder

$$3)\ y - \varphi_\alpha = \partial\varphi_\alpha \cdot (x - \alpha) \quad \text{und} \quad 4)\ z - \psi_\alpha = \partial\psi_\alpha \cdot (x - \alpha).$$

So wie nun α aus diesen letztern beiden Gleichungen eliminirt wird, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen x, y, z für die durch alle Tangenten gebildeten Fläche.

Zeigt sich diese letztere als die Gleichung einer Ebene, so ist die durch die Gleichungen 1.) und 2.) gegebene Kurve nicht doppelter Krümmung, sondern eben, und zwar liegt sie in der Ebene, deren Gleichung man so eben erhalten hat.

Durch diese beiden Gleichungen 3.) und 4.) sind α und z

Funk-

Funktionen von x und y. Differenziirt man sie in diesem Sinne nach x und auch nach y, so erhält man

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \partial^2\varphi_\alpha \cdot \partial\alpha_x \cdot (x-\alpha) + \partial\varphi_\alpha \\ 1 = \partial^2\varphi_\alpha \cdot \partial\alpha_y \cdot (x-\alpha) \end{array}\right\} \text{ aus der 3.),}$$

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial z_x = \partial^2\psi_\alpha \cdot \partial\alpha_x \cdot (x-\alpha) + \partial\psi_\alpha \\ \partial z_y = \partial^2\psi_\alpha \cdot \partial\alpha_y \cdot (x-\alpha) \end{array}\right\} \text{ aus der 4.).}$$

Diese Gleichungen geben ∂z_y als eine Funktion von ∂z_x, also wenn $\partial z_x = p$ gesetzt wird

$$\partial z_y = \pi_p.$$

Differenziirt man solche Gleichung noch einmal nach x und nach y, so erhält man

$$\partial^{1,1} z_{x,y} = \partial\pi_p \cdot \partial p_x = \partial\pi_p \cdot \partial^2 z_x$$

und

$$\partial^2 z_y = \partial\pi_p \cdot \partial p_y = \partial\pi_p \cdot \partial^{1,1} z_{x,y}.$$

Eliminirt man aber aus letzteren beiden Gleichungen $\partial\pi_p$, so ergiebt sich

$$7)\quad \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0$$

als Partial-Differential-Gleichung, welche allen diesen Flächen zukommt, von welcher Linie doppelter Krümmung man auch ausgegangen seyn mag. Diese Gleichung 7.) haben wir aber im §. 187.) als die Partial-Differential-Gleichung der abwickelbaren Flächen gefunden, so daß die hier entwickelte Fläche, wenn man die Linie doppelter Krümmung unbestimmt läßt, wiederum alle abwickelbaren Flächen vorstellt.

Anmerkung. Schließlich bemerken wir noch, daß die durch die Bewegung einer geraden Linie entstandenen Flächen entweder abwickelbare Flächen sind, oder windschiefe Flächen (surfaces gauches) genannt werden. Die so entstehenden Flächen sind nämlich nur dann abwickelbar, wenn je zwei der sie bildenden nächst auf einander folgenden Geraden in einer und derselben Ebene liegen d. h. sich schneiden, oder mit einander parallel sind.

§. 190.

Suchen wir noch den Cylinder und den Kegel, welche eine gegebene Fläche $F_{x,y,z} = 0$ in einer stetigen Kurve berühren (d. h. welche um die Fläche $F = 0$ beschrieben sind), während die Seiten des Cylinders mit einer gegebenen Geraden parallel laufen sollen, und die Spitze des Kegels noch besonders gegeben ist *).

I. Sollten die Seiten des gesuchten Cylinders mit der durch die Gleichung

1) $$y = mx \quad \text{und} \quad z = nx$$

gegebenen Geraden parallel laufen, so ist die Partial-Differential-Gleichung, die für alle diese Cylinder gemeinschaftlich gilt (nach §. 187. II. 6'.), diese, nämlich:

2) $$\partial z_x + m \cdot \partial z_y = n.$$

Aus der Gleichung

3) $$F_{x,y,z} = 0$$

der einzuhüllenden Fläche, folgt aber noch, wenn man sie nach allem x und nach allem y differenziirt,

4) $$\partial F_x + \partial F_z \cdot \partial z_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial F_y + \partial F_z \cdot \partial z_y = 0.$$

Und weil die ∂z_x und ∂z_y an allen Punkten der Kurve, längs welcher die Berührung statt finden soll, für den Cylinder und für die Fläche $F = 0$ dieselben seyn müssen, so finden die Gleichungen 2.) und 4.) für dieselben Werthe von ∂z_x und ∂z_y statt, sobald man unter x, y, z bloß die Koordinaten-Werthe der Punkte der Berührungs-Kurve versteht. Eliminirt man

*) Ein Körper, welcher die Oberfläche $F = 0$ hat, wirft, von der Sonne beschienen, einen Schatten, welcher der oben gesuchte Cylinder ist. Die Fläche $\varphi = 0$, die den Schatten auffängt, giebt den Schlag-Schatten auf dieser Fläche und letzterer ist daher der Durchschnitt der Fläche φ mit gedachtem Cylinder. — Wird die Fläche $F = 0$ von einem Punkte A aus durch ein Licht erleuchtet, so wirft er einen Schatten, welcher durch obigen Kegel bestimmt wird, der seine Spitze in A hat.

jedoch nun aus den drei Gleichungen 2.) und 4.) sowohl ∂z_x als auch ∂z_y, so erhält man die Gleichung

5) $$\partial F_x + m \cdot \partial F_y + n \cdot \partial F_z = 0,$$

wo ∂F_x, ∂F_y, ∂F_z bekannte Funktionen von x, y und z vorstellen. Die Gleichungen 3.) und 5.) bilden also die Gleichungen der Berührungs-Kurve.

Nimmt man nun letztere Kurve als Leitlinie, an welcher die sich bewegende, mit 1.) immer parallel bleibende Gerade sich hinbewegt, so erhält man durch Anwendung des zu Ende des §. 188. I. A.) beschriebenen Verfahrens die Gleichung des gesuchten Cylinders. Diese findet sich also, wenn man aus den Gleichungen

6) $$y' - y = m(x' - x) \quad \text{und} \quad z' - z = n(x' - x)$$

und den Gleichungen 3.) und 5.) die drei Veränderlichen x, y und z eliminirt.

II. Sucht man den Kegel, dessen Spitze durch die Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gegeben ist, und welcher die Fläche

1) $$F_{x,y,z} = 0$$

längs einer stetigen Kurve berühren soll, so ist die Partial-Differential-Gleichung desselben (nach §. 187. I. ♂) diese, nämlich

2) $$z - \mathfrak{z} = \partial z_x \cdot (x - \mathfrak{x}) + \partial z_y \cdot (y - \mathfrak{y}).$$

Außerdem hat man noch aus 1.)

3) $$\partial F_x + \partial F_z \cdot \partial z_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial F_y + \partial F_z \cdot \partial z_y = 0.$$

Eliminirt man daher aus 2.) und 3.) sowohl ∂z_x als ∂z_y, so erhält man

4) $$\partial F_z \cdot (z - \mathfrak{z}) + \partial F_y \cdot (y - \mathfrak{y}) + \partial F_x \cdot (x - \mathfrak{x}) = 0,$$

welches die Gleichung der Berührungs-Linie ist, sobald man sie mit $F = 0$ in Verbindung bringt, während ∂F_x, ∂F_y, ∂F_z bekannte Funktionen von x, y und z sind.

Nimmt man nun diese durch die Gleichungen 1.) und 4.) gegebene Berührungs-Linie als Leitlinie, so findet sich (nach §. 188. I. B. zu Ende) die Gleichung der von der Geraden

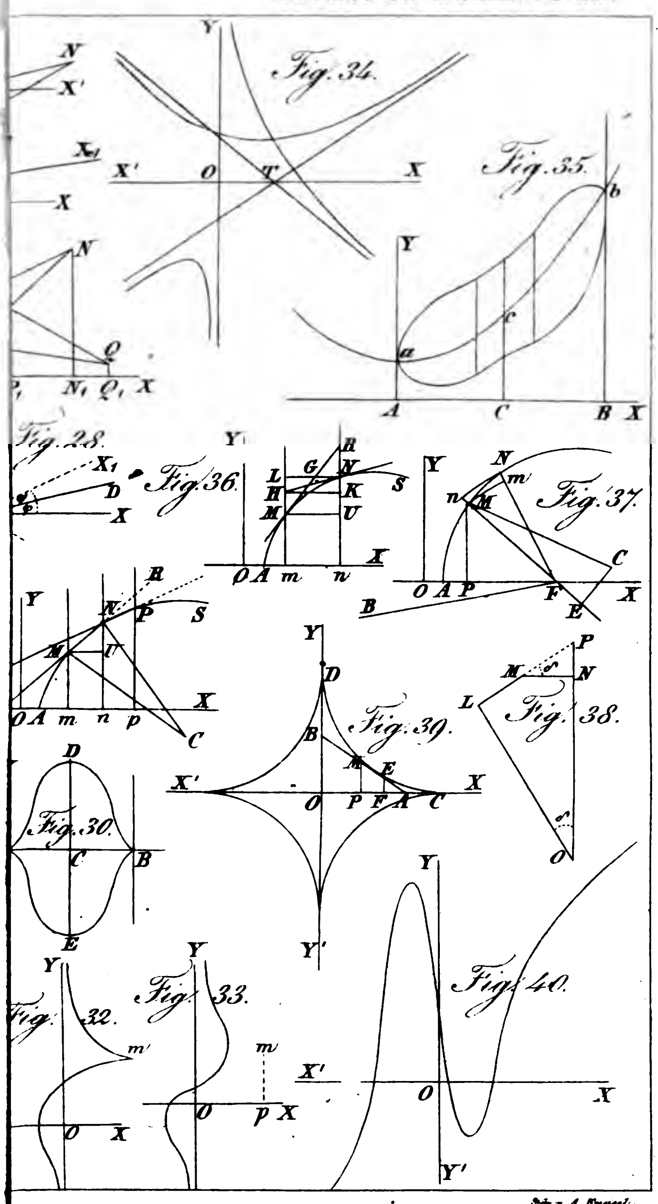
5) $$y' - \mathfrak{y} = \frac{y - \mathfrak{y}}{x - \mathfrak{x}} \cdot (x' - \mathfrak{x}), \quad z' - \mathfrak{z} = \frac{z - \mathfrak{z}}{x - \mathfrak{x}} \cdot (x' - \mathfrak{x})$$

beschriebenen Kegel-Fläche, die wir suchen, wenn man aus den Gleichungen 1.), 4.) und 5.) die drei Veränderlichen x, y und z eliminirt; alles aus denselben Gründen, welche in der nächst vorstehenden Aufgabe für den Cylinder näher angegeben sich finden.

Schluß-Anmerkung.

So sehr sich die Anwendungen der Differential-Rechnung auch vervielfältigen lassen, und so leicht man auch diese letztern Untersuchungen vervielfältigen kann, so müssen wir doch hier endlich abbrechen, um die uns für dieses Werk gesteckten Grenzen nicht allzusehr zu überschreiten.

Berlin, gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.



Gedr. v. A. Knoesel.